Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Léonce Lesieur

Coeur d'un module, I

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 1, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A1_0>

COEUR D'UN MODULE, I.

par Léonce LESIEUR

Je me propose de donner la définition, les principales propriétés et les premières applications d'une notion qui nous paraît nouvelle, celle de coeur d'un module. Je rappellerai d'abord la définition du corps $K(M)$ associé à un module irréductible (§ 1) ; je définirai ensuite le coeur $C(M)$ du module M supposé irréductible, d'abord dans le cas où M est un module injectif indécomposable, puis dans le cas où M est seulement irréductible ; je donnerai également dans ces deux cas des propriétés caractéristiques du coeur (§ 2) ; j'aborderai ensuite le cas d'un module quelconque satisfaisant à une condition de chaîne qui sera précisée, et je donnerai dans ce cas général la définition, les premières propriétés et une application de la notion de coeur (§ 3). Dans les deux premiers paragraphes, les explications seront assez détaillées pour ne pas obliger le lecteur à se reporter trop souvent aux références. Par contre, dans le dernier paragraphe, je me contenterai de donner les principaux résultats, en renvoyant pour les démonstrations à un mémoire qui sera publié ultérieurement.

1. Corps $K(M)$ associé à un A-module irréductible M.

Soit A un anneau unitaire, commutatif ou non. M est un A-module à gauche dans lequel le sous-module nul est $\cap$-irréductible, c'est-à-dire que la relation $X \cap Y = 0$ implique $X = 0$ ou $Y = 0$, X et Y étant deux sous-modules non nuls de M. On dira pour abréger que M est irréductible. (ou uniforme suivant la terminologie de A. W. GOLDIE [7]).

Soit E l'enveloppe injective de M (cf. P. GABRIEL [5]). E est donc une extension de M qui est à la fois injective (Si $P \subset Q$ sont deux A-modules, et $f : P \to E$ un homomorphisme de P dans E, f peut être étendu à un homomorphisme $g : Q \to E$) et essentielle (Si $M \cap X = 0$, X étant un sous-module de E, on a $X = 0$). De plus, E est lui-même irréductible (si $X \cap Y = 0$ dans E, on a $(X \cap M) \cap (Y \cap M) = 0$ dans M, ce qui implique $X \cap M = 0$ et $Y \cap M = 0$ puisque M est irréductible, puis $X = 0$ et $Y = 0$ puisque E est extension essentielle de M). E est un module injectif indécomposable, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun sous-module injectif différent de E.

Soit $\mathfrak{A}$ l'anneau des endomorphismes de M , $\mathfrak{B}$ l'anneau des endomorphismes de E . On a la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1. - Les éléments $\alpha \in \mathfrak{A}$ (resp. $\beta \in \mathfrak{B}$) tels que $\operatorname{Ker} \alpha \neq 0$ (resp. $\operatorname{Ker} \beta \neq 0$) forment un idéal bilatère $\mathfrak{I}$ de $\mathfrak{A}$ (resp. un idéal bilatère $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{B}$) .

Il suffit de démontrer la propriété pour $\mathfrak{A}$ puisque E est comme M un A-module irréductible. Soit $\alpha \in \mathfrak{I}$, $\alpha' \in \mathfrak{I}$, on a $\operatorname{Ker}(\alpha - \alpha') \supseteq \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \alpha' \neq 0$, d'où $\alpha - \alpha' \in \mathfrak{I}$. Supposons $\alpha \in \mathfrak{I}$, $\alpha' \in \mathfrak{A}$; on a $\operatorname{Ker} \alpha\alpha' \supseteq \operatorname{Ker} \alpha$ [1], d'où $\alpha\alpha' \in \mathfrak{I}$. Pour montrer que $\alpha'\alpha \in \mathfrak{I}$, considérons $x \neq 0$, $x \in M$, tel que $x\alpha = 0$; si $\alpha' \neq 0$, il existe $y \in M$ tel que $y\alpha' \neq 0$, d'où $0 \neq ax = by\alpha' \in M$ avec $a \in A$, $b \in A$. On en déduit $by\alpha'\alpha = 0$ avec $by \neq 0$, d'où $\alpha'\alpha \in \mathfrak{I}$; si $\alpha' = 0$, on a $\alpha'\alpha = 0$ et $\operatorname{Ker} \alpha'\alpha = M$, d'où $\alpha'\alpha \in \mathfrak{I}$.

