Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Karl Egil Aubert

Sur la théorie des x-idéaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 6, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A6_0>

19 décembre 1960

SUR LA THÉORIE DES x-IDÉAUX

par Karl Egil AUBERT

1. Axiomes et définitions.

Pour de nombreuses formes de la notion d'idéal, le passage d'un sous-ensemble à l'idéal qui l'engendre admet des propriétés simples qui peuvent servir de base à une théorie générale des idéaux.

Soit D un demi-groupe commutatif noté multiplicativement. On dit que l'on a défini sur D un système de x-idéaux, ou simplement un x-système, si l'on a défini une application $A \to A_x$ de l'ensemble des parties de D en lui-même, telle que

$$(1) \quad A \subseteq A_x$$

$$(2) \quad A \subseteq B_x \Longrightarrow A_x \subseteq B_x$$

$$(3) \quad AB_x \subseteq B_x \cap (AB)_x \quad .$$

La condition (3) équivaut à la conjonction des deux axiomes suivants :

$$(3') \quad AB_x \subseteq B_x \qquad \text{et} \qquad (3'') \quad AB_x \subseteq (AB)_x \quad .$$

Si D n'est pas supposé commutatif, il faut remplacer (3") par $B_x A \subseteq (BA)_x$ pour avoir un x-système à gauche. Nous nous bornerons dans la suite au cas commutatif. Nous appelons x-opération le passage de A à A_x. A_x est appelé le x-idéal engendré par A, et A est appelé un x-idéal, si $A = A_x$. Un x-système est dit de caractère fini, si le x-idéal engendré par A est égal à la réunion des x-idéaux engendrés par les parties finies de A. Nous nommons (3") l'axiome de continuité, puisqu'il exprime que les applications $\varphi_a : b \to ab$ sont continues par rapport à l'opération de fermeture $A \to A_x$.

L'axiomatique ci-dessus généralise la situation dans un anneau (commutatif) de la manière suivante. Soit D le demi-groupe multiplicatif de l'anneau E. Si $B \subseteq E$, nous notons B_d l'idéal (au sens usuel) engendré par B. On voit aussitôt que l'application $A \to A_d$ vérifie les axiomes (1) à (3). L'axiome de continuité est ici essentiellement une conséquence de la distributivité dans E. Donnons d'autres exemples de notions d'idéal qui vérifient les axiomes (1) à (3) :

1° Les idéaux dans les demi-groupes, l'opération $A \to A_x$ étant celle de $A \to SA \cup A$;

2° Les idéaux dans les treillis distributifs ;

3° Les idéaux différentiels radicaux dans un anneau différentiel A, le demi-groupe D étant toujours le demi-groupe multiplicatif de A ;

4° Les idéaux fermés d'un anneau topologique ;

5° Les sous-groupes convexes réticulés d'un groupe réticulé, l'opération de D étant $a \circ b = |a| \cap |b|$;

6° Les v-idéaux d'Artin-Van der Waerden et les autres r-idéaux étudiés par KRULL et LORENZEN.

En affaiblissant (3") en

$$(3^*) \quad A_x B_x \subseteq (A_x B)_x ,$$

on peut aussi inclure les exemples suivants :

7° Les idéaux monadiques de Halmos ;

8° Les sous-groupes invariants, l'opération de demi-groupe (non-associative) étant $ab = ab\,a^{-1}\,b^{-1}$;

9° Les idéaux différentiels d'un anneau différentiel.

Comme l'ont remarqué CROISOT et LESIEUR [4], certaines parties de la théorie des idéaux ne dépendent que de (3^*), mais étant donné que l'axiome (3") est tout à fait indispensable pour tant de théorèmes fondamentaux dans la théorie des idéaux, nous allons toujours le supposer satisfait dans la suite.

