Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jacques Riguet

Catégorisation de la notion de structures et de structures locales chez N. Bourbaki et C. Ehresmann, I

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 5, p. 1-32

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 5

12 décembre 1960

CATÉGORISATION DE LA NOTION DE STRUCTURES ET DE STRUCTURES LOCALES CHEZ N. BOURBAKI ET C. EHRESMANN, I.

par Jacques RIGUET

La parution en 1945 du mémoire de S. EILENBERG et MACLANE intitulé "general theory of natural equivalences" marquera sans doute dans l'histoire des mathématiques modernes un moment important. Grâce à ce mémoire, en effet, les notions de catégorie et de foncteurs, introduites d'abord pour rendre compte de la "naturalité" de constructions d'objets mathématiques à partir de certains autres et de phénomènes de dualité, allaient apparaître comme susceptibles d'être appliquées à toutes les branches des mathématiques. De même que l'apparition de la théorie des ensembles de Cantor pouvait être caractérisée essentiellement comme l'apparition d'un langage nouveau, demandant sans doute un effort d'abstraction plus grand, mais permettant l'apparition d'une mathématique "ensemblisée", et pour la première fois rigoureuse, de même l'apparition de la théorie de catégories peut être, elle aussi, caractérisée essentiellement comme fournissant un langage nouveau s'éloignant parfois notablement de l'intuition première, mais récompensant très largement les efforts exigés par la "catégorisation" des notions anciennes en permettant une expression épousant dans les moindres détails, avec toute la rigueur et la généralité voulues, les grandes constructions de l'algèbre et de la topologie moderne.

Les insuffisances du langage ensembliste, et la supériorité du langage des catégories, deviennent manifestes lorsqu'après la lecture des structures fondamentales de Nicolas BOURBAKI on cherche à faire entrer, dans ce cadre, des structures locales comme la structure de variété différentiable par exemple. On est alors conduit à "catégoriser" la notion d'espèce de structure définie par N. BOURBAKI, puis à définir, en termes de catégorie, comme l'a fait C. EHRESMANN, la notion de structure locale, obtenant ainsi une notion d'espèce de structure assez générale pour englober toutes les structures mathématiques actuellement connues.

1. Notion de catégorie.

Définition. - Un graphe orienté $\Gamma = (S , F , G)$ est constitué :

- par deux ensembles $S = \mathrm{ob}\,\Gamma$, $F = \mathrm{fl}\,\Gamma$ qu'on appelle respectivement ensemble des sommets de Γ ou encore ensemble des objets de Γ , et ensemble des arêtes de Γ ou encore ensemble des flèches de Γ ;

- par une relation binaire $G \subset S \times S \times F$ qui, à un couple de sommets $(A , B) \in S$, associe par coupe un sous-ensemble $G(A , B) = \Gamma_{A,B}$ qui sera dit ensemble des flèches de Γ d'origine A et d'extrémité B (ou encore de source A et de but B).

Il serait équivalent de définir Γ à partir des deux ensembles S et F et de deux applications α et β de F dans S : à savoir l'application α qui, à une flèche f , fait correspondre le sommet $\alpha(f)$ constituant l'origine de x et l'application β qui, à la flèche f , fait correspondre le sommet $\beta(f)$ constituant l'extrémité de x .

G est alors donné en fonction de α et β par

$$G(A , B) = \alpha^{-1}(A) \cap \beta^{-1}(B) \quad .$$

Réciproquement α et β sont donnés en fonction de G par

$$\alpha(f) = A \rightleftarrows f \in G(\{A\} \times S)$$

$$\beta(f) = B \rightleftarrows f \in G(S \times \{B\}) \quad .$$

(Cette définition d'un graphe orienté, à partir de deux applications α et β , généralise légèrement la définition des "Streckenkomplexe" donnée par REIDEMEISTER [13], p. 98.)

Définition. - Étant donné un graphe Γ , on appelle graphe dual de Γ , et on note Γ^0 le graphe ayant même ensemble de sommets et même ensemble de flèches et tel que

$$G^0(A , B) = G(B , A) \quad .$$

La notion classique de graphe que nous venons de définir peut se généraliser en considérant des "graphes" $\mathfrak{F}$ dont les sommets et les arêtes constituent, non plus nécessairement des ensembles, mais des classes ob $\mathfrak{F}$, fl $\mathfrak{F}$, chaque couple de sommets A , $B \in$ ob $\mathfrak{F}$ définissant un ensemble d'arêtes $\mathfrak{F}_{A,B}$. Dans ce qui suit, nous désignerons par graphes ces "graphes généralisés" réservant la dénomination de graphe ensembliste aux graphes classiques.

La notion de catégorie généralise à la fois la notion de graphe et la notion de demi-groupe. Une catégorie est en effet un graphe sur les flèches duquel on s'est donné une opération associative définie pour les couples de flèches consécutives et admettant des éléments neutres à droite et à gauche. Ainsi une famille de demi-groupes à éléments neutres est une catégorie dont le graphe (ensembliste !) est constitué uniquement de flèches singulières (c'est-à-dire de flèches dont la source est identique au but).

<u>Définition</u>. - Une <u>catégorie</u> $\mathcal{C} = (\text{ob } \mathcal{C} , \text{fl } \mathcal{C} , \top , \iota)$ est constituée

- par deux classes ob $\mathcal{C}$ et fl $\mathcal{C}$ qu'on appelle respectivement <u>classe des objets</u> de $\mathcal{C}$ et <u>classe des flèches</u> (ou <u>des jections</u>) de $\mathcal{C}$;

- par une "relation" qui, à un couple d'objets (A , B) , fait correspondre un ensemble qu'on désignera souvent par $\mathcal{C}_{A,B}$ et qui sera dit ensemble des flèches de $\mathcal{C}$ de source A et de but B (ou ce qui revient au même par deux "applications" α et β qui, à une flèche f , font correspondre respectivement sa source $\alpha(f)$ et son but $\beta(f)$);

- par une opération $\top$ qui, à tout couple de flèches $f \in \mathcal{C}_{A,B}$, $g \in \mathcal{C}_{B,C}$ tel que la source de g soit identique au but de f , fait correspondre une flèche $g \top f$ qu'on notera le plus souvent simplement $gf \in \mathcal{C}_{A,C}$ de même source que f et de même but que g , et qui n'est définie que dans ce cas. On exige que cette opération soit associative, c'est-à-dire soit telle que

$$f \in \mathcal{C}_{A,B} \quad g \in \mathcal{C}_{B,C} \quad h \in \mathcal{C}_{C,D} \longrightarrow h(gf) = (hg)f \qquad ;$$

- par une "application" ι qui, à tout objet $A \in$ ob $\mathcal{C}$, fait correspondre une flèche neutre $\iota_A \in \mathcal{C}_{A,A}$ ayant sa source et son but identiques à A . On exige de cette flèche d'être élément neutre à droite (resp. à gauche) pour les flèches ayant A comme source (resp. comme but) ; c'est-à-dire telle que

$$f \in \mathcal{C}_{A,B} \longrightarrow \iota_B f = f\iota_A = f$$

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "hg"'] & C \arrow[dr, "h"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "gf"] \arrow[rrr, "(hg)f = h(gf)"'] & & & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop above, "\iota_A"] \arrow[r, "f", "\iota_B f = f\iota_A = f"'] & B \arrow[loop above, "\iota_B"]
\end{tikzcd}$$

Il est facile de voir que les ι_A constituent les seuls éléments neutres à gauche (et aussi les seuls éléments neutres à droite).

On remarquera que $\mathcal{C}$ étant une catégorie, le graphe de $\mathcal{C}$ n'est pas quelconque : il est obligatoirement réflexif et transitif (dans un sens évident à préciser).

<u>Définition.</u> - Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, on appelle <u>catégorie duale</u> de $\mathcal{C}$, et on note $\mathcal{C}^0$, la catégorie ayant mêmes objets et mêmes flèches que $\mathcal{C}$, telle que $\mathcal{C}^0_{A,B} = \mathcal{C}_{B,A}$ et munie de la multiplication duale $\star$ définie par

$$f \star g = gf \qquad .$$

(On vérifie en effet immédiatement que l'on obtient bien ainsi une catégorie.)

2. Eléments simplifiables et invertibles.

Définition. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $\mathfrak{J}$ la classe des éléments neutres (c'est-à-dire la classe des ι_Λ lorsque Λ parcourt la classe des objets de $\mathcal{C}$).

f une flèche de $\mathcal{C}$ est dite :
"simplifiable à gauche" lorsque $fg_1 = fg_2 \to g_1 = g_2$,
"simplifiable à droite" lorsque $g_1 f = g_2 f \to g_1 = g_2$,
"simplifiable" si elle est à la fois simplifiable à gauche et à droite.

La flèche g est dite :
"inverse à gauche de f" si $gf \in \mathfrak{J}$,
"inverse à droite de f" si $fg \in \mathfrak{J}$,
"inverse de f" si elle est à la fois inverse à gauche et à droite de f.

On voit facilement que dans ce dernier cas elle est unique et on la désigne alors par f^{-1}.

On voit facilement que

$$f \text{ et } g \text{ invertibles et } gf \text{ défini} \to gf \text{ invertible et } (gf)^{-1} = f^{-1}\, g^{-1} .$$

On démontre aussi que :

f invertible à gauche (à droite) $\to f$ simplifiable à gauche (à droite),
gf simplifiable à gauche $\to f$ simplifiable à gauche,
gf simplifiable à droite $\to g$ simplifiable à droite.

Définition. - Une catégorie $\mathcal{C}$, dont tous les éléments sont invertibles, est appelée un groupoïde. Il est facile de voir que si Λ est un objet du groupoïde $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{\Lambda,\Lambda}$ est un groupe.

