Pierre Eymard

Suites équiréparties dans un groupe compact

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 3, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 3

28 novembre 1960

SUITES ÉQUIRÉPARTIES DANS UN GROUPE COMPACT

par Pierre EYMARD

(d'après B. ECKMANN et G. HELMBERG)

Parmi les théorèmes d'équirépartion de H. WEYL [6], l'un des plus simples est le suivant : sur une circonférence T de longueur 1, l'ensemble des points d'abscisse curviligne pa, où a est un nombre irrationnel donné et $p = 1, 2, \dots,$ est équiréparti, c'est-à-dire que, pour tout arc fermé E de T, on a $\lim_{n\to\infty} \nu_E(n)/n =$ longueur de E, où $\nu_E(n)$ désigne le nombre des entiers p tels que $0 < p \leqslant n$ et tels que le point d'abscisse pa soit sur E. En 1944, ECKMANN [1] en a donné une généralisation au cas d'un groupe compact (nécessairement abélien) admettant un générateur topologique a. En 1958, HELMBERG [3] l'a étendu au cas d'un groupe compact quelconque pour un nombre fini de générateurs topologiques. Notre objet est d'exposer successivement ces deux généralisations.

1. Notions d'analyse harmonique sur les groupes compacts (cf. [5]).

a. Soient G un groupe compact, d'élément-unité e, et $\mathcal{C}(G)$ l'espace des fonctions $f(x)$ à valeurs complexes, définies et continues sur G, muni de la topologie de la convergence uniforme sur G. Il existe une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(G)$ et une seule, notée $f \to \mu(f)$ ou encore $f \to \int_G f(x)\, d\mu(x)$ et appelée mesure de Haar de G, qui satisfasse aux propriétés : $f \geqslant 0 \Longrightarrow \mu(f) \geqslant 0$;

$$\int_G f(sx)\, d\mu(x) = \int_G f(x)\, d\mu(x) \qquad ,$$

pour tout $s \in G$; $\mu(1) = 1$. Soient un fermé $E \subset G$ et $\varphi_E(x)$ sa fonction caractéristique. On pose $\mu(E) = \inf_{\varphi_E \leqslant f \in \mathcal{C}(G)} \int_G f(x)\, d\mu(x)$, qu'on appelle mesure de E.

Si de plus la frontière de E est de mesure nulle, on a aussi

$$\mu(E) = \sup_{g \in \mathcal{C}(G),\, 0 \leqslant g \leqslant \varphi_E} \int_G g(x)\, d\mu(x) \qquad .$$

Soit U un ouvert de G ; on pose $\mu(U) = 1 - \mu(\complement U)$.

b. Une représentation unitaire irréductible de G (en abrégé : r. u. i.), de dimension λ (λ entier > 0), est un homomorphisme continue $x \to M(x)$ de G

dans le groupe des matrices unitaires d'ordre λ , tel qu'aucun sous-espace vectoriel non trivial de $\underset{\sim}{C}^{\lambda}$ ne soit invariant par toutes les $M(x)$. On a en particulier la r. u. i. triviale, qui est de dimension 1 , et définie par $M(x) = \|1\|$ pour tout $x \in G$. Deux r. u. i. , $x \to M(x)$ et $x \to L(x)$ sont dites équivalentes, si elles ont même dimension et s'il existe une matrice unitaire U telle que $M(x) = UL(x)\, U^{-1}$ pour tout $x \in G$. Soit

$$x \to M^{(\alpha)}(x) = \|m_{ij}^{(\alpha)}(x)\| ,$$

où $1 \leq i , j \leq \lambda(\alpha)$ = dimension de la représentation (α) , une famille de r. u. i. obtenue en choisissant une fois pour toutes une et une seule r. u. i. dans chaque classe d'équivalence des r. u. i. On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie de coefficients $m_{ij}^{(\alpha)}(x)$. On a les relations d'orthogonalité

$$\int_G m_{ij}^{(\alpha)}(x)\, \overline{m_{ij}^{(\alpha)}(x)}\, d\mu(x) = \frac{1}{\lambda(\alpha)} ,$$