2. Opérations sur les x-idéaux. Conditions équivalentes à l'axiome de continuité.

L'intersection d'une famille de x-idéaux est encore un x-idéal, tandis que l'union (au sens de la théorie des ensembles) et le produit (au sens de la multiplication des complexes dans D) ne sont pas en général des x-idéaux. Par x-union d'une famille $\{A^{(i)}\}$ de sous-ensembles de D, nous entendons le x-idéal engendré par la réunion des $A^{(i)}$. Cette opération est notée $\cup_x$. De même, le x-produit de A et B est défini comme le x-idéal engendré par le complexe produit $A.B$. Cette opération est appelée x-multiplication, et notée $\circ_x$ ou simplement $\circ$, car nous n'allons jamais considérer plusieurs x-systèmes à la fois. Enfin, l'opération de résiduation est définie de la manière habituelle par

$A : B = \{c \, , \, cB \subseteq A\}$. En considérant $A \to A_x$ seulement comme une opération de fermeture satisfaisant à (3') nous avons le théorème suivant donnant diverses formes équivalentes à l'axiome de continuité.

THÉORÈME 1.-Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1° $AB_x \subseteq (AB)_x$;

2° $A \circ B = A \circ B_x$;

3° $A \circ B = A_x \circ B_x$;

4° $A(B \cup_x C) \subseteq AB \cup_x AC$;

5° $A \circ (B \cup_x C) = A \circ B \cup_x A \circ C$;

6° $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$ (si D possède un élément neutre) ;

7° $(A_x : B)_x = A_x : B$;

8° $A_x : B_x = A_x : B$;

9° $A_x : \bigcup_{i\,x} B^{(i)} = \bigcap_i A_x : B^{(i)}$;

10° $(A_x : B) : C = A_x : (B \circ C)$ (si D possède un élément neutre).

Nous notons que toutes les formes de l'axiome de continuité données dans le théorème 1 font intervenir des sous-ensembles B de D qui ne sont pas des x-idéaux. On peut démontrer que ceci est inévitable dans n'importe quelle formulation de l'axiome de continuité. De façon précise, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - L'axiome de continuité ne peut pas être formulé uniquement à l'aide de x-idéaux, et des opérations $\circ$ et $\cup_x$. En d'autres termes, cet axiome n'exprime pas une propriété du treillis multiplicatif des x-idéaux.

Donnons une esquisse de la démonstration de ce théorème. Appelons x^*-système une opération de fermeture qui vérifie (1), (2) et (3'), mais non nécessairement l'axiome de continuité (3"). Pour les x^*-idéaux, on peut définir les opérations de x^*-union et de x^*-multiplication de la même manière que pour les x-idéaux. Mais l'ensemble des x^*-idéaux de D ne forme pas toujours un treillis multiplicatif par rapport à ces opérations. Pour démontrer le théorème, il faut exhiber deux demi-groupes, D_1 et D_2, munis de deux x^*-systèmes, x_1^* et x_2^* respectivement tels que les conditions suivantes sont remplies :

1° x_1^* vérifie l'axiome de continuité tandis que x_2^* ne le vérifie pas.

2° Les x_i^*-idéaux $(i = 1, 2)$ forment deux treillis multiplicatifs isomorphes.

Posons D_2 = demi-groupe multiplicatif de l'anneau différentiel $Z[x]$, et x_2^* = le système des idéaux différentiels de $Z[x]$. On voit aisément que x_2^* ne vérifie pas l'axiome de continuité, mais que les x_2^*-idéaux de $Z[x]$ forment quand même un treillis multiplicatif L_2. Posons maintenant D_1 = demi-groupe multiplicatif de L_2 et $x_1^* = m$, où un m-idéal M d'un treillis multiplicatif L est défini par les deux conditions suivantes :

1° $a, b \in M \Longrightarrow a \cup b \in M$

2° $a \in M, b \in L \Longrightarrow ab \in M$.

Les m-idéaux de L_2 vérifient l'axiome de continuité, et chaque m-idéal dans L_2 est principal à cause de la condition de chaîne ascendante dans L_2. Le treillis multiplicatif L_1 des m-idéaux dans L_2 devient ainsi isomorphe à L_2 et le théorème est démontré.