3. Sous-catégories, sous-groupoïdes.

Définitions. - Soit $\mathcal{C} = (\text{ob}\,\mathcal{C}, \text{fl}\,\mathcal{C}, \tau, \iota)$ une catégorie et soit $\mathfrak{F}$ une classe de flèches de $\mathcal{C}$.

On dira que $\mathfrak{F}$ est stable pour τ lorsque

$$f, g \in \mathfrak{F},\ g\,\tau\, f \text{ défini} \to g\,\tau\, f \in \mathfrak{F} .$$

On appellera alors <u>opération induite par</u> τ <u>sur</u> $\mathfrak{F}$, et on désignera par $\tau_{\mathfrak{F}}$ l'opération sur $\mathfrak{F}$ obtenue en posant $g \; \tau_{\mathfrak{F}} \; f = g \; \tau \; f$.

On dira qu'une catégorie $\mathcal{C}' = (\mathrm{ob}\, \mathcal{C}' , \mathrm{fl}\, \mathcal{C}' , \tau' , \iota')$ est une <u>sous-catégorie de</u> $\mathcal{C}$ lorsque :

- $\mathrm{ob}\, \mathcal{C}' \subset \mathrm{ob}\, \mathcal{C}$,
- $\mathrm{fl}\, \mathcal{C}' \subset \mathrm{fl}\, \mathcal{C}$,
- $\mathrm{fl}\, \mathcal{C}'$ est stable pour τ , et τ' est identique à la restriction de τ à $\mathrm{fl}\, \mathcal{C}'$,
- $\iota_A \in \mathrm{fl}\, \mathcal{C}'$, $A \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C} \to A \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}'$ $(\to \iota'_A = \iota_A$ ([1])) .

Si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, on a évidemment $\forall\; A , B \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}'$: $\mathcal{C}'_{A,B} \subset \mathcal{C}_{A,B}$ ce qui exprime que le graphe de $\mathcal{C}'$ est un sous-graphe du graphe de $\mathcal{C}$.

Une sous-catégorie $\mathcal{D}$ de la catégorie $\mathcal{C}$ est dite <u>pleine</u> lorsque le graphe de $\mathcal{D}$ est un sous-graphe plein du graphe de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire lorsque

$$A , B \in \mathrm{ob}\, \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{A,B} = \mathcal{C}_{A,B} \quad .$$

Une sous-catégorie pleine est donc entièrement définie par ses objets.

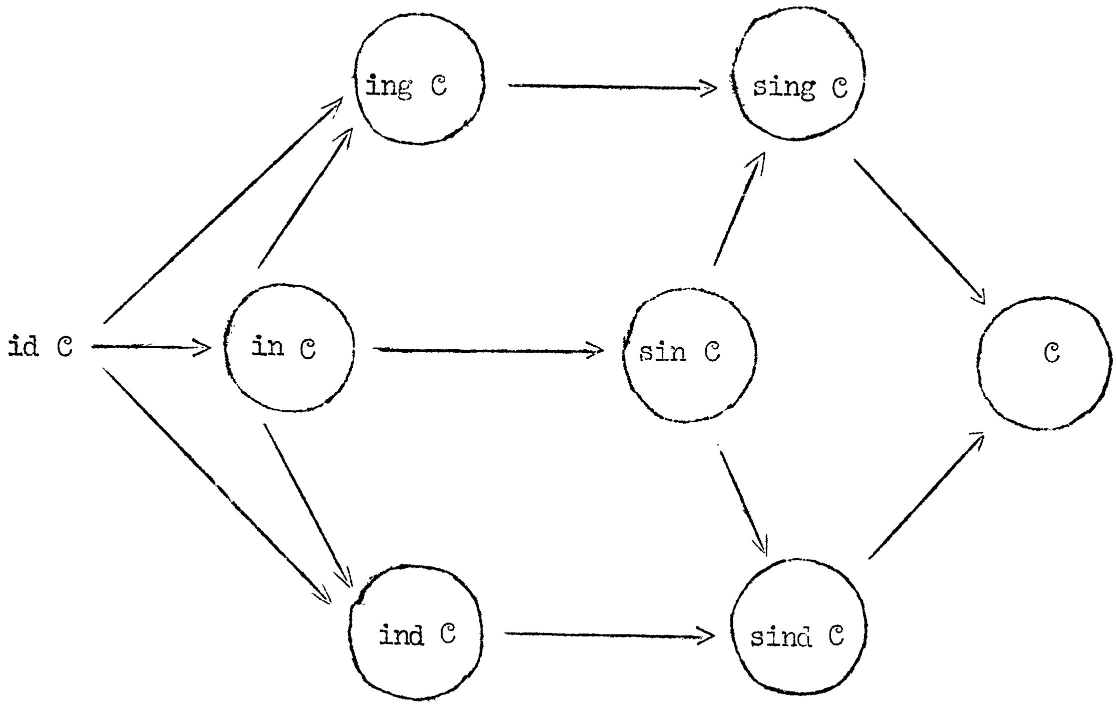
Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, une sous-catégorie $\mathcal{D}$ est appelée <u>sous-groupoïde</u> de $\mathcal{C}$ lorsque $f \in \mathcal{D} \to f$ invertible dans $\mathcal{C}$ et $f^{-1} \in \mathcal{D}$.

On remarquera que si $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ sans être un sous-groupoïde de $\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{fl}\, \mathcal{D}$ peut être invertible dans $\mathcal{C}$ sans l'être dans $\mathcal{D}$.

Il est facile de montrer que, dans une catégorie $\mathcal{C}$, les éléments simplifiables à gauche (à droite), les éléments invertibles à gauche (à droite) forment des sous-catégories que l'on notera $\mathrm{sing}\, \mathcal{C}$, $\mathrm{sind}\, \mathcal{C}$, $\mathrm{ing}\, \mathcal{C}$, $\mathrm{ind}\, \mathcal{C}$, que les éléments invertibles forment un sous-groupoïde $\mathrm{in}\, \mathcal{C}$. Les éléments neutres forment un sous-groupoïde $\mathrm{id}\, \mathcal{C}$ de $\mathrm{in}\, \mathcal{C}$.

On a ainsi le diagramme d'inclusion :

([1]) En effet ι'_A est flèche neutre dans $\mathcal{C}'$, donc $\iota'_A = \iota'_A \; \tau' \; \iota_A$. Mais ι_A est flèche neutre dans $\mathcal{C}$. Donc $\iota'_A = \iota'_A \; \tau \; \iota_A$. Mais τ' étant la restriction de τ et ι_A étant flèche de $\mathcal{C}'$ on a $\iota'_A \; \tau \; \iota_A = \iota'_A \; \tau' \; \iota_A$.



Par définition

$$\text{sin } \mathcal{C} = \text{sing } \mathcal{C} \cap \text{sind } \mathcal{C}$$

$$\text{in } \mathcal{C} = \text{ing } \mathcal{C} \cap \text{ind } \mathcal{C} \quad .$$

On montre facilement que

$$\text{in } \mathcal{C} = \text{sing } \mathcal{C} \cap \text{ind } \mathcal{C} = \text{sind } \mathcal{C} \cap \text{ing } \mathcal{C} \quad .$$

4. Catégories quotient par une équivalence forte.

Soit $\mathcal{C} = (\text{ob } \mathcal{C}\, ,\ \text{fl } \mathcal{C}\, ,\ \top\, ,\ \iota)$ une catégorie, et soit $\mathcal{R}$ une classe de couple de flèches de $\mathcal{C}$.

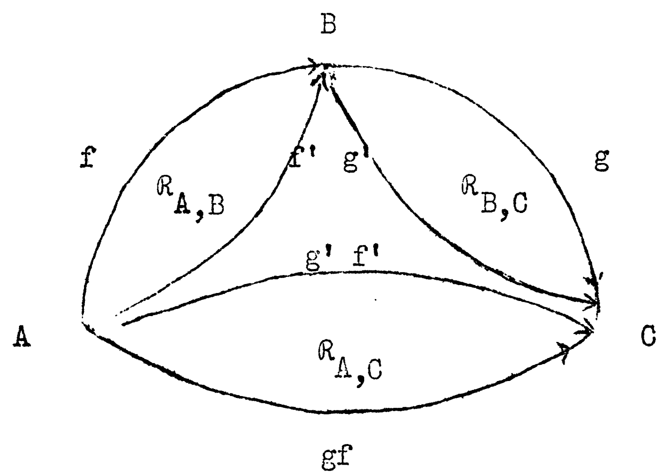
On dit que $\mathcal{R}$ est une relation de congruence forte [2] de $\mathcal{C}$ lorsque $\mathcal{R}$ fait

---

[2] C'est ce que H. CARTAN et S. EILENBERG considèrent dans [3] sous le nom de relation de congruence.

correspondre à tout couple d'objets A , B de $\mathcal{C}$ une relation d'équivalence $\mathcal{R}_{A,B}$ sur l'ensemble $\mathcal{C}_{A,B}$ telle que

$$\left.\begin{array}{l}(f\ ,\ f') \in \mathcal{R}_{A,B}\\ (g\ ,\ g') \in \mathcal{R}_{B,C}\end{array}\right\} \longrightarrow (gf\ ,\ g'\,f') \in \mathcal{R}_{A,C} \quad .$$



Considérons $\mathcal{C}' = (\mathrm{ob}\,\mathcal{C}'\ ,\ \mathrm{fl}\,\mathcal{C}'\ ,\ \tau'\ ,\ \iota')$ définie par les conditions suivantes :

- $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}' = \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$,
- Si A , $B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ on pose $\mathcal{C}'_{A,B} = \dfrac{\mathcal{C}_{A,B}}{\mathcal{R}_{A,B}}$,
- τ' est l'opération quotient de l'opération τ par l'équivalence $\mathcal{R}$ qui au couple de flèches $f' \in \mathcal{C}'_{A,B}$, $g' \in \mathcal{C}'_{B,C}$ fait correspondre la flèche $g'\,\tau\,f'$ définie par l'égalité

$$\mathcal{R}_{B',C'}(g)\ \tau'\ \mathcal{R}_{A',B'}(f) = \mathcal{R}_{A',C'}(g\,\tau\,f) \qquad ,$$

- ι' est l'application de $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}'$ dans $\mathrm{fl}\,\mathcal{C}'$ qui, à $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, fait correspondre la flèche de $\mathcal{C}'$ ι'_A définie par $\iota'_A = \mathcal{R}_{A,A}(\iota_A)$.