et

$$\int_G m_{ij}^{(\alpha)}(x)\, \overline{m_{k\ell}^{(\beta)}(x)}\, d\mu(x) = 0$$

pourvu que l'une au moins des relations $(\alpha) \neq (\beta)$, $i \neq k$, $j \neq \ell$ soit vraie. De plus, toute $f(x) \in \mathcal{C}(G)$ est limite uniforme sur G de polynômes trigonométriques (théorème d'approximation de Weyl) :

c. Si, plus particulièrement, G est compact abélien, toutes ses r. u. i. sont de dimension 1 , et leur ensemble s'identifie à l'ensemble $\hat{G}$ des caractères continus sur G , i. e. des homomorphismes continus $x \to m(x)$ de G dans T . $\hat{G}$ est muni d'une structure évidente de groupe (discret) par multiplication ordinaire des caractères. Réciproquement (théorème de dualité), G s'identifie à l'ensemble des caractères sur $\hat{G}$, à $x \in G$ correspondant le caractère $m \to m(x)$. Enfin, si H est un sous-groupe fermé de G et $H^{\perp}$ son orthogonal dans $\hat{G}$ (i. e. l'ensemble des $m \in \hat{G}$ tels que $m(x) = 1$ pour tout $x \in H$; c'est un sous-groupe de $\hat{G}$), on a : $(G/H)^{\wedge} = H^{\perp}$ et $\hat{H} = \hat{G}/H^{\perp}$.

Dans le cas considéré par H. WEYL, $G = T$, $\hat{G} = \underset{\sim}{Z}$, à l'entier m correspondant le caractère défini par $x \to m(x) = \exp(2\pi\, imx)$ pour tout $x \in T$.

2. Trois définitions équivalentes d'une suite équirépartie.

PROPOSITION 1. - Soit G un groupe compact, et soit x_p une suite d'éléments de G $(p = 1 , 2 , \ldots)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(P_1) pour tout fermé $E \subset G$ et dont la frontière soit de mesure nulle, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \nu_E(n)/n = \mu(E) \quad ,$$

où $\nu_E(n)$ = le nombre des entiers p tels que : $0 < p \leq n$ et $x_p \in E$.

(P_2) pour toute $f(x) \in \mathcal{C}(G)$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} f(x_p) = \int_G f(x)\, d\mu(x) \quad .$$

(P_3) pour toute r. u. i. non triviale $x \to M(x)$ de G , on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} M(x_p) = 0 \quad .$$

DÉMONSTRATION.

a. $(P_2) \Longleftrightarrow (P_3)$: supposons (P_2), et soient $M(x) = \|m_{ij}(x)\|$ les matrices d'une r. u. i. non triviale. Comme $m_{ij}(x) \in \mathcal{C}(G)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} m_{ij}(x_p) = \int_G m_{ij}(x)\, d\mu(x) \quad .$$

Cette intégrale est nulle (relation d'orthogonalité), donc (P_3).

Supposons (P_3). Soit d'abord un polynôme trigonométrique

$$g(x) = a_0\, m_{11}^{(0)}(x) + \dots + a_q\, m_{i_q j_q}^{(\alpha_q)}(x)$$

où (0) est l'indice de la représentation triviale. D'après (P_3), on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} g(x_p) = a_0 \quad .$$

D'après les relations d'orthogonalité, $a_0 = \int_G g(x)\, d\mu(x)$; on a donc (P_2) pour tout polynôme trigonométrique. Soient maintenant $f(x) \in \mathcal{C}(G)$, et $\varepsilon > 0$; en vertu du théorème d'approximation, il existe un polynôme trigonométrique $g_\varepsilon(x)$ tel que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ sur G , ce qui entraîne

$$\left| \int_G f(x)\, d\mu(x) - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} f(x_p) \right|$$

$$\leq \int_G |f(x) - g_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) + \left| \int_G g_\varepsilon(x)\, d\mu(x) - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} g_\varepsilon(x_p) \right| + \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} |f(x_p) - g(x_p)|$$

$$\leq 2\varepsilon + \left| \int_G g_\varepsilon(x)\, d\mu(x) - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} g_\varepsilon(x_p) \right| \leq 3\varepsilon \quad ,$$

dès qu'on choisit n assez grand, en vertu de (P_2) appliqué à $g_\varepsilon(x)$. Donc (P_2).