3. Certains aspects de la théorie des x-idéaux.

Il va de soi que nous ne pouvons pas discuter systématiquement ici quelles parties des théories d'idéaux particulières s'étendent aux x-idéaux. Prenons d'abord une théorie classique qui est parfaitement adaptée à l'axiomatique de la théorie des x-idéaux, à savoir la théorie des idéaux dans un anneau de Dedekind E. Cette théorie due à E. NOETHER repose sur les trois axiomes suivants :

(1) La condition de chaîne ascendante pour les idéaux de E.

(2) Chaque idéal premier dans E est maximal.

(3) E est intégralement clos dans son corps des quotients.

D'abord, il faut définir la notion de x-système fractionnaire. Supposons, pour simplifier, que D soit simplifiable, à savoir : $ac = bc \Longrightarrow a = b$, et possède un élément neutre. Soit G le groupe des quotients de D. Un sous-ensemble A de G est dit fractionnaire (ou borné), s'il existe un élément $a \in D$, tel que $aA \subseteq D$. Alors on dit que l'on a défini un x-système fractionnaire dans D (ou dans G) si l'on a fait correspondre à chaque sous-ensemble fractionnaire A de G un sous-ensemble A_x de G tel que :

(1) $A \subseteq A_x$

(2) $A \subseteq B_x \Longrightarrow A_x \subseteq B_x$

(3') $DA_x \subseteq A_x$

(3") $g\,A_x \subseteq (gA)_x$ pour tout $g \in G$

(4) $D_x = D$.

Parmi les conditions (1), (2) et (3) de E. NOETHER, il n'y a que (3) qui ne se prête pas immédiatement à une généralisation aux x-idéaux. Mais, comme l'avait déjà remarqué PRÜFER, cette condition est équivalente à la relation $B_d : B_d \subseteq E$ pour chaque idéal fractionnaire B_d de l'anneau E. On dit donc que D est <u>intégralement</u> x-<u>clos</u>, ou simplement x-<u>clos</u>, si $B_x : B_x \subseteq D$ pour tout x-idéal fractionnaire E_x de D. Nous dirons que D est x-<u>dedekindien</u> si :

1° D satisfait à la condition de chaîne ascendante pour les x-idéaux contenus dans D.

2° Chaque x-idéal premier contenu dans D est maximal dans D.

3° D est x-clos.

Alors on démontre comme dans le cas classique le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - <u>Dans un demi-groupe</u> x-<u>dedekindien</u> D <u>chaque</u> x-<u>idéal peut s'écrire comme un produit fini de</u> x-<u>idéaux premiers</u>. <u>Si</u> $A_x \subseteq B_x$, <u>la décomposition première de</u> A_x <u>contient tous les idéaux premiers, et avec au moins la même multiplicité que ceux qui figurent dans la factorisation de</u> B_x. <u>Inversement, une telle existence et unicité de factorisation entraîne que</u> D <u>est</u> x-<u>dedekindien</u>.

Remarquons que nous avons pu déduire ce théorème sous des conditions moins fortes que dans la théorie de Prüfer-Lorenzen, où l'on suppose en outre que l'axiome

$$(5) \quad \{a\}_x = Da$$

est vérifié.

Nous allons appeler <u>principal</u> un x-système qui vérifie (5). Un exemple de x-système non-principal est fourni par les idéaux différentiels radicaux : $\{x\}_\delta \neq Z[x].x$. Disons qu'un x-système dans D possède la <u>propriété de groupe</u>, ou simplement la <u>propriété</u> G si les x-idéaux fractionnaires de D forment un groupe par rapport à la x-multiplication. Il est bien connu que, dans la théorie des idéaux d'un anneau E, il y a dans le cas $x = d$ équivalence entre les propriétés :

1° E est x-dedekindien ;

2° x possède la propriété G dans E .

En montrant par exemple d'abord que 1° et 2° entraînent chacun que x est principal, on déduit leur équivalence en général.