On montre alors que $\mathcal{C}'$ est une catégorie qu'on appellera <u>catégorie quotient de</u> $\mathcal{C}$ <u>pour la congruence forte</u> $\mathcal{R}$ et qu'on notera $\mathcal{R}/\mathcal{C}$.

5. Catégories quotient.

Nous allons maintenant généraliser les notions précédentes.

Soit $\mathcal{C} = (\text{ob } \mathcal{C}\ , \text{fl } \mathcal{C}\ , \tau\ , \iota)$ une catégorie et soit $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_{fl}\ , \mathcal{R}_{ob})$ où $\mathcal{R}_{ob}$ est une relation binaire sur ob $\mathcal{C}$ et où $\mathcal{R}_{fl}$ est une "relation"

$$\mathcal{R}_{fl} \subset (\text{ob } \mathcal{C} \times \text{ob } \mathcal{C} \times \text{ob } \mathcal{C} \times \text{ob } \mathcal{C}) \times (\text{fl } \mathcal{C} \times \text{fl } \mathcal{C})$$

qui, à tout quadruple $(A\ , B\ , A'\ , B')$ d'objets de $\mathcal{C}$ tel que

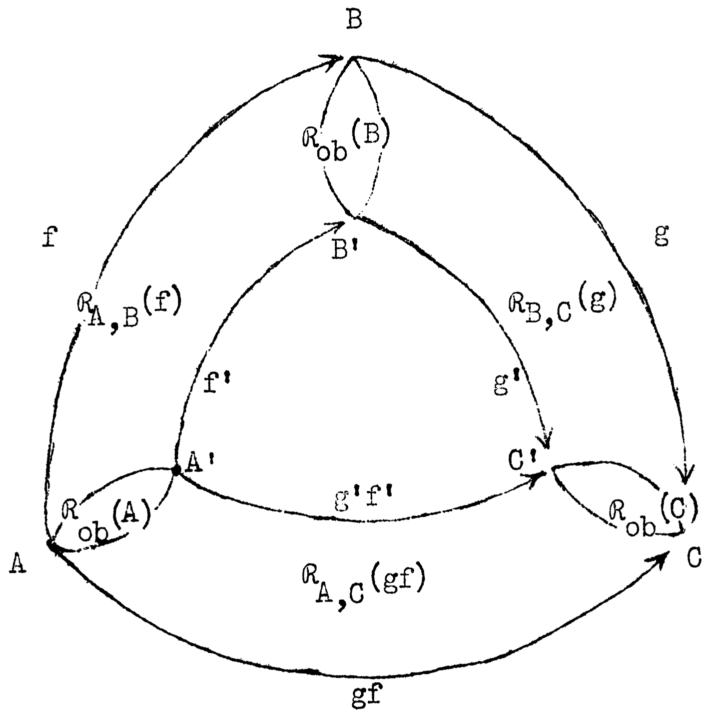
$$(A\ , A') \in \mathcal{R}_{ob} \quad \text{et} \quad (B\ , B') \in \mathcal{R}_{ob} \qquad ,$$

fait correspondre par coupe une relation binaire que l'on notera

$$\mathcal{R}_{A,B,A',B'} \subset \mathcal{C}_{A,B} \times \mathcal{C}_{A,B}$$

telle que

- $\mathcal{R}_{A,B,A,B} \supset \Delta_{\mathcal{C}_{A,B}}$ (en d'autres termes $f \in \mathcal{C}_{A,B} \rightarrow (f\ , f) \in \mathcal{R}_{A,B}$),
- $\mathcal{R}^{-1}_{A,B,A',B'} = \mathcal{R}_{A',B',A,B}$ (en d'autres termes $(f\ , f') \in \mathcal{R}_{A,BA'B'}$ $\rightarrow (f'\ , f) \in \mathcal{R}_{AB,A'B'}$),
- $\mathcal{R}_{A',B',A'',B''}\ \mathcal{R}_{A,B,A',B'} \subset \mathcal{R}_{A,B,A'',B''}$ (en d'autres termes $(f\ , f') \in \mathcal{R}_{ABA'B'}$ et $(f'\ , f'') \in \mathcal{R}_{A',B',A'',B''} \rightarrow (f\ , f'') \in \mathcal{R}_{A,B,A'',B''}$),
- $(f\ , f') \in \mathcal{R}_{A,B,A',B'}$ et $(f'\ , f'') \in \mathcal{R}_{B,C,B'C'} \rightarrow (f\ , f'') \in \mathcal{R}_{A,C,A',C'}$,



$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dash, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{R}_{ABA'B'}"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dash, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{R}_{BCB'C'}"] & C \arrow[d, dash, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{R}_{ACA'C'}"] & A \arrow[l, "gf"'] \arrow[d, dash, dashed] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, dash, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{R}_{A'B'A''B''}"] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, dash, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{R}_{B'C'B''C''}"] & C' \arrow[d, dash, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{R}_{A'C'A''C''}"] & A' \arrow[l, "g'f'"'] \arrow[d, dash, dashed] \\
A'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d, dash, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{R}_{ABA''B''}"] & B'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, dash, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{R}_{BCB''C''}"] & C'' \arrow[d, dash] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{R}_{ACA''C''}"] & A'' \arrow[l, "g''f''"'] \arrow[d, dash, dashed] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C & A \arrow[l, "gf"']
\end{tikzcd}$$

On dira dans ces conditions que $\mathcal{R}$ est une relation de congruence sur $\mathcal{C}$.

On dira que $\mathcal{R}$ conserve les sommets lorsque $\mathcal{R}_{ob} = \Delta_{ob\,\mathcal{C}}$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation de congruence sur $\mathcal{C} = (\text{ob}\ \mathcal{C}\ ,\ \text{fl}\ \mathcal{C}\ ,\ \top\ ,\ \iota)$.

Considérons $\mathcal{C}' = (\text{ob}\ \mathcal{C}'\ ,\ \text{fl}\ \mathcal{C}'\ ,\ \top'\ ,\ \iota')$ définie pour les conditions suivantes :

- $\text{ob}\ \mathcal{C}' = \dfrac{\text{ob}\ \mathcal{C}}{\mathcal{R}_{\text{ob}}}$,

- si $A'\ ,\ B' \in \text{ob}\ \mathcal{C}'$,

$$\mathcal{C}'_{A',B'} = \frac{\mathcal{C}_{A',B'}}{\mathcal{R}_{A',B'}} \quad \text{où} \quad \mathcal{C}_{A',B'} = \bigcup_{\substack{X \in A' \\ Y \in B'}} \mathcal{C}_{X,Y}$$

et où $\mathcal{R}_{A',B'}$ est l'équivalence sur $\mathcal{C}_{A',B'}$ définie par

$$\mathcal{R}_{A',B'} = \bigcup_{\substack{X,Z \in A' \\ Y,T \in B'}} \mathcal{R}_{X,Y,Z,T} \qquad ,$$

- $\top'$ est l'opération quotient de l'opération $\top$ par l'équivalence $\mathcal{R}$ qui, au couple de flèches $f' \in \mathcal{C}'_{A',B'}$, $g' \in \mathcal{C}'_{B',C'}$, fait correspondre la flèche $g'\ \top'\ f' \in \mathcal{C}'_{A',C'}$ définie par l'égalité

$$\mathcal{R}_{B',C'}(g)\ \top'\ \mathcal{R}_{A',B'}(f) = \mathcal{R}_{A',C'}(g\ \top\ f) \qquad ,$$

si $f \in \mathcal{C}_{X,Y}$ et $g \in \mathcal{C}_{Z,T}$ sont des flèches de $\mathcal{C}$ (où $X \in A'$, $Y\ ,\ Z \in B'$, $T \in C'$) telles que $f' = \mathcal{R}_{A',B'}(f)$ et $g' = \mathcal{R}_{B',C'}(g)$,

- ι' est l'application de $\text{ob}\ \mathcal{C}'$ dans $\text{fl}\ \mathcal{C}'$ qui, à $A' \in \text{ob}\ \mathcal{C}'$, fait correspondre la flèche de $\mathcal{C}'$: $\iota'_{A'}$ définie par

$$\iota'_{A'} = \mathcal{R}_{A',A'}(\iota_A) \quad \text{si} \quad A \in \text{ob}\ \mathcal{C} \quad \text{tel que} \quad A' = \mathcal{R}_{\text{ob}}(A) \qquad .$$

On montre alors que $\mathcal{C}'$ est une catégorie qu'on appellera <u>catégorie quotient</u> de $\mathcal{C}$ par la congruence $\mathcal{R}$ et qu'on notera $\mathcal{R}/\mathcal{C}$.

6. Trois exemples fondamentaux.

1er exemple. - Soient E un ensemble et $\Omega \subset E \times E$ une relation de préordre entre éléments de E. On appellera catégorie associée au préordre Ω, et on désignera par $\overline{\Omega}$ la catégorie telle que

- $\mathrm{ob}\,\overline{\Omega} = E$,
- $\mathrm{fl}\,\overline{\Omega} = \Omega$,
- $\overline{\Omega}_{A,B} = \{(A\ ,\ B)\}$ si A et B sont deux éléments de E tels que $(A\ ,\ B) \in \Omega$
- la multiplication est définie par $f = (A\ ,\ B)\ ,\quad g = (B\ ,\ C) \to gf = (A\ ,\ C)$,
- $\iota_A = (A\ ,\ A)$.