b. $(P_1) \Longleftrightarrow (P_2)$: Supposons (P_2). Soient un fermé $E \subset G$ et de frontière de mesure nulle, et $\varepsilon > 0$. Il existe $f(x)$ et $g(x) \in \mathcal{C}(G)$ telles que $0 \leqslant g(x) \leqslant \varphi_E(x) \leqslant f(x)$, et que :

$$(1) \qquad \int_G g(x)\, d\mu(x) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2} \qquad ; \qquad \int_G f(x)\, d\mu(x) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Pour tout $n > 0$, on a :

$$(2) \qquad \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} g(x_p) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \varphi_E(x_p) = \frac{\nu_E(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f(x_p) \quad .$$

D'après (P_2), dès que n est assez grand, on a :

$$(3) \quad \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} g(x_p) > \int_G g(x)\, d\mu(x) - \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f(x_p) < \int_G f(x)\, d\mu(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

De (1), (2), (3) vient que

$$\mu(E) - \varepsilon < \frac{\nu_E(n)}{n} < \mu(E) + \varepsilon$$

dès que n est assez grand, d'où (P_1).

Reste à voir que $(P_1) \Longrightarrow (P_2)$. On s'appuie sur le

LEMME. - Soient $f(x) \in \mathcal{C}(G)$, à valeurs réelles, et $\varepsilon > 0$. Alors il existe un nombre fini d'ouverts X_i, deux à deux disjoints, dont la réunion a pour complémentaire dans G un ensemble N_ε de mesure nulle, et tels que l'oscillation de $f(x)$ dans chaque X_i soit $< \varepsilon$.

En effet, les fermés $F_h = \overset{-1}{f}(\{h\})$, où $h \in \underset{\sim}{R}$, sont tous de mesure nulle, sauf pour un ensemble dénombrable D de valeurs de h. $f(G)$ étant borné, on peut le recouvrir par une suite finie de segments fermés $[h_0, h_1], \ldots, [h_{q-1}, h_q]$, où $h_0 < h_1 < \ldots < h_q$, de longueur $< \varepsilon$, les h_i $(i = 0, 1, \ldots, q)$ étant de plus choisis dans le complémentaire de D. Alors les $X_i = \overset{-1}{f}(]h_{i-1}, h_i[)$ répondent au problème, avec $N_\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{q} F_{h_i}$.

Supposons (P_1). Alors on a aussi (P_1) en remplaçant E par un ouvert dont la frontière est de mesure nulle. D'autre part $\nu_E(n) = \sum_{p=1}^{n} \varphi_E(x_p)$, et par suite (P_1) n'est autre que l'égalité (P_2) écrite pour $f(x) = \varphi_E(x)$. L'hypothèse (P_1)

entraîne donc (P_2) pour toute fonction étagée $\sum_i c_i \varphi_{X_i}(x)$ construite à l'aide d'un nombre fini d'ouverts de frontière de mesure nulle et deux à deux disjoints. Soient $f(x) \in \mathcal{C}(G)$, et $\varepsilon > 0$; d'après le lemme, il existe une telle fonction étagée $g_\varepsilon(x)$ telle que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ sauf pour $x \in N_\varepsilon$ de mesure nulle. Pour tout n ,

$$\left| \int_G f(x)\, d\mu(x) - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} f(x_p) \right|$$

$$\leqslant \int_G |f(x) - g_\varepsilon(x)\, d\mu(x)| + \left| \int_G g_\varepsilon(x)\, d\mu(x) - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} g_\varepsilon(x_p) \right|$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{\substack{p=1 \\ x_p \notin N_\varepsilon}}^{n} |f(x_p) - g_\varepsilon(x_p)| + \frac{1}{n} \sum_{\substack{p=1 \\ x_p \in N_\varepsilon}}^{n} |f(x_p) - g_\varepsilon(x_p)| \quad .$$