THÉORÈME 1. - L'anneau quotient $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ est un corps K .

Soit $\bar{\beta} \neq 0$, $\bar{\beta} \in \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$. On a donc $\beta \notin \mathfrak{J}$ et par suite $\operatorname{Ker} \beta = 0$. Il en résulte que β est un automorphisme de E (cf. P. GABRIEL [5] : $E\beta$ est isomorphe à E donc injectif comme E ; mais E étant indécomposable on a $E\beta = E$, et β est une surjection).

En désignant par β' l'automorphisme inverse, on aura $\beta\beta' = \beta'\beta = 1$ d'où $\bar{\beta}\bar{\beta}' = \bar{\beta}'\bar{\beta} = \bar{1}$ dans $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$. L'anneau $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ est bien un corps K .

On démontre aisément que $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ est un anneau d'intégrité plongé dans K , mais cette propriété ne sera pas utilisée dans la suite.

DÉFINITION 1. - Le corps K s'appelle corps $K(M)$ associé au module irréductible M .

Il est intéressant de donner une construction du corps K ne faisant pas intervenir l'enveloppe injective E de M . On y parvient au moyen de la notion d'endomorphisme partiel utilisée avec succès par LAMBEK et FINDLAY [4] dans un autre but. On appelle endomorphisme partiel de M le couple (X , α) formé par un sous-module $X \neq 0$ et un homomorphisme $\alpha : X \to M$. La relation R définie par $(X , \alpha) \, R (X' , \alpha')$ s'il existe $Z \subseteq X \cap X'$, $Z \neq 0$, avec $Z(\alpha - \alpha') = 0$, est une relation d'équivalence dans l'ensemble P des endomorphismes partiels. Soit L l'ensemble quotient P/R . On définit de façon naturelle une addition et une multiplication dans L pour en faire un anneau. L'élément nul de L est la classe

---

(1) Nous écrivons $\alpha\alpha'$ pour $\alpha' \circ \alpha$ et $x\alpha$ pour $\alpha(x)$, $x \in M$. Ces notations sont inspirées par le cas particulier d'un anneau A considéré comme A-module à gauche.

de $(Y , 0)$; soit alors $\xi = cl(X , \alpha) = 0$, il existe $Z \neq 0$ tel que $Z \subseteq X \cap Y$ et $Z\alpha = 0$, donc $\mathrm{Ker}\, \alpha \neq 0$. Si donc ξ est non nul, on a $\mathrm{Ker}\, \alpha = 0$ et α est une bijection de X sur $X\alpha$; si α' est la bijection inverse, on aura en posant $\xi' = cl(X\alpha , \alpha')$, $\xi\xi' = \xi'\xi = 1$. L'anneau L est donc un corps. Pour montrer que ce corps est isomorphe à K , on fait correspondre à la classe ξ de (X , α) une extension β de α à l'enveloppe injective E de M , puis la classe de β modulo $\mathfrak{J}$. On vérifie que cette application $\xi \to \bar{\beta}$ ne dépend ni du représentant (X , α) choisi dans la classe ξ , ni du choix de l'extension β considérée, puis qu'elle réalise un isomorphisme de L sur K .

Une autre méthode de construction du corps K , au moyen de M seulement, consiste à considérer une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples (x , y) d'éléments de M , tels que $x \neq 0$, $0 \,^{\bullet}.\, x \subseteq 0 \,^{\bullet}.\, y$ (2). Cette relation d'équivalence R est la suivante :

$$(x , y)\, R\, (x' , y') \iff \exists\ a , a' \in A \ \text{ tels que } \begin{cases} ax = a' x' \neq 0 \\ ay = a' y' \end{cases} .$$

Je n'entre pas dans le détail de la construction de la somme et du produit de deux classes. Remarquons que si M est un anneau A régulier à gauche au sens de ORE, on a toujours $0 \,^{\bullet}.\, x \subseteq 0 \,^{\bullet}.\, y$ puisque $0 \,^{\bullet}.\, x = 0$ si $x \neq 0$. On retrouve alors comme cas particulier la construction du corps des quotients à gauche de A (cf. P. DUBREIL [3]), tandis que la méthode par endomorphismes partiels redonne dans ce cas particulier la méthode d'ASANO [1].