Si on désigne par Δ le préordre particulier constitué par la diagonale de E, le sous-groupoïde des éléments neutres de $\overline{\Omega}$ est identique à $\overline{\Delta}$.

La catégorie $\overline{\Omega \cap \Omega^{-1}}$ associée à la relation d'équivalence $\Omega \cap \Omega^{-1}$ constitue le sous-groupoïde des éléments invertibles de $\overline{\Omega}$.

2e exemple. - On désignera par $\underline{\mathrm{Ens}}$ la catégorie des ensembles, c'est-à-dire la catégorie telle que

- ob $\underline{\mathrm{Ens}}$ est la classe de tous les ensembles,
- $\underline{\mathrm{Ens}}_{A,B}$ = ensemble des applications de l'ensemble A dans l'ensemble B c'est-à-dire ensemble des triples $(A\ ,\ \Sigma\ ,\ B)$ où $\Sigma \subset A \times B$ est une relation fonctionnelle (autrement dit une relation telle que $\forall\ x \in A\ ,\ \Sigma(x)$ est réduit à 1 élément),
- la multiplication est définie par

$$f = (A\ ,\ \Sigma\ ,\ B)\ ,\quad g = (B\ ,\ \Sigma'\ ,\ C) \to gf = (A\ ,\ \Sigma' \circ \Sigma\ ,\ C)$$

où $\circ$ désigne la composition des relations binaires,

- $\iota_A = \underline{1}_A$ application identique de A sur A (c'est-à-dire $(A\ ,\ \Delta_A\ ,\ A)$).

Une application est dite injective ou injection, si elle est de la forme $(A\ ,\ \Sigma\ ,\ F)$ où Σ est une relation biunivoque.

Une application est dite surjective ou surjection, si elle est de la forme $(A\ ,\ \Sigma\ ,\ F)$ où $\Sigma(A) = F$.

Une application est dite bijective ou <u>bijection</u>, si elle est à la fois injective et surjective.

On démontre qu'étant donnée la flèche f de la catégorie $\underline{\mathrm{Ens}}$:

f est simplifiable à gauche $\rightleftarrows f$ invertible à gauche $\rightleftarrows f$ application injective

f est simplifiable à droite $\rightleftarrows f$ invertible à droite $\rightleftarrows f$ application surjective

f est simplifiable $\rightleftarrows f$ invertible $\rightleftarrows f$ application bijective .

Les injections (resp. les surjections) constituent donc une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Ens}}$ que l'on notera $\underline{\mathrm{inj\ Ens}}$ (resp. $\underline{\mathrm{srj\ Ens}}$). Les bijections constituent un sous-groupoïde de $\underline{\mathrm{Ens}}$ que l'on notera $\underline{\mathrm{bij\ Ens}}$. On a évidemment

$$\underline{\mathrm{bij\ Ens}} = \underline{\mathrm{inj\ Ens}} \cap \underline{\mathrm{srj\ Ens}} \quad .$$

Bien que le produit de deux applications constantes soit une application constante, les applications constantes ne forment pas une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Ens}}$, puisque l'application identique n'est pas constante en général. Rappelons que si A et B sont deux ensembles tels que A soit un sous-ensemble de B , on appelle <u>injection canonique de</u> A <u>dans</u> B l'application

$$\underset{\sim}{1}_{A,B} = (A\ , \Delta_A\ , B) \quad .$$

On a évidemment $\underset{\sim}{1}_{A,A} = \underset{\sim}{1}_A$, et si $A \subset B \subset C$,

$$\underset{\sim}{1}_{B,C}\, \underset{\sim}{1}_{A,B} = \underset{\sim}{1}_{A,C} \quad .$$

Ceci prouve que les injections identiques forment une sous-catégorie de la catégorie $\underline{\mathrm{Ens}}$ que l'on désignera par $\underline{\mathrm{injss\ Ens}}$.

Rappelons par ailleurs que si $f = (A\ , \Sigma\ , B)$ est une application de A dans B , la coupe $\Sigma(A)$ de Σ par A se désigne par $\mathrm{im}\, f$ et s'appelle <u>l'image</u> de f .

La surjection $(A\ , \Sigma\ , \mathrm{im}\, f)$ se dénote $\bar{f}$ et on voit immédiatement que toute application f de A dans B se factorise de manière unique en produit de l'injection canonique de $\mathrm{im}\, f$ dans B par la surjection $\bar{f}$:

$$f = \underset{\sim}{1}_{\mathrm{im}f,B}\ \bar{f}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{im}\, f \arrow[dr, "\underset{\sim}{1}_{\mathrm{im}f,B}"] & \\ A \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

Soient X un sous-ensemble de A et f une application de A dans B.

On appelle <u>restriction de</u> f <u>à</u> X, et on note $f|_A$ l'application de X dans B :

$$f|_X = f \cdot \underset{\sim}{1}_{X,A}$$

$$\begin{tikzcd} & & B \\ X \arrow[urr, "f|_X"] \arrow[rr, "\underset{\sim}{1}_{X,A}"'] & & A \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble A. On appelle <u>surjection canonique</u> associée à R l'application j_R de A dans $\frac{A}{R}$ qui, à $x \in A$, fait correspondre sa classe $j_R(x) = R(x)$.

Étant donnée une application f de A dans B, on dit que f <u>est compatible avec</u> R lorsque f est constante sur les classes de R. Dans ce cas, on peut alors définir le <u>quotient de</u> f <u>par</u> R comme étant l'application $\frac{f}{R}$ de $\frac{A}{R}$ dans B qui, à la classe $R(x)$, fait correspondre $f(x)$: $\frac{f}{R}(R(x)) = f(x)$.
On voit immédiatement qu'étant donnée une relation d'équivalence R sur A compatible avec l'application f de A dans B, f se factorise de manière unique en le produit du quotient de f par R par la surjection canonique associée à R :

$$f = \frac{f}{R}\, j_R$$

$$\begin{tikzcd} & \frac{A}{R} \arrow[dr, "\frac{f}{R}"] & \\ A \arrow[ur, "j_R"] \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

En particulier si on considère l'équivalence $R = f^{-1} f$, elle est évidemment toujours compatible avec f. On appelle <u>co-image</u> de f l'ensemble $\frac{A}{f^{-1} f}$.
L'injection $\frac{f}{f^{-1} f}$ se dénote $\ddot{f}$.

On voit immédiatement que toute application f de A dans B se factorise de manière unique en produit de la surjection canonique de A sur $\operatorname{coim} f$ par l'injection $\ddot{f}$.

On a

$$\operatorname{im} \bar{f} = \operatorname{im} \ddot{f} = \operatorname{im} f$$

$$\operatorname{coim} \bar{f} = \operatorname{coim} f$$

$$\operatorname{coim} \ddot{f} = \frac{A}{\Delta}$$

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coim} f \arrow[dr, "\ddot{f}"] & \\
A \arrow[ur, "j_{f^{-1} f}"] \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

$\bar{\ddot{f}}$ est une bijection (dite canonique) de $\operatorname{coim} f$ sur $\operatorname{im} f$.

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{im} f \arrow[dr, "\underset{\sim}{1}_{\operatorname{im} f, B}"] & \\
A \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j_{f^{-1} f}"'] & & B \\
& \operatorname{coim} f \arrow[uu, bend right, "\bar{\ddot{f}}"'] \arrow[ur, "\ddot{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi donc toute application f de A dans B se factorise en produit de la surjection canonique de A sur $\operatorname{coim} f$ par la bijection canonique de $\operatorname{coim} f$ sur $\operatorname{im} f$ par l'injection canonique de $\operatorname{im} f$ dans B :

$$f = \underset{\sim}{1}_{\mathrm{imf},B}\, \ddot{\bar{f}}\, j_{f^{-1}f}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_{f^{-1}f}"'] & B \\
\bar{A} \arrow[r, "\ddot{\bar{f}}"'] & \bar{B} \arrow[u, "\underset{\sim}{1}_{\mathrm{imf},B}"']
\end{tikzcd}$$

Plus généralement considérons une relation d'équivalence R sur A, une relation d'équivalence S sur B et une application f de A dans B.

On dit que f <u>est compatible avec</u> (R, S) lorsque $j_S\, f$ est compatible avec R. Dans ce cas on peut alors définir le quotient de f par (R, S) comme étant l'application $\frac{f}{(R, S)}$ de $\frac{A}{R}$ dans $\frac{B}{S}$ qui, à la classe $R(x)$, fait correspondre la classe $Sf(x)$

$$\frac{f}{(R, S)}(R(x)) = Sf(x) \quad .$$

On voit immédiatement que l'on a :

$$j_S\, f = \frac{f}{(R, S)}\, j_R$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_R"'] & B \arrow[d, "j_S"] \\
\frac{A}{R} \arrow[r, "\frac{f}{(R, S)}"'] & \frac{B}{S}
\end{tikzcd}$$

On montre facilement que si A, B, C sont des ensembles, sur lesquels sont données respectivement les trois équivalences R, S, T, f une application de A dans B compatible avec (R, S), et g une application de B dans C compatible avec (S, T), alors gf est compatible avec (R, T) et

$$\frac{gf}{(R\ ,\ T)} = \frac{g}{(S\ ,\ T)}\ \frac{f}{(R\ ,\ S)}$$

Si f est une application de A dans B, R une équivalence sur A et S une équivalence sur B, on a

f compatible avec R $\rightleftarrows$ f compatible avec $(R\ ,\ \Delta)$

$\longrightarrow$ f compatible avec $(R\ ,\ S)$

$\longrightarrow$ $j_S\, f$ compatible avec $(R\ ,\ S)$

$$\longrightarrow \quad \frac{f}{R\ ,\ S} = j_S\left(\frac{f}{R}\right) = \frac{g_S\ f}{R\ ,\ S}$$

f compatible avec $(R\ ,\ S)$ et f surjective $\rightarrow \dfrac{f}{R\ ,\ S}$ surjective

f compatible avec $(R\ ,\ S)$ et f bijective $\rightarrow \dfrac{f}{R\ ,\ S}$ bijective

$$\text{et} \quad \left(\frac{f}{R\ ,\ S}\right)^{-1} = \frac{f^{-1}}{S\ ,\ R}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\text{injss Ens}} \arrow[rr] & & \underline{\text{inj Ens}} \arrow[dr] & \\
\underline{\text{id Ens}} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \underline{\text{bij Ens}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \underline{\text{Ens}} \\
 & & & \underline{\text{srj Ens}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