Au second membre le premier et le troisième terme sont $< \varepsilon$ pour tout n . Quand $n \to \infty$, le deuxième terme tend vers zéro (appliquer (P_2) aux fonctions étagées) ; la quatrième est majoré par $\|f\|_\infty \nu_{N_\varepsilon}(n)/n$ qui tend vers zéro. Donc (P_2).

DÉFINITION 1. - On dit qu'une suite $x_p \in G$ $(p = 1 , 2 , \ldots)$ est équirépartie dans G si elle remplit les trois conditions équivalentes (P_1), (P_2), (P_3) de la proposition 1.

3. Le théorème d'Eckmann.

DÉFINITION 2. - On dit qu'un groupe compact G est monothétique, s'il existe $a \in G$, tel que la suite des a^p $(p \in \mathbb{Z})$ soit dense dans G . Un tel a est appelé générateur topologique de G . Ayant un sous-groupe cyclique dense, un groupe monothétique est nécessairement abélien.

PROPOSITION 2. - Pour qu'un groupe abélien compact G soit monothétique, il faut et il suffit que son dual $\hat{G}$ soit isomorphe algébriquement à un sous-groupe de T .

DÉMONSTRATION. - Si G est monothétique, de générateur topologique a , l'application $m \to m(a)$ de $\hat{G}$ dans T est un homomorphisme, et son noyau est réduit au caractère trivial : en effet, si $m(a) = 1$, on a $m(a^p) = [m(a)]^p = 1$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, et par continuité $m(x) = 1$ pour tout $x \in G$.

Réciproquement, si φ est un homomorphisme de $\hat{G}$ dans T , d'après le théorème de dualité il existe $a \in G$ tel que $\varphi(m) = m(a)$ pour tout $m \in \hat{G}$. Si de plus φ

est injectif, on a $m(a) \neq 1$ pour tout m non trivial ; l'orthogonal dans $\hat{G}$ du sous-groupe fermé H_a de G engendré par a est donc réduit à l'élément-neutre de $\hat{G}$; et $H_a = G$.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> G <u>un groupe compact monothétique. Si</u> a <u>est un générateur topologique de</u> G , <u>la suite des</u> a^p $(p = 1 , 2 , \dots)$ <u>est équirépartie dans</u> G .

DÉMONSTRATION. - Soit $m \in \hat{G}$, non trivial. On a $m(a) \neq 1$, d'après la démonstration de la proposition 2 , et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} m(a^p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} [m(a)]^p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{[m(a)]^{n+1} - m(a)}{m(a) - 1} = 0 \quad .$$

Ainsi (P_3) est vérifiée, d'où le théorème (*).

4. <u>Exemples de groupes monothétiques</u> (cf. [1] et [2]) :

Pour k entier > 0 , soit T^k le tore de dimension k , en notation additive, ensemble des $x = (x_1 , x_2 , \dots , x_k)$, où les x_k sont des nombres réels modulo 1 . T^k <u>est monothétique</u>, x étant générateur topologique de T^k si et seulement si les x_i $(i = 1 , 2 , \dots , k)$ et le nombre 1 sont linéairement indépendants sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Ceci n'est autre que le théorème d'approximation de Kronecker. On a l'énoncé plus général :

PROPOSITION 3. - <u>Tout groupe abélien compact connexe à base dénombrable d'ouverts est monothétique</u>.