2. Coeur d'un A-module.

1° Cas d'un A-module injectif indécomposable E .

DÉFINITION 2.1. - On appelle coeur de E l'intersection de tous les noyaux non nuls des endomorphismes de E .

$$C(E) = \bigcap_{\beta \in \mathfrak{J}} \mathrm{Ker}\, \beta \quad .$$

Le théorème suivant donne une propriété caractéristique des éléments de $C(E)$.

THÉORÈME 2.1. - L'ensemble $C^*(E)$ des éléments non nuls de $C(E)$ coïncide avec l'ensemble C' des éléments non nuls $x \in E$ tels que l'idéal à gauche $0 \,^{\bullet}.\, x$ soit maximal (dans l'ensemble des annulateurs des éléments non nuls de E) .

---

(2) $0 \,^{\bullet}.\, x$ désigne l'annulateur à gauche de x , c'est-à-dire l'idéal à gauche formé des éléments $a \in A$ tels que $ax = 0$.

$$C^*(E) = \{x \in E \ , \ x \neq 0 \ , \ 0 \overset{\bullet}{.} x \ \text{maximal}\} \ .$$

En effet, soit $x \in C'$. Considérons un endomorphisme β de E tel que $\operatorname{Ker} \beta \neq 0$. Il existe donc $y \in E$, $y \neq 0$, avec $y\beta = 0$. Montrons que $x \in \operatorname{Ker} \beta$. Sinon, on aurait $x\beta \neq 0$. On en déduirait $ax = by \neq 0$ avec $ax\beta = by\beta = 0$, c'est-à-dire $a \in 0 \overset{\bullet}{.} x\beta$ avec $a \notin 0 \overset{\bullet}{.} x$, d'où $0 \overset{\bullet}{.} x \subset 0 \overset{\bullet}{.} x\beta$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x \in C'$. On a donc $C' \subseteq C^*$.

Réciproquement, soit $x \in C^*$. Si $0 \overset{\bullet}{.} x$ n'était pas annulateur maximal, il existerait $y \neq 0$ tel que $0 \overset{\bullet}{.} x \subset 0 \overset{\bullet}{.} y$, d'où $a \in A$ tel que $ax \neq 0$, $ay = 0$. E étant injectif, l'homomorphisme de Ax dans Ay (donc dans E) défini par $ux \to uy$, peut être étendu à un endomorphisme β de E tel que $y = x\beta$ et $ay = ax\beta = 0$, $ax \neq 0$. Il en résulterait $\operatorname{Ker} \beta \neq 0$ d'où, puisque $x \in C^*$, $x\beta = 0$, donc $y = 0$, en contradiction avec l'hypothèse $y \neq 0$. On a bien $C^*(E) \subset C'$.

Nous supposerons ici, et dans la suite, que A <u>est un anneau noethérien à gauche</u>. Il en résulte l'existence d'idéaux maximaux dans la famille des annulateurs $0 \overset{\bullet}{.} x$ $(x \neq 0 \ , \ x \in E)$, donc l'existence d'éléments non nuls dans $C(E)$.

COROLLAIRE 1. - *Le coeur* $C(E)$ *est un sous-module non nul de* E.

COROLLAIRE 2. - *Les éléments* x *tels que* $0 \overset{\bullet}{.} x$ *soit annulateur maximal* $(x \neq 0 \ , \ x \in E)$ *forment un sous-module de* E.

Enfin :

THÉORÈME 2.2. - *Le coeur* $C(E)$ *possède une structure d'espace vectoriel à droite sur le corps* K *défini au paragraphe* 1.

En effet, il suffit de prendre pour addition celle de $C(E)$ et pour opération externe :

$$x \in C(E) \ , \quad \bar{\beta} \in K \ , \quad x\bar{\beta} = x\beta \ .$$

Cette définition est indépendante du choix de β dans sa classe modulo $\mathcal{J}$, car, si $\bar{\beta} = \bar{\beta'}$, on a $\beta - \beta' = \gamma \in \mathcal{J}$ d'où $x(\beta - \beta') = x\gamma = 0$. De plus, $x\beta\mathcal{J} \subseteq x\mathcal{J} = 0$, d'où $x\beta \in C(E)$.