Les démonstrations dans la théorie des anneaux de Dedekind ont un caractère très multiplicatif, et il n'est donc pas très inattendu que cette théorie se prête facilement à une généralisation aux x-idéaux une fois qu'on a trouvé la notion générale de clôture intégrale. Il est bien plus surprenant que des théories qui ont un caractère assez additif se traduisent d'une manière presque immédiate en x-idéaux. Un tel exemple est fourni par la théorie des idéaux relativement premiers (avec les deux derniers théorèmes de décomposition de E. NOETHER) exposée dans [5], p.80-83. Mais il y a évidemment des théorèmes qui ne se laissent pas traduire en x-idéaux sans faire des hypothèses supplémentaires. Mentionnons deux exemples. Dans la théorie de KRULL [3] des anneaux sans condition de chaîne, toutes les démonstrations se traduisent facilement à l'exception d'une seule où l'on utilise essentiellement la propriété simple que la somme de deux éléments a , b se trouve hors d'un idéal $\mathfrak{a}$, si $a \in \mathfrak{a}$ et $b \notin \mathfrak{a}$. Evidemment, ceci n'admet pas une traduction directe dans le langage des x-idéaux, l'opération additive étant supprimée dans ce langage. Mais il y a des propriétés qui dépendent fortement de la propriété additive mentionnée ci-dessus, et qui peuvent se formuler en langage de x-idéaux.

Nous dirons qu'un x-système est <u>additif</u> s'il vérifie la condition suivante : si un x-idéal A_x est contenu dans la réunion ensembliste $B_x \cup C_x$ de deux x-idéaux, alors $A_x \subseteq B_x$ ou $A_x \subseteq C_x$. En ne considérant que des x-systèmes additifs (ce qui exclut seulement le s-système parmi les exemples que nous avons mentionnés), on démontre aussi le passage "additif" dans la théorie de Krull. Comme deuxième exemple, nous pouvons mentionner la théorie des anneaux noethériens. Ici, il y a également un seul point qui présente des difficultés. Il est en général faux (x supposé de caractère fini et vérifiant la condition de chaîne pour les x-idéaux) qu'un x-idéal irréductible est primaire. Ici il faut encore supposer que cette propriété est vérifiée, ou bien que x satisfait à une autre condition qui l'entraîne.

4. <u>Les notions d'homomorphisme et de congruence dans la théorie des x-idéaux.</u>

Soient D_1 et D_2 deux demi-groupes commutatifs chacun muni d'un x-système noté respectivement x_1 et x_2. Nous dirons qu'une application φ de D_1 dans D_2 est un (x_1, x_2)-homomorphisme si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1° $\varphi(ab) = \varphi(a)\ \varphi(b)$;

2° $\varphi(A_{x_1}) \subseteq (\varphi(A))_{x_2}$.

La deuxième condition exprime que φ est "continue" par rapport aux topologies généralisées données par x_1 et x_2.

Si φ est une application multiplicative de D_1 sur D_2 (vérifiant 1), et si x est un x-système donné dans D_1, ceci induit un x-système x_φ dans D_2 en posant $B = B_{x_\varphi}$ chaque fois que l'on a $(\varphi^{-1}(B))_x = \varphi^{-1}(B)$.

Il n'y a pas de définition évidente des "homomorphismes canoniques" aboutissant à une définition de "quotient" D/A_x correspondant à la notion d'anneau quotient dans la théorie des anneaux. On peut cependant, pour chaque x-idéal $A_x \subseteq D$, définir une congruence qui, dans le cas des anneaux est, à certains titres, comparable à la congruence classique. Nous définissons

$$a \equiv b \pmod{A_x} \quad \text{si} \quad (A_x, a)_x = (A_x, b)_x \quad .$$

On démontre facilement (en utilisant l'axiome (3")) que ceci définit une relation de congruence de sorte que nous pouvons parler du demi-groupe quotient D/A_x qui, lui aussi, d'après le procédé général décrit ci-dessus, est muni d'une manière naturelle d'un x-système x_φ en notant par φ l'application canonique

$$\varphi : D \to D/A_x \quad .$$

Comme dans la théorie des idéaux d'un anneau, bien des propriétés de A_x peuvent s'exprimer à l'aide des propriétés correspondantes de D/A_x ; mais les dernières prennent ici une forme plus triviale. Exemple : A_x est un x-idéal maximal dans D, si et seulement si D/A_x est composé de deux éléments.