DÉMONSTRATION. - Par dualité, on est ramené à démontrer, en vertu de la proposition 2, que <u>tout groupe</u> G <u>abélien dénombrable sans torsion est isomorphe algébriquement à un sous-groupe</u> de T . Soient $x_0 = e$, x_1 , ... , x_n , ... la suite des éléments de G , et, pour tout j entier ≥ 0 , H_j le sous-groupe de G engendré par e , x_1 , ... , x_j . Choisissons une suite c_0 , c_1 , ... , c_n , ... de nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On se propose de construire un isomorphisme φ de G dans T tel que, pour tout j entier ≥ 0 et tout $x \in H_j$

(*) Dans [1], ECKMANN énonce (P_1) pour un fermé E quelconque, en omettant l'hypothèse "de frontière de mesure nulle". Mais sa démonstration ne vaut que sous cette hypothèse. On a d'ailleurs le contre-exemple suivant : $G = T$; a un point d'abscisse irrationnelle ; U_n l'intervalle ouvert qui a pour centre le point d'abscisse na et pour longueur ε_n . Si $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1$, le fermé E , complémentaire de la réunion des U_n , est de mesure non nulle, et pourtant ne contient aucun des na .

on ait

$$\varphi(x) = \exp[2\pi i(q_0\, c_0 + q_1\, c_1 + \dots + q_j\, c_j + q)] \quad ,$$

où les q_i et q sont dans $\underset{\sim}{Q}$. On procède par récurrence sur j.

Pour $j = 0$, il suffit de poser $\varphi(x_0) = 1$. Par hypothèse de récurrence, supposons obtenu un isomorphisme φ_{j-1} de H_{j-1} dans T tel que, pour tout $x \in H_{j-1}$

$$\varphi_{j-1}(x) = \exp[2\pi i(q_0\, c_0 + q_1\, c_1 + \dots + q_{j-1}\, c_{j-1} + q)]$$

où les q_i et $q \in \underset{\sim}{Q}$. Etendons φ_{j-1} en isomorphisme φ_j de H_j dans T. Il y a trois cas :

a. $x_j \in H_{j-1}$, et donc $H_j = H_{j-1}$: l'extension est toute faite.

b. $x_j \notin H_{j-1}$, mais il existe dans H_{j-1} des puissances de x_j : soient alors n le plus petit entier > 1 tel que $x_j^n = y \in H_{j-1}$, et z l'un des nombres complexes tels que $z^n = \varphi_{j-1}(y)$. Tout $x \in H_j$ s'écrit $x = \chi x_j^m$, où $\chi \in H_{j-1}$ et m entier, éventuellement de plusieurs façons. On pose

$$\varphi_j(x) = \varphi_{j-1}(\chi).z^m \quad ,$$

nombre indépendant de la décomposition choisie pour x. On a ainsi étendu φ_{j-1} en un homomorphisme φ_j de H_j dans T. φ_j est un isomorphisme : en effet, si $x = \chi x_j^m \in H_j$ est tel que $\varphi_j(x) = 1$, alors $\varphi_j(x^n) = \varphi_{j-1}(x^n) = 1$, donc $x^n = e$ et par suite $x = e$, car G est sans torsion.

c. pour tout entier $n \neq 0$, $x_j^n \notin H_{j-1}$: Tout $x \in H_j$ admet alors une décomposition unique de la forme $x = \chi x_j^m$, où $\chi \in H_{j-1}$, m entier. On pose :

$$\varphi_j(x) = \varphi_{j-1}(\chi).\exp(2\pi i\, m c_j) \quad ,$$

ce qui prolonge φ_{j-1} en un homomorphisme φ_j de H_j dans T de la forme désirée. φ_j est un isomorphisme : cela résulte immédiatement de l'indépendance linéaire des c_n sur $\underset{\sim}{Q}$.

G étant réunion de la suite croissante des sous-groupes H_j, l'existence de φ est donc établie par induction, d'où la proposition 3.

A l'opposé, il existe des groupes monothétiques totalement discontinus, par exemple le groupe additif des entiers p-adiques, muni de sa topologie compacte usuelle dans lequel le groupe des entiers rationnels est dense, comme il est bien connu.