2° <u>Cas d'un A-module</u> M <u>irréductible</u> (A-noethérien à gauche).

DÉFINITION 2.2. - On appelle coeur du module M, le sous-module

$$C(M) = C(E) \cap M$$

$C(E)$ étant le coeur de l'enveloppe injective E de M.

On a $C(M) \neq 0$ d'après le corollaire 1 du théorème 2.1. Nous allons donner une propriété caractéristique de $C(M)$ au moyen de la notion de sous-module isotypique dans M. Rappelons qu'un sous-module X de M est dit isotypique dans M si l'enveloppe injective $E(M/X)$ est somme directe d'un nombre fini de modules injectifs indécomposables isomorphes entre eux. Si Π est leur classe d'isomorphie commune, on dit que X est Π-isotypique. (cf. P. GABRIEL [5]) (3). En particulier, comme 0 est $\cap$-irréductible dans M, 0 est isotypique dans M puisque $E(M) = E$ est un injectif indécomposable. 0 est donc Π-isotypique dans M, Π étant le type défini par E. Nous allons caractériser tous les sous-modules Π-isotypiques de M et en déduire une propriété caractéristique du coeur $C(M)$.

THÉORÈME 2.3. - Pour que I soit un sous-module Π-isotypique de M, il faut et il suffit qu'il soit de la forme :

$$I = M \cap \operatorname{Ker} \beta_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} \beta_n \quad .$$

où les β_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ sont des endomorphismes de E en nombre fini tels que $\operatorname{Ker} \beta_i \not\supseteq M$.

Condition nécessaire. - Soit $0 \subseteq I \subset M$, où I est un sous-module Π-isotypique de M. On a donc :

$$M/I \subseteq E(M/I) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$$

les E_i étant des injectifs indécomposables isomorphes à E. Considérons l'homomorphisme canonique φ de M sur M/I, donc dans $E(M/I)$; composons-le avec la projection p_1 de $E(M/I)$ sur E_1 parallèlement à $E_2 \oplus \dots \oplus E_n$, puis avec la bijection σ_1 de E_1 sur E. On obtient un homomorphisme $\varphi p_1 \sigma_1 : M \to E$, qui peut être étendu, puisque E est injectif, à un endomorphisme β_1 de E. On définit de même des endomorphismes β_i de E par extension des homomorphismes $\varphi p_i \sigma_i : M \to E$. Si $x \in I$, on a $x\varphi = 0$ d'où $x\beta_i = 0$ et par suite $I \subseteq M \cap \operatorname{Ker} \beta_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} \beta_n$. Inversement supposons $x \in M \cap \operatorname{Ker} \beta_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} \beta_n$. On a donc $x\varphi p_i \sigma_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, d'où, puisque les σ_i sont des bijections, $x\varphi p_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, puis $x\varphi = 0$, c'est-à-dire $x \in I$.

(3) On sait qu'un module isotypique dans M est en particulier tertiaire au sens de la théorie de L. LESIEUR et R. CROISOT [10].

La condition du théorème 2.3 est donc nécessaire.

Condition suffisante. – Montrons que tout sous-module de M de la forme $I = M \cap \operatorname{Ker}\beta_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker}\beta_n$ est Π-isotypique dans M. Il suffit de le montrer pour $J = M \cap \operatorname{Ker}\beta_1$; car on sait que l'intersection d'un nombre fini de sous-modules Π-isotypiques dans M est Π-isotypique. Or on a :

$$M/J \cong (\operatorname{Ker}\beta_1 + M)/\operatorname{Ker}\beta_1 \subseteq E/\operatorname{Ker}\beta_1 \cong E\beta_1 \subseteq E$$

$E(M/J)$ est donc contenu dans l'enveloppe injective de E, qui est E. Comme E est injectif indécomposable, $E(M/J)$ est isomorphe à E (4) et par suite M/J est bien Π-isotypique dans M (et même $\cap$-irréductible de type Π). La condition est bien suffisante.