<u>3e exemple</u>. - On désignera par <u>Top</u> la catégorie des espaces topologiques, c'est-à-dire la catégorie telle que

- ob <u>Top</u> est la classe de tous les espaces topologiques c'est-à-dire de tous les couples $(A, \mathfrak{A})$ ou $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))$ tel que

1° $$\emptyset, A \in \mathfrak{A}$$

2° $$X, Y \in \mathfrak{A} \rightarrow X \cap Y \in \mathfrak{A} \quad ,$$

3° $$\mathfrak{X} \subset \mathfrak{A} \rightarrow \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} X \in \mathfrak{A} \quad ,$$

- $\underline{\mathrm{Top}}_{(A,\mathfrak{A}),(B,\mathfrak{B})}$ est l'ensemble de tous les triples $(\mathfrak{A}, f, \mathfrak{B})$ où f est une application continue de l'espace $(A, \mathfrak{A})$ dans l'espace $(B, \mathfrak{B})$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les applications f de A dans B telles que $\forall\ Y \in \mathfrak{B},\ f^{-1}(Y) \in \mathfrak{A}$,

- la multiplication est définie par $(\mathfrak{B}, g, \mathfrak{C})(\mathfrak{A}, f, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, gf, \mathfrak{C})$,

- $\iota_{(A, \mathfrak{A})} = (\mathfrak{A}, 1_A, \mathfrak{A})$.

Le groupoïde des éléments invertibles de <u>Top</u> est évidemment constitué par tous les homéomorphismes.

Soit $(A, \mathfrak{A})$ un espace topologique. On appellera <u>catégorie des ouverts de</u> A et on notera <u>ouv A</u> la sous-catégorie de <u>Top</u> définie par les conditions suivantes :

- $\mathrm{ob}(\underline{\mathrm{ouv}\ A}) = \mathfrak{A}$,

- $(\underline{\mathrm{ouv}\ A})_{U,V}$ = ensemble des applications continues de U dans V, U et V étant munies des topologies induites,

- la multiplication est la multiplication induite par celle de <u>Top</u>,

- les flèches identiques sont les applications identiques.

7. Homomorphismes de graphes.

Soient Γ et Γ' deux graphes orientés, et soit $T = (T_{ob}, T_{fl})$ un couple d'applications, T_{ob} faisant correspondre à tout sommet A de Γ un sommet $T_{ob}(A)$ de Γ' (qu'on notera toujours $T(A)$ par abus de langage), T_{fl} faisant correspondre à toute arête f de Γ une arête $T_{fl}(f)$ de Γ' (qu'on notera toujours $T(f)$ par abus de langage).

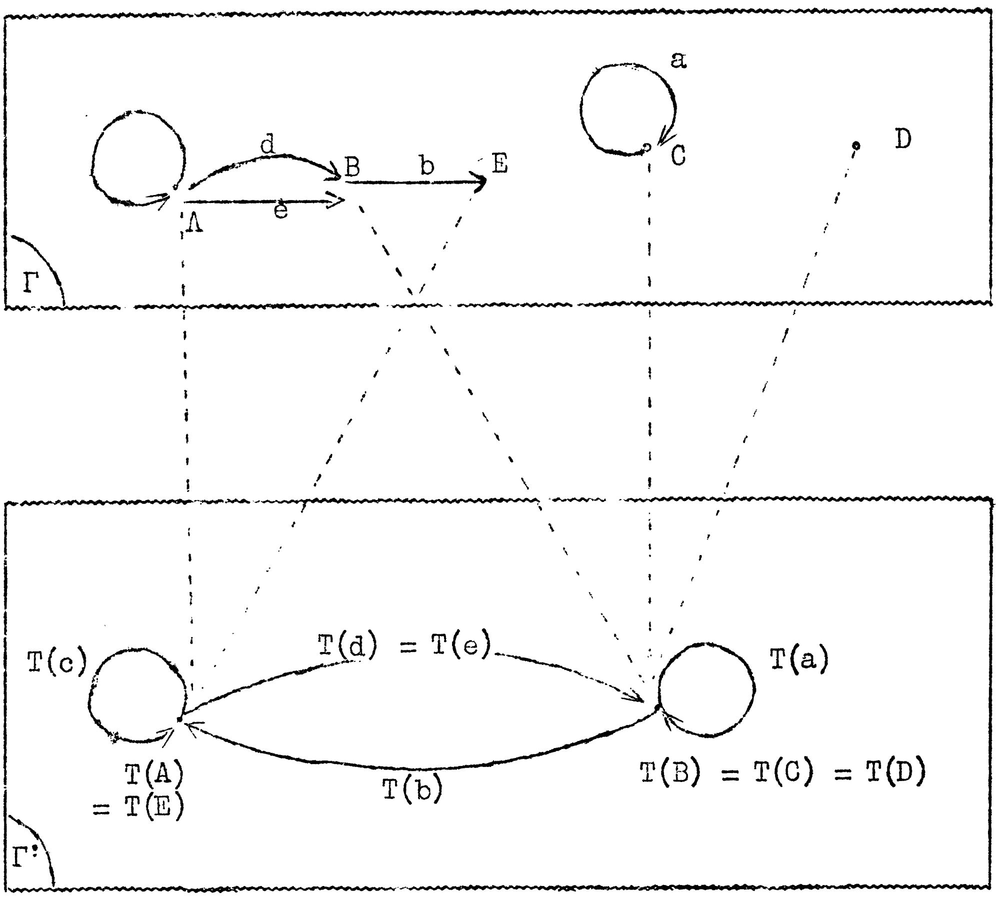
Définition. – On dira que T est un homomorphisme du graphe Γ dans le graphe Γ' et on écrira $T \in \hom(\Gamma , \Gamma')$, lorsque T "respecte l'incidence des arêtes avec les sommets", autrement dit lorsque

$$T(\Gamma_{A,B}) \subset \Gamma'_{T(A),T(B)} \quad .$$

Si α et β sont les applications faisant correspondre à une flèche de Γ sa source et son but, et si α', β' sont les applications analogues pour Γ', T est un homomorphisme de Γ dans Λ si et seulement si

$$\alpha' \, T_{fl} = T_{ob}\, \alpha \quad \text{et} \quad \beta' \, T_{fl} = T_{ob}\, \beta \quad .$$

Exemple :



Cette notion si naturelle d'homomorphisme de graphes se généralise facilement aux catégories : il suffit évidemment d'exiger que T "conserve la multiplication et les éléments neutres". Mais il est d'usage de parler de foncteurs plutôt que d'homomorphismes de catégories.

8. Foncteurs.

Soient $\mathcal{C} = (\text{ob}\ \mathcal{C}\ ,\ \text{fl}\ \mathcal{C}\ ,\ \top\ ,\ \iota)$ et $\mathcal{C}' = (\text{ob}\ \mathcal{C}'\ ,\ \text{fl}\ \mathcal{C}'\ ,\ \top'\ ,\ \iota')$ deux catégories et $T = (T_{ob}\ ,\ T_{fl})$ un couple d'"applications", T_{ob} faisant correspondre à tout objet A de $\mathcal{C}$ un objet $T_{ob}(A)$ de $\mathcal{C}'$ (qu'on notera toujours $T(A)$ par abus de langage), T_{fl} faisant correspondre à toute flèche f de $\mathcal{C}$ une flèche $T_{fl}(f)$ de $\mathcal{C}'$ (qu'on notera toujours $T(f)$ par abus de langage).

Définition. – On dira que T est un foncteur covariant (ou simplement un foncteur) de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, et on écrira $T \in \text{hom}(\mathcal{C}\ ,\ \mathcal{C}')$ lorsque

– $f\ ,\ g \in \text{fl}\ \mathcal{C}\ ,\ \ g \top f$ défini $\rightarrow T(g) \top' T(f)$ définis et $T(g) \top' T(f) = T(g \top f)$

– $A \in \text{ob}\ \mathcal{C} \rightarrow T(\iota_A) = \iota'_{T(A)}$.

(La première condition implique évidemment que T est un homomorphisme de "graphe" c'est-à-dire que $T(\mathcal{C}_{A,B}) \subset \mathcal{C}'_{T(A),T(B)}$.)

On dira que T est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ lorsque $T \in \text{hom}(\mathcal{C}^0\ ,\ \mathcal{C}')$ c'est-à-dire lorsque T est un foncteur covariant de la catégorie duale de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$.

Un foncteur étant une "application" d'une catégorie dans une autre, on peut appliquer aux foncteurs la plupart des qualificatifs usuels propres aux applications. C'est ainsi qu'on appelle foncteur identité de la catégorie $\mathcal{C}$ sur elle-même, et qu'on désigne par $\underset{\sim}{I}_{\mathcal{C}}$ le foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ qui, à tout objet A de $\mathcal{C}$, fait correspondre $T(A) = A$ et à toute flèche f la flèche $T(f) = f$.