5. Le théorème d'Helmberg.

Soient G un groupe compact (non nécessairement abélien), et $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de G en nombre fini. On dira que l'ensemble des éléments $x_p = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_r^{i_r}$ $(0 \leq i_k < \infty ;\ k = 1, 2, \ldots, r)$ est rangé dans un ordre naturel si :

- $x_1 = e$ ($i_k = 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, r$) ;
- les $2^r - 1$ éléments suivants sont donnés par $i_k = 0$ ou 1 pour tout k, avec $i_k = 1$ pour un k au moins ; par ailleurs dans un ordre arbitraire ;
- les $3^r - 2^r$ éléments suivants sont donnés par $i_k = 0$; 1 ou 2 pour tout k, avec $i_k = 2$ pour un k au moins, par ailleurs dans un ordre arbitraire ;
- etc.

Les $(i+1)^r$ premiers éléments de la suite x_p ainsi construite sont précisément les $a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r}$, où $0 \leq i_k \leq i$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, r$.

THÉORÈME 2. - Soient G un groupe compact, et $a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_r$ r éléments de G tels que, pour toute r. u. i. $x \to M(x)$ non triviale de G, l'un au moins des a_k vérifie $\det[M(a_k) - M(e)] \neq 0$. Alors la suite des $x_p = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_r^{i_r}$, rangés dans un ordre naturel, est équirépartie dans G.

DÉMONSTRATION. - Soient $x \to M(x)$ une r. u. i. non triviale de G, et a_{k_0} qui, en vertu de l'hypothèse, vérifie

$$\text{dét}[M(a_{k_0}) - M(e)] \neq 0 \quad . \tag{4}$$

On va montrer (P_3), c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{p=1}^{n} M(x_p) = 0$.

Désignons par i la partie entière de $n^{1/r} - 1$; on a donc

$$(i+1)^r \leq n < (i+2)^r \quad . \tag{5}$$

On a :

$$(6)\quad \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} M(x_p) = \frac{1}{n}\Big[\sum_{p=1}^{(i+1)^r} M(x_p) + \sum_{p=(i+1)^r+1}^{n} M(x_p)\Big]$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\sum_{0\leq i_k\leq i} M\big(\prod_{k=1}^{r} a_k^{i_k}\big) + \sum_{p=(i+1)^r+1}^{n} M(x_p)\Big]$$

$$= \frac{(i+1)^r}{n}\Big[\frac{1}{(i+1)^r}\sum_{0\leq i_k\leq i} M\big(\prod_{k=1}^{r} a_k^{i_k}\big) + \frac{1}{(i+1)^r}\sum_{p=(i+1)^r+1}^{n} M(x_p)\Big] ,$$

Considérons séparément chaque terme à l'intérieur du crochet pour en effectuer une majoration. Adoptons les notations suivantes : $A = \|a_{ij}\|$ étant une matrice d'ordre λ, on désignera par $|A|$ la matrice d'éléments $|a_{ij}|$; soit d'autre part F la matrice d'éléments $a_{ij} = 1$ quels que soient $1 \leq i , j \leq \lambda$. On a immédiatement les règles suivantes :

$$|kA| = |k|\,|A| \quad (k \in \underset{\sim}{C}) \qquad ;$$

$$|A + B| \leq |A| + |B| \qquad ;$$

$$|AB| \leq |A|\,|B| \qquad ;$$

$$F^m = \lambda^{m-1} F \qquad .$$

a. <u>Majoration du premier terme dans (6)</u> :

$$\frac{1}{(i+1)^r}\sum_{0\leq i_k\leq i} M\big(\prod_{k=1}^{r} a_k^{i_k}\big) = \frac{1}{(i+1)^r}\sum_{0\leq i_k\leq i}\prod_{k=1}^{r} [M(a_k)]^{i_k}$$

$$= \prod_{k=1}^{r}\Big\{\frac{1}{i+1}\sum_{i_k=0}^{i} [M(a_k)]^{i_k}\Big\}$$

$$= \prod_{k=1}^{k_0-1}\Big\{\frac{1}{i+1}\sum_{i_k=0}^{i} [M(a_k)]^{i_k}\Big\} \times \frac{1}{i+1}\sum_{i_{k_0}=0}^{i} [M(a_{k_0})]^{i_{k_0}}$$

$$\times \prod_{k=k_0+1}^{r} \frac{1}{i+1}\sum_{i_k=0}^{i} [M(a_k)]^{i_k} \qquad .$$