Comme on a $C(M) = M \cap (\bigcap_{\beta\in J} \operatorname{Ker}\beta)$, on voit que $C(M)$ est l'intersection des sous-modules $I = M \cap \operatorname{Ker}\beta$ tels que $I \neq 0$, ou encore l'intersection des sous-modules Π-isotypiques non nuls de M d'après le théorème 2.3. D'où :

THÉORÈME 2.4. – Le coeur $C(M)$ du module M, supposé $\cap$-irréductible donc Π-isotypique, est l'intersection des sous-modules non nuls Π-isotypiques dans M.

REMARQUE. – Il peut se faire qu'il n'y ait aùcun sous-module Π-isotypique non nul dans M. Dans ce cas on a pour tout $\beta \in \mathcal{J}$, $\operatorname{Ker}\beta \supseteq M$, et par suite $M \subseteq C(E)$, d'où $C(M) = M$.

3° Exemples.

EXEMPLE 1. – Soit A un anneau d'intégrité noethérien à gauche. Considérons $A = M$ comme un A-module à gauche.

D'après les résultats de L. LESIEUR et R. CROISOT sur les anneaux premiers noethériens à gauche [11], M est $\cap$-irréductible et son enveloppe injective comme A-module est le corps des quotients à gauche $K = E$. L'annulateur $0 \,{}^{\bullet}\!.\, x$ est toujours nul si $x \neq 0$, et par suite est maximal. On a donc d'après le théorème 2.1 :

$$C(E) = E ,$$

et par suite

$$C(M) = M \cap C(E) = M \quad .$$

---

(4) Ceci suppose que $E(M/J)$ ne soit pas nul, donc que M/J ne soit pas nul, ou encore $J \neq M$, soit $M \not\subseteq \operatorname{Ker}\beta_1$.

EXEMPLE 2. - Soit M un A-module $\cap$-irréductible, A étant un anneau <u>commutatif noethérien</u>. 0 étant irréductible est Π-isotypique, donc tertiaire et par suite, A étant commutatif, primaire. Si $\mathcal{P}$ est l'idéal premier associé, 0 est donc $\mathcal{P}$-primaire dans M. D'après un mémoire de E. MATLIS [12], exposé en particulier par P. GABRIEL [5], les sous-modules Π-isotypiques de M coïncident avec les sous-modules $\mathcal{P}$-primaires. Or le sous-module $0 \mathbin{.\!\raisebox{0.5ex}{.}} \mathcal{P}$ formé par les éléments $x \in M$ tels que $\mathcal{P}x = 0$ est un sous-module $\mathcal{P}$-primaire non nul. Donc, d'après le théorème 2.4 , le coeur $C(M)$ qui est ici l'intersection des sous-modules $\mathcal{P}$-primaires non nuls de M, est contenu dans $0 \mathbin{.\!\raisebox{0.5ex}{.}} \mathcal{P}$. Si on avait $C(M) \subset 0 \mathbin{.\!\raisebox{0.5ex}{.}} \mathcal{P}$, il existerait un sous-module $\mathcal{P}$-primaire $Q \neq 0$ tel que $0 \mathbin{.\!\raisebox{0.5ex}{.}} \mathcal{P} \not\subseteq Q$, donc un élément x tel que $x \notin Q$, $x \in 0 \mathbin{.\!\raisebox{0.5ex}{.}} \mathcal{P}$. Considérons $Q \cap Ax$. Soit $y = ax \in Q$. Comme $x \notin Q$ qui est $\mathcal{P}$-primaire, on a : $a \in \mathcal{P}$ d'où $y = ax = 0$ puisque $x \in 0 \mathbin{.\!\raisebox{0.5ex}{.}} \mathcal{P}$. On en déduit $Q \cap Ax = 0$, ce qui est impossible si 0 est $\cap$-irréductible. D'où $C(M) = 0 \mathbin{.\!\raisebox{0.5ex}{.}} \mathcal{P}$.

THÉORÈME 2.5. - A <u>étant un anneau commutatif noethérien, si</u> M <u>est un</u> A-<u>module irréductible, donc</u> $\mathcal{P}$-<u>primaire, le coeur de</u> M <u>est le sous-module</u> :

$$C(M) = 0 \mathbin{.\!\raisebox{0.5ex}{.}} \mathcal{P} \quad .$$

3. <u>Cas d'un module quelconque</u>.