5. Deux applications.

Indiquons pour terminer à titre d'exemples deux applications qui dépassent le cadre des anneaux.

Dans la première application, il s'agit d'utiliser la notion générale de (x_1, x_2)-isomorphisme pour démontrer un théorème général qui caractérise des espaces compacts à l'aide de la structure algébrique des demi-groupes de fonctions numériques continues définies sur ces espaces.

Supposons que $D(X)$ est un demi-groupe de fonctions complexes continues sur l'espace topologique X. Pour l'instant, l'opération de demi-groupe n'est pas spécifiée. Dans des cas particuliers, cette opération peut être la multiplication ordinaire des fonctions ou bien l'opération $f \circ g = |f| \cap |g|$. Nous supposons que $D(X)$ est muni d'un x-système de caractère fini tel qu'il existe un élément x-neutre e dans $D(X)$ vérifiant les deux conditions suivantes

1° $\{e\}_x = D(X)$

2° $e \in (D(X))^2$.

On voit que dans le cas d'un anneau avec élément neutre e, cet élément e est un élément d-neutre.

En outre nous supposons que :

3° $D(X)$ sépare les points dans X ;

4° $D(X)$ sépare points et ensembles fermés dans X ;

5° L'ensemble $\{f , f(a) = 0\}$ est pour chaque $a \in X$ un x-idéal maximal de $D(X)$ et, si X est compact, il n'y a pas d'autres x-idéaux maximaux.

Un demi-groupe $D(X)$ de fonctions numériques continues sur X qui vérifie les conditions 1 à 4 est appelé un <u>demi-groupe caractéristique</u> de X. Voici la raison de cette terminologie :

THÉORÈME. - <u>Soient X_1 et X_2 deux espaces compacts, et soit $D_i(X_i)$ $(i = 1, 2)$ un demi-groupe caractéristique de X_i par rapport au x-système x_i défini dans $D_i(X_i)$. Alors X_1 et X_2 sont homéomorphes, si $D_1(X_1)$ et $D_2(X_2)$ sont (x_1, x_2)-isomorphes.</u>

Pour la démonstration et l'application aux cas particuliers, nous renvoyons à [1].

En ce qui concerne la deuxième application, nous nous bornons à remarquer que le théorème de Krull-Stone-Raudenbush dans le cas des x-systèmes de caractère fini :

$$\operatorname{rad} A_x = \bigcap_{A_x \subset P_x} P_x$$

peut être appliqué pour obtenir un théorème très général concernant l'immersion des structures algébriques réticulées dans des produits directs de structures totalement ordonnées du même type.

Le théorème en question est démontré pour un type de structure algébrique réticulée que nous appelons C-algèbre. Pour une définition précise, nous renvoyons le lecteur à [2]. Indiquons seulement la généralité de la notion de C-algèbre en disant qu'elle comprend comme cas particulier les quatre structures réticulées suivantes : les groupes réticulés (abéliens ou non), les anneaux réticulés, les espaces vectoriels réticulés et les algèbres réticulées sur un corps totalement ordonné.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBERT (Karl Egil). - Theory of x-ideals (à paraître).

[2] AUBERT (Karl Egil). - Un théorème d'immersion pour une classe étendue de structures algébriques réticulées, Anais Acad. brasil. Ciencias, t. 31, 1959, p. 321-329.

[3] KRULL (Wolfgang). - Idealtheorie in Ringen ohne Enlichkeitsbedingung, Math. Annalen, t. 101, 1929, p. 729-744.

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I., Colloque d'algèbre supérieure [1956. Bruxelles] ; p. 79-121. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[5] VAN DER WAERDEN (B. L.). - Algebra II. - Berlin, Springer-Verlag, 1959 (die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 34).