De l'identité

$$[M(a_{k_0}) - M(e)] \sum_{i_{k_0}=0}^{i} [M(a_{k_0})]^{i_{k_0}} = [M(a_{k_0})]^{i+1} - M(e)$$

résulte en vertu de l'hypothèse (4) :

$$\sum_{i_{k_0}=0}^{i} [M(a_{k_0})]^{i_{k_0}} = [M(a_{k_0}) - M(e)]^{-1} \{[M(a_{k_0})]^{i+1} - M(e)\} \quad .$$

On obtient successivement les majorations :

$$|M(a_{k_0})^{i+1} - M(e)| \leqslant 2F \quad ;$$

$$|[M(a_{k_0}) - M(e)]^{-1}| \leqslant hF \quad (\ h \ \text{constante} > 0\ ,\ \text{indépendante de}\ \ i\ ) \ ;$$

$$\left|\frac{1}{i+1} \sum_{i_{k_0}=0}^{i} [M(a_{k_0})]^{i_{k_0}}\right| \leqslant \frac{2h}{i+1} F^2 = \frac{2h\,\lambda}{i+1} F \quad ;$$

$$\left|\frac{1}{i+1} \sum_{i_k=0}^{i} [M(a_k)]^{i_k}\right| \leqslant \frac{1}{i+1} (i+1)\, F = F \quad ;$$

et donc finalement

(7) $$\left|\frac{1}{(i+1)^r} \sum_{0 \leqslant i_k \leqslant i} M\left(\prod_{k=1}^{r} a_k^{i_k}\right)\right| \leqslant \frac{1}{i+1} 2h\, \lambda^r F \quad .$$

b. <u>Majoration du deuxième terme dans (6)</u> :

(8) $$\left|\frac{1}{(i+1)^r} \sum_{p=(i+1)^r+1}^{n} M(x_p)\right| \leqslant \frac{1}{(i+1)^r} \sum_{p=(i+1)^r+1}^{n} |M(x_p)|$$

$$\leqslant \frac{n - (i+1)^r}{(i+1)^r} F \leqslant \left[\left(1 + \frac{1}{i+1}\right)^r - 1\right] F$$

De (7) et (8), on déduit immédiatement que (6) tend vers 0 quand n tend vers l'infini,

C. Q. F. D.

REMARQUES.

1° L'hypothèse du théorème 2 est encore valable, (a) si l'on change l'ordre des $a_1, \dots, a_r$; (b) si l'on ajoute à ces éléments un nombre fini $a_{r+1}, \dots, a_s$ d'autres éléments. Les suites x_p obtenues dans ces diverses circonstances sont toutes équiréparties.

2° Si a_1 , a_2 , ... , a_r satisfont à l'hypothèse du théorème 2, ils forment un système fini de générateurs topologiques de G (cette affirmation n'est qu'un faible corollaire du théorème 2). La réciproque est vraie dans le cas où G est abélien, mais non en général.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ECKMANN (Beno). - Über monothetische Gruppen, Comment. Math. Helvet., t. 17, 1944, p. 249-263.

[2] HALMOS (P. R.) and SAMELSON (H). - On monothetic groups, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 28, 1942, p. 254-258.

[3] HELMBERG (Gilbert). - A theorem on equidistribution in compact groups, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 227-241.

[4] HLAWKA (Edmond). - Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen, Rend. Circ. mat. Palermo, Série 2, t. 4, 1955, p. 33-47.

[5] WEIL (André). - L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. - Paris, Hermann, 1940 (Act. scient. et ind., 869 ; Publ. Inst. math. Clermont-Ferrand, 4).

[6] WEYL (Hermann). - Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Annalen, t. 77, 1916, p. 313-352.