Un foncteur T de la catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie $\mathcal{D}$ sera dit injectif s'il est injectif sur les flèches c'est-à-dire si f et f' étant deux flèches de $\mathcal{C}$

$$T(f) = T(f') \rightarrow f = f' \quad .$$

(Cela implique qu'il est injectif sur les objets c'est-à-dire

$$T(A) = T(A') \rightarrow A = A' \quad .)$$

T sera dit <u>surjectif</u> s'il est surjectif sur les flèches c'est-à-dire si, pour toute flèche g de $\mathbb{D}$, il existe une flèche f de $\mathbb{C}$ telle que $g = T(f)$. (Cela implique qu'il est surjectif sur les objets c'est-à-dire que, pour tout $B \in \text{ob } \mathbb{D}$, il existe $A \in \text{ob } \mathbb{C}$ tel que $T(A) = B$.)

T sera dit <u>bijectif</u> s'il est à la fois injectif et surjectif.

Si $\mathbb{D}$ est une sous-catégorie de $\mathbb{C}$, on peut définir le foncteur injection de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$ que l'on notera $\underset{\sim}{I}_{\mathbb{D},\mathbb{C}}$ qui, à tout objet A de $\mathbb{D}$, fait correspondre $T(A) = A$ et à toute flèche f de $\mathbb{D}$ la flèche $T(f) = f$. On a évidemment $\underset{\sim}{I}_{\mathbb{C},\mathbb{C}} = \underset{\sim}{I}_{\mathbb{C}}$.

Si $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}'$, $\mathbb{C}''$ sont trois catégories, et si S est un foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}'$ et T un foncteur de $\mathbb{C}'$ vers $\mathbb{C}''$, on définira le <u>foncteur composé</u> TS comme étant le foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}''$ qui, à $A \in \text{ob } \mathbb{C}$ fait correspondre $(TS)(A) = T(S(A))$ et qui, à $f \in \text{fl } \mathbb{C}$, fait correspondre $(TS)(f) = T(S(f))$.

Si $\mathbb{D}$ est une sous-catégorie de $\mathbb{C}$ et si T est un foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}'$ on appelle <u>restriction de</u> T <u>à</u> $\mathbb{D}$, et on note $T|_{\mathbb{D}}$ le foncteur de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{C}'$ défini par

$$T|_{\mathbb{D}} = T\underset{\sim}{I}_{\mathbb{D},\mathbb{C}} .$$

Si T est un foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$, on appelle <u>image de</u> T, et on désigne par $T(\mathbb{C})$, la sous-catégorie de $\mathbb{D}$ dont la classes des objets est la classe des $T(A)$ où A parcourt les objets de $\mathbb{C}$ et dont la classe des flèches est la classe des $T(f)$ où f parcourt les flèches de $\mathbb{C}$.

On pourrait développer des considérations sur les foncteurs compatibles avec une congruence et les foncteurs quotients par une congruence en prenant pour modèle ce que nous savons déjà pour les applications. Nous ne développerons pas ici ces considérations.

Si T est un foncteur de la catégorie $\mathbb{C}$ vers la catégorie $\mathbb{D}$, $T(\text{id } \mathbb{C})$ est évidemment un sous-groupoïde de $\text{id } \mathbb{D}$. Si f est une flèche invertible de $\mathbb{C}$, $T(f)$ est une flèche invertible de $\mathbb{D}$ et $T(f)^{-1} = T(f^{-1})$. On en déduit que $T(\text{in } \mathbb{C})$ est un sous-groupoïde de $\text{in } \mathbb{D}$.

On dit qu'un foncteur T de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$ est <u>fidèle</u> lorsque

$$f\ ,\ g \in \mathbb{C}_{A,B} \text{ et } T(f) = T(g) \rightarrow f = g$$

et lorsque

$$f \text{ flèche invertible et } T(f) \text{ flèche identité } \rightarrow f \text{ flèche identité } .$$

Un foncteur injectif est évidemment fidèle.

On dit qu'un foncteur T de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$ est <u>pleinement fidèle</u> lorsque

$$f\ ,\ g \in \mathbb{C}_{A,B} \text{ et } T(f) = T(g) \rightarrow f = g$$

et lorsque

$$h \in \mathbb{C}_{T(A),T(B)} \rightarrow \exists\ f \in \mathbb{C}_{A,B} \qquad h = T(f) \qquad .$$

Un foncteur pleinement fidèle est fidèle.

Un foncteur bijectif est évidemment pleinement fidèle.

Si T est pleinement fidèle, $T(\mathbb{C})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$.

9. Transformations naturelles et catégorie hom .

Soient $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ deux catégories, et soient $S \in \hom(\mathbb{C}, \mathbb{D})$, $T \in \hom(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ et soit τ une "application" de ob $\mathbb{C}$ dans fl $\mathbb{D}$.

On dira que τ est une <u>transformation naturelle de</u> S <u>vers</u> T lorsque pour toute flèche $f \in \mathbb{C}_{A,B}$ on a

$$T(f)\ \tau_A = \tau_B\ S(f)$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d, dashed, "\tau"'] & S(A) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "\tau_A"'] & S(B) \arrow[d, "\tau_B"] \\
T & T(A) \arrow[r, "T(f)"'] & T(B)
\end{tikzcd}$$

Soient $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ deux catégories. On appellera <u>catégorie des foncteurs de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$</u>, et on désignera par $\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ la catégorie définie par les conditions suivantes :

- ob $\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{C}, \mathbb{D}) = \mathrm{hom}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ (c'est-à-dire les objets de la catégorie sont les foncteurs de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$),

- si S et T sont deux foncteurs de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$, $\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{C}, \mathbb{D})_{S,T}$ est composé de toutes les transformations naturelles de S vers T,

- si $\sigma \in \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{C}, \mathbb{D})_{S,T}$ et $\tau \in \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{C}, \mathbb{D})_{T,U}$, le produit de ces deux flèches est la transformation naturelle $\tau\sigma$ définie par $(\tau\sigma)_A = \tau_A\, \sigma_A$ ($\tau_A\, \sigma_A$ étant le produit de deux flèches de la catégorie $\mathbb{D}$). On appelle $\tau\sigma$ le <u>produit longitudinal</u> de σ et τ.

- Si S est un foncteur de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{D}$, la flèche neutre de l'objet S dans $\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$, qu'on désignera par $\underset{\sim}{\iota}_S$, est la transformation naturelle identique de S c'est-à-dire la transformation naturelle de S vers S telle que $(\underset{\sim}{\iota}_S)_A = \iota_{S(A)}$.

10. Un exemple important de foncteur.

<u>Définition</u>. - Soient B une space topologique et $\mathbb{C}$ une catégorie. On appelle <u>préfaisceau</u> de base B à valeurs dans $\mathbb{C}$ tout foncteur $F \in \mathrm{hom}(\mathrm{ouv}\, B^0, \mathbb{C})$.

On appelle <u>catégorie des préfaisceaux de base</u> B <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{C}$ la catégorie $\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{ouv}\, B^0, \mathbb{C})$.

Définition. - Soit F un préfaisceau de base B à valeurs dans Ens . On dit que F est un faisceau lorsqu'il satisfait au principe de recollement des morceaux : $\forall\ U_i$ famille d'ouverts de B, $\forall\ s_i \in F(U_i)$ famille cohérente, c'est-à-dire telle que

$$\forall\ i\ ,\ j\ ,\quad F(\underset{\sim}{1}_{U_i \cap U_j, U_i})(s_i) = F(\underset{\sim}{1}_{U_i \cap U_j, U_j})(s_j)\ ,$$

$$\exists\ !\ \ s \in F(\bigcup_{i\in I} U_i)\ \text{ tel que }\ s_i = F(\underset{\sim}{1}_{U_i, \bigcup_{i\in I} U_i})(s)\ .$$

(On dit que s est l'agrégat ou le recollement des s_i .)

Nous allons maintenant exposer la notion d'espèce de structure et d'espèce de structures avec morphismes en traduisant en termes de catégories les idées essentielles du chapitre 5 de la Théorie des ensembles de BOURBAKI. Afin de faire entrer dans le cadre des catégories ces idées, on est conduit "par la force des choses" à les généraliser quelque peu, retrouvant ainsi une présentation de la notion de structure assez voisine de celle proposée par EHRESMANN dans [7].

On dit que S est une espèce de structures lorsque S est un foncteur du groupoïde bij Ens en lui-même.

Si $s \in S(E)$, on dit que s est une structure d'espèce S sur l'ensemble E . (Pratiquement le foncteur S est donné par une échelle d'ensembles construite à partir des foncteurs $\mathfrak{P}$ et des foncteurs X et par un système d'axiomes σ qui, à partir d'un certain échelon $M(E)$ de l'échelle construite sur E , découpe dans $M(E)$ un certain sous-ensemble $S(E)$. Le système d'axiomes σ joue en somme le rôle d'une transformation naturelle du foncteur M vers le foncteur S .)

Étant donnés deux ensembles E et F , on dit que la structure $t \in S(F)$ est obtenue en transportant la structure $s \in S(E)$ au moyen de la bijection f lorsque $t = S(f)(s)$.

On appelle groupoïde des isomorphismes de l'espèce de structures S , et on désigne par isom S la catégorie définie par les conditions suivantes :

- ob isom S est la classe de tous les couples $(E\ ,\ s)$ où E est un ensemble et où $s \in S(E)$,

- isom $S_{(E,s),(F,t)}$ est l'ensemble de tous les triples $(s\ ,\ f\ ,\ t)$ où f est une bijection où $s \in S(E)$ et où $t = S(f)(s)$,

- la multiplication est définie par $(t\ ,\ g\ ,\ u)(s\ ,\ f\ ,\ t) = (s\ ,\ gf\ ,\ v)$ où $(s\ ,\ f\ ,\ t) \in$ isom $S_{(E,s),(F,t)}$ et où $(t\ ,\ g\ ,\ u) \in$ isom $S_{(F,t),(G,u)}$,

- la flèche identité de l'objet (E, s) est $(s, \underset{\sim}{1}_E, s)$.

On vérifie immédiatement que la catégorie qui vient d'être ainsi définie est un groupoïde dans lequel $(s, f, t)^{-1} = (t, f^{-1}, s)$.

On dit que S est une espèce de structure <u>univalente</u> lorsque quels que soient les ensembles E et F et $s \in S(E)$ et $t \in S(F)$, il existe une bijection f de E sur F telle que (s, f, t) est une flèche de $\underline{\text{isom}}\, S$.

Soit S une espèce de structures et soit σ une "application" qui, à tout quadruple (E, s, F, t) tel que $s \in S(E)$ et $t \in S(F)$, fait correspondre un ensemble d'applications $\sigma(E, s, F, t)$ de E dans F. On dira que (S, σ) est une <u>espèce de structures avec morphismes</u> lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$f \in \sigma(E, s, F, t),\ g \in \sigma(F, t, G, u) \rightarrow gf \in \sigma(E, s, G, u)$$

$$(s, f, t) \in \underline{\text{isom}}\, S_{(E,s),(F,t)} \rightleftarrows f \text{ bijection},\ f \in \sigma(E, s, F, t),\ f^{-1} \in \sigma(F, t, E, s) .$$

Soit (S, σ) une espèce de structures avec morphismes. On appelle <u>catégorie des morphismes de</u> (S, σ), et l'on désignera par $\underline{\text{mor}}(S, \sigma)$ la catégorie définie par les conditions suivantes :

- $\underline{\text{ob}}\ \underline{\text{mor}}(S, \sigma) = \underline{\text{ob}}\ \underline{\text{isom}}\, S$,
- $\underline{\text{mor}}(S, \sigma)_{(E,s),(F,t)}$ est l'ensemble de tous les triples (s, f, t) où $f \in \sigma(E, s, F, t)$ et où $t = S(f)(s)$,
- la multiplication et les flèches identités se définissant exactement comme pour $\underline{\text{isom}}\, S$.

On prendra soin de remarquer que si f est une bijection et si (s, f, t) est un morphisme de (S, σ), il n'en résulte pas nécessairement que (s, f, t) est un isomorphisme de S.

(Par exemple, si (S, σ) est l'espèce des topologies avec applications continues comme morphismes, une bijection f peut être continue sans que f^{-1} le soit.)

Étant donné l'espèce de structures S (resp. l'espèce de structures avec morphismes (S, σ)) on appellera *foncteur canonique* de S (resp. (S, σ)) le foncteur $p \in \hom(\underline{\mathrm{isom}}\, S, \underline{\mathrm{Ens}})$ (resp. $p \in \hom(\underline{\mathrm{mor}}(S, \sigma), \underline{\mathrm{Ens}})$) défini par

$$p(E, s) = E$$

$$p(s, f, t) = f \quad .$$

Soient (S, σ) une espèce avec morphisme, E un ensemble et $s_1, s_2 \in S(E)$. On dit que s_1 *est plus fine que* s_2 (relativement à σ) lorsque

$$(s_1, \underset{\sim}{1}_E, s_2) \in \underline{\mathrm{mor}(S, \sigma)}_{s_1, s_2} \quad .$$

On voit immédiatement que si f est une bijection de E dans F et si $s \in S(E)$ et $t \in S(F)$ tels que $(s, f, t) \in \underline{\mathrm{mor}(S, \sigma)}_{s,t}$, alors $S(f)(s)$ est plus fine que t.

PROPOSITION. - Soit (S, σ) une espèce de structures avec morphismes où la comparabilité entraîne l'identité (c'est-à-dire telle que $s_1, s_2 \in S(E)$ et " s_1 plus fine que s_2 et s_2 plus fine que s_1 " entraîne $s_1 = s_2$). Alors

$$\underline{\mathrm{isom}\, S}_{s,t} = \{(s, f, t) \in \underline{\mathrm{mor}(S, \sigma)}_{s,t}, \quad f \text{ bijection}\} \quad .$$

Soit (S, σ) une espèce de structure avec morphisme et soit $s_i \in S(E_i)$ une famille de structures d'espèce S sur les ensembles E_i. On dit que $s \in S(E)$ est *structure initiale pour les* s_i *au moyen des applications* u_i *de* E *dans* E_i lorsque

$$f \in \sigma(F, t, E, s) \rightleftarrows \forall\ i,\ u_i f \in \sigma(F, t, E_i, s_i)$$

$$\begin{tikzcd}
(F, t) \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
(E, s) \arrow[r, "u_i"'] & (E_i, s_i)
\end{tikzcd}$$

Cette définition entraîne que si s existe, s est unique et est moins fine que tous les $s' \in S(E)$ tels que $u_i \in \sigma(E\ ,\ s'\ ,\ E_i\ ,\ s_i)$.

Soit $s_1 \in S(E_1)$ et soit u_1 une application de E dans E_1 .

On dit que $s \in S(E)$ est *image réciproque par* u *de la structure* s_1 , si s est structure initiale pour s_i au moyen de u .

Soient $s \in S(E)$ et A un sous-ensemble de E . Soit $t \in S(A)$. On dit que t est *la structure induite par* s *sur* A , et on écrit $t = s|_A$ lorsque l'image réciproque de s par $\underset{\sim}{1}_{A,E}$ existe et est égale à t .

Soit $(S\ ,\ \sigma)$ une espèce de structures avec morphismes. Soit $s_i \in S(E_i)$ une famille de structure d'espèce S sur les ensembles E_i .

On dit que $t \in S(\prod E_i)$ est *structure produit* des s_i si t est structure initiale pour les s_i au moyen des pr_i .

Soit $(S\ ,\ \sigma)$ une espèce de structures avec morphismes. Soit $s_i \in S(E_i)$ une famille de structures d'espèce S sur les ensembles E_i .

$$\begin{tikzcd}
 & (F\ ,\ t) \\
(E_i\ ,\ s_i) \arrow[ur, "fu_i"] \arrow[r, "u_i"'] & (E\ ,\ s) \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

On dit que $s \in S(E)$ est *structure finale pour les* s_i *au moyen des applications* u_i *de* E_i *dans* E lorsque

$$f \in \sigma(E\ ,\ s,\ F\ ,\ t) \rightleftarrows \forall\ i\ ,\ fu_i \in \sigma(E_i\ ,\ s_i\ ,\ F\ ,\ t) \quad .$$

Cette définition entraîne que si s existe, s est unique et est plus fine que tous les $s' \in S(E)$ tels que $u_i \in \sigma(E_i\ ,\ s_i\ ,\ E\ ,\ s')$.

Soit $s_i \in S(E_1)$ et soit u une application de E_1 dans E .

On dit que $s \in \mathcal{S}(E)$ est image directe par u de la structure s_1 lorsque s est structure finale pour s_1 au moyen de u.

Soit (S, σ) une espèce de structures avec morphismes. Soient E un ensemble, R une équivalence sur E et $s \in S(E)$. On dira que $t \in S(E/R)$ est structure quotient de s par R lorsque l'image directe de s par la surjection canonique j_R de E sur E/R existe et est égale à t.

11. Exemple.

L'espèce de structures topologiques T est définie comme étant le foncteur du groupoïde $\underline{\text{bij Ens}}$ en lui-même

– qui, à l'ensemble $E \in \text{ob } \underline{\text{bij Ens}}$, fait correspondre l'ensemble $T(E) \in \text{ob } \underline{\text{bij Ens}}$, constitué par les $\mathcal{O} \subset \mathfrak{P}(E)$ satisfaisant aux axiomes des ouverts d'une topologie,

– qui, à la bijection $f \in \underline{\text{bij Ens}}_{E,F}$, fait correspondre la bijection $T(f) \in \underline{\text{bij Ens}}_{T(E),T(F)}$ telle que

$$\forall \quad \mathcal{O} \in T(E) \; , \quad T(f)(\mathcal{O}) = \{f(U) \in T(F) / U \in T(E)\} \quad .$$

Soient E, E' deux ensembles et $\mathcal{O} \in T(E)$, $\mathcal{O}' \in T(E')$. On peut désigner par $\gamma(E, \mathcal{O}, E', \mathcal{O}')$ l'ensemble des applications continues de l'espace $(E, \mathcal{O})$ dans l'espace $E', \mathcal{O}'$ c'est-à-dire l'ensemble des applications f de E dans E' telles que $p(f)(\mathcal{O}') \subset \mathcal{O}$, p désignant le foncteur de $\underline{\text{Ens}}^0$ dans $\underline{\text{Ens}}$ qui, à un ensemble $E \in \text{ob } \underline{\text{Ens}}$, fait correspondre $p(E) = \mathfrak{P}(E)$ et qui, à une application $f \in \underline{\text{Ens}}_{E,F}$, fait correspondre $f \in \underline{\text{Ens}}_{F,E}$ définie comme l'application de $\mathfrak{P}(F)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ qui, à $Y \in \mathfrak{P}(F)$, fait correspondre $f^{-1}(Y) \in \mathfrak{P}(E)$.

On voit facilement que (T, γ) est une espèce de structure avec morphisme et l'on a $\underline{\text{mor } T, \gamma} = \underline{\text{Top}}$.

Étant donnée une famille $(E_i, \mathcal{O}_i)$ d'espaces topologiques, la topologie initiale sur E pour la famille d'applications f_i de E dans E_i existe et est égale à la topologie engendrée par

$$\bigcup_{i \in I} p(f_i)(\mathcal{O}_i) \quad .$$

C'est la moins fine des topologies $\mathcal{O}$ telles que $\forall\ i \in I$, $p(f_i)(\mathcal{O}_i) \subset \mathcal{O}$ c'est-à-dire la moins fine des topologies $\mathcal{O}$ rendant continus tous les f_i .

Étant donnée une famille $(E_i\ ,\ \mathcal{O}_i)$ d'espaces topologiques, la <u>topologie finale</u> sur E pour la famille d'applications f_i de E_i dans E existe et est égale à

$$\bigcap_{i \in I} p(f_i)^{-1}\ (\mathcal{O}_i) \qquad .$$

C'est la plus fine des topologies $\mathcal{O}$ telles que $\forall\ i \in I$, $p(f_i)(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}_i$ c'est-à-dire la plus fine des topologies $\mathcal{O}$ rendant continues les f_i .

On déduit de là

1° que toute topologie $\mathcal{O}' \in T(E')$ admet si f est une application de E dans E' une <u>image réciproque</u> qui n'est autre que $p(f)(\mathcal{O}')$,

2° qu'étant donnée une topologie $\mathcal{O} \in T(E)$ la <u>topologie induite</u> sur le sous-ensemble A de E existe et est égale à $\mathcal{O}|_A = p(\underset{\sim}{1}_{A,E})(\mathcal{O})$, et que l'on a

$$B \subset A \rightarrow \mathcal{O}|_A|_B = \mathcal{O}|_B \qquad ,$$

3° qu'étant donnée une famille $E_i\ ,\ \mathcal{O}_i$ d'espaces topologiques, il existe sur $\prod E_i$ une <u>topologie produit</u> qui est la topologie engendrée par

$$\bigcup_{i \in I} p(pr_i)(\mathcal{O}_i) \qquad ,$$

4° qu'étant donné un espace topologique $E\ ,\ \mathcal{O}$ et une relation d'équivalence R sur E , il existe sur E/R une topologie quotient qui est égale à

$$p(j_R)^{-1}\ (\mathcal{O}) \qquad .$$

12. <u>Espèces de structures sur un groupoïde. Subordination. Espèces enrichies.</u>

Nous allons maintenant généraliser les structures "ensemblistes" avec ou sans morphismes en remplaçant la catégorie "concrète" <u>bij Ens</u> par une catégorie "abstraite" $\mathcal{C}$. On obtient ainsi les définitions suivantes :

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. On dit que S est une <u>espèce de structure sur le groupoïde</u> $\mathcal{G}$ <u>ou encore que</u> S <u>est une</u> <u>$\mathcal{G}$-espèce de structure</u>, lorsque S est un foncteur de $\mathcal{G}$ dans <u>bij Ens</u> .

Si S est une $\mathcal{G}$-espèce de structure, on appellera <u>groupoïde des isomorphismes</u> de S , et on désignera par <u>isom S</u> , la catégorie définie par les conditions suivantes :

- <u>ob isom S</u> est la classe des couples (E , s) où $s \in S(E)$ et où $E \in \text{ob}\, \mathcal{G}$.
- $\underline{\text{isom S}}_{(E,s),(F,t)}$ est l'ensemble des triples (s , f , t) où $f \in \mathcal{G}_{E,F}$, et où $s \in S(E)$ et $t = S(f)(s)$, la multiplication et les flèches identités étant définies de manière tout-à-fait analogue à celles relatives aux structures ensemblistes.

On appellera encore <u>foncteur canonique</u> de S le foncteur $p \in \text{hom}(\underline{\text{isom S}} , \mathcal{G})$ défini par

$$p(E , s) = E$$
$$p(s , f , t) = f \quad .$$

Soient S et T deux espèces de structure sur le groupoïde $\mathcal{G}$. On appelle <u>subordination</u> de l'espèce S à l'espèce T toute transformation naturelle σ du foncteur T vers le foncteur S . On dit alors que T est <u>une espèce de superstructure sur l'espace</u> S ou que S <u>est sous-jacente à</u> T ou que T <u>est plus riche que</u> S , et si $s \in S(E)$ et $t = \sigma_E(s)$, on dit que s est sous-jacente à t ou une infrastructure de t , ou un invariant de t , ou que t est subordonnée à s , ou une superstructure de s .

PROPOSITION. - Si σ est une subordination de l'espèce T à l'espèce S , alors $\tilde{\sigma}$, défini par $\tilde{\sigma}(t) = \sigma_E(t)$ si $t \in T(E)$, est un foncteur de <u>isom T</u> dans <u>isom S</u> tel que $p\tilde{\sigma} = q$, p et q étant les foncteurs canoniques respectifs de S et de T .

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{G}$ un sous-groupoïde ayant même objets que $\mathcal{C}$. On dira que S est une <u>$\mathcal{G}$-espèce de structure</u> $\mathcal{C}$ <u>enrichie</u> lorsque S est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans <u>Ens</u> tel que $S(\mathcal{G}) \subset$ <u>bij Ens</u> .

On appelle <u>catégorie des morphismes de la</u> <u>$\mathcal{G}$-espèce de structure</u> $\mathcal{C}$ <u>enrichie</u>, et l'on note $\underline{\text{mor } S , \mathcal{C}}$ la catégorie définie par les conditions suivantes :

- ob $\underline{\text{mor } S , \mathcal{C}}$ est la classe des couples (E , s) où $s \in S(E)$ et où $E \in \text{ob } \mathcal{S} = \text{ob } \mathcal{C}$,

- $\underline{\text{mor } S , \mathcal{C}}_{(E,s)(F,t)}$ est l'ensemble des triples (s , f , t) où

$$f \in \mathcal{C}_{E,F} \quad \text{ou} \quad s \in S(E) \text{ , et où } \quad t = S(f)(s) \qquad ,$$

la multiplication et les flèches identités étant définies de manière analogue à celles définies pour $\underline{\text{isom } S}$.

13. Structures locales.

Si nous considérons l'espace des structures topologiques, nous pouvons remarquer que, non seulement nous avons, ainsi que nous l'avons déjà constaté, une notion de topologie induite qui nous permet de définir pour tout espace topologique $(E , \mathcal{O})$ une topologie induite $\mathcal{O}|_A$ sur toute partie A de E , et donc a fortiori une topologie induite $\mathcal{O}|_U$ sur tout ouvert $U \in \mathcal{O}$, mais même de pouvoir, à partir de topologies $\mathcal{O}_i$ données sur des sous-ensembles U_i d'un ensemble E , et recouvrant celui-ci, construite "par recollement" une topologie $\mathcal{O}$ sur E telle que chaque $\mathcal{O}_i$ apparaisse précisément comme la topologie induite par $\mathcal{O}$ sur chaque U_i , à condition bien entendu que ces $\mathcal{O}_i$ soient "cohérentes", c'est-à-dire telles que, quels que soient i et j , $\mathcal{O}_i|_{U_j} = \mathcal{O}_j|_{U_i}$.

Nous avions, à vrai dire, déjà constaté des phénomènes analogues dans la catégorie $\underline{\text{Ens}}$: étant donnée une application f de l'ensemble E dans l'ensemble F non seulement nous savons définir l'application induite $f|_A$ sur une partie A de E , mais encore nous savons "recoller des morceaux d'applications" $f_i \in \underline{\text{Ens}}_{E_i,F}$ en un agrégat $f \in \text{Ens}_{E,F}$ où $E = \bigcup E_i$ à condition que ces "morceaux" soient "recollables" c'est-à-dire tels que

$$\forall \ i , j , \qquad f_i|_{E_j} = f_j|_{E_i} \qquad .$$

Mais il s'agit là d'un phénomène qui se présente dans bien d'autres situations : c'est ainsi que si l'on considère une variété différentiable, on peut remarquer que l'on a, là aussi, une notion de variété induite sur tout ouvert et qu'il suffit de connaître la structure induite sur une famille d'ouverts constituant un recouvrement de la variété pour connaître la structure toute éntière.

A partir de ces notions de "structures locales" ainsi rencontrées, on est conduit à rechercher une définition générale précisant en détail ce que nous avons déjà reconnu en gros, c'est-à-dire qu'une espèce de structures locales est subordonnée à l'espèce des structures topologiques, qu'elles sont munies d'une "loi d'induction" et qu'elles satisfont à un "principe de recollement".

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Théorie des ensembles, Chapitres 1-2, 3, 4. - Paris, Hermann, 1954-1958 (Act. scient. et ind., 1212, 1243, 1258 ; Eléments de Mathématique, 17, 20, 22).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chapitres 1-2, 3-4, 3e édition. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1142, 1143 ; Eléments de Mathématique, 2, 3).

[3] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Foundations of fibre bundles, Symposium internacional de Topologia algebraica [1956. Mexico] ; p. 16-23. - Mexico, Universidad nacional autonomia, UNESCO, 1958.

[4] DEDECKER (Paul). - Quelques aspects de la théorie des structures locales, Bull. Soc. math. Belg., t. 5, 1952, p. 26-43.

[5] DEDECKER (Paul). - Calcul des variations et topologie algébrique, Mém. Soc. royale Sc. Liège, 4e série, t. 19, 1957, n° 1, 216 p.

[6] DEDECKER (Paul). - Introduction aux structures locales, Colloque de Géométrie différentielle globale [1958. Bruxelles] ; p. 103-135. - Paris, Gauthier-Villars, 1959 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[7] EHRESMANN (Charles). - Gattungen von lokalen Strukturen, Jahr. Deutsch. math. Verein., t. 60, 1957, p. 49-77.

[8] EILENBERG (S.) and MACLANE (S.). - General theory of natural equivalences, Trans. Amer. math. Soc., t. 58, 1945, p. 231-294.

[9] GROTHENDIECK (Alexander). - A general theory of fibre spaces with structure sheaf. - Lawrence, University of Kansas, Department of Mathematics, 1955 (Report n° 4).

[10] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., t. 9, p. 119-221.

[11] ISBELL (J. R.). - Some remarks concerning categories and subspaces, Canadian J. Math., t. 9, 1957, p. 563-577.

[12] MACLANE (Saunders). - Duality for groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 56, 1950, p. 485-516.

[13] REIDEMEISTER (Kurt). - Einführung in die kombinatorische Topologie. - New York, Chelsea publishing Company, 1950.

[14] SAMUEL (Pierre). - On universal mappings and free topological groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 54, 1948, p. 591-598.