Indiquons certains des résultats obtenus lorsque A est un anneau noethérien à gauche, et M un A-module vérifiant la condition suivante :

(1) Toute somme directe de sous-modules dans M est finie .

Cette condition est remplie en particulier si M est un module de type fini sur un anneau noethérien à gauche.

Soit E l'enveloppe injective de M. La condition (1) entraîne :

(1)' $$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$$

E_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ étant un injectif indécomposable.

$\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{B}$) sont les anneaux d'endomorphismes de M (resp. E) .

$\mathfrak{J}$ désigne l'idéal de $\mathfrak{a}$ formé des éléments de $\mathfrak{a}$, α tels que $\operatorname{Ker} \alpha$ soit <u>essentiel</u> dans M [5].

---

[5] On rappelle que $\operatorname{Ker} \alpha$ est essentiel dans M si $\operatorname{Ker} \alpha \cap X = 0$ entraîne $X = 0$, X étant un sous-module de M. Si M est $\cap$-irréductible (cas du § 1), cette condition équivaut à $\operatorname{Ker} \alpha \neq 0$. Il n'en est plus de même dans le cas plus général de la condition (1). R. E. JOHNSON [9] dit "<u>large</u>" pour essentiel.

$\mathfrak{J}$ désigne l'idéal de $\mathfrak{B}$ formé des éléments β tels que $\operatorname{Ker} \beta$ soit essentiel dans E .

THÉORÈME 3.1. - <u>L'anneau</u> $S = \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ <u>est un anneau semi-simple. Il est simple si</u> M <u>est isotypique</u>.

Nous dirons que l'anneau semi-simple (ou simple) S est <u>l'anneau</u> $S(M)$ <u>associé</u> à M . Il généralise la notion de corps $K(M)$ associé à un module irréductible (§ 1). Si M est isotypique, les injectifs E_i dans la relation (1)' sont tous isomorphes indécomposables. Ils définissent par la méthode du paragraphe 1 des corps K isomorphes. L'anneau $S(M)$ peut alors être réalisé par un anneau de matrices carrées d'ordre n sur l'un de ces corps K .

On peut d'ailleurs donner une construction de l'anneau $S(M)$ au moyen de M lui-même, par une relation d'équivalence dans l'ensemble des endomorphismes partiels essentiels de M , c'est-à-dire les couples (X , α) formés par un sous-module X essentiel dans M et un homomorphisme $\alpha : X \to M$. Cette relation d'équivalence R est : $(X , \alpha) R (X' , \alpha')$, s'il existe un sous-module $Z \subseteq X \cap Y$, essentiel dans M , tel que $Z(\alpha - \alpha') = 0$. Cette construction a été indiquée par P. GABRIEL dans son exposé sur la localisation dans les anneaux non commutatifs [6] pour établir que l'anneau $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ est seulement régulier au sens de NEUMANN si on ne fait aucune hypothèse sur A ou M .

DÉFINITION 3.1. - On appelle <u>coeur du module injectif</u> E le sous-module :

$$C(E) = \bigcap_{\beta \in \mathfrak{J}} \operatorname{Ker} \beta$$

intersection des noyaux essentiels des endomorphismes de E . On appelle <u>coeur</u> $C(M)$, l'intersection $C(M) = M \cap C(E)$. Le coeur $C(E)$ peut être caractérisé par une propriété des éléments :

THÉORÈME 3.2. - <u>L'ensemble</u> $C^*(E)$ <u>des éléments non nuls de</u> $C(E)$ <u>est engendré</u> (6) <u>par les éléments</u> x <u>de</u> E <u>tels que</u> $0 \,{}^{\bullet}\!.\, x$ <u>soit un annulateur maximal</u> (pour $x \neq 0$, $x \in E$) .

On en déduit en particulier que $C(E)$ et $C(M)$ sont non nuls si A est noethérien à gauche. Mais on a besoin d'une propriété plus forte pour les applications que nous avons en vue. Cette propriété est vraie en particulier pour les modules isotypiques, auxquels nous nous limiterons maintenant dans la suite de l'exposé.

---

(6) Plus précisément, tout $x \in C^*(E)$ est la somme de n éléments x_i au plus ayant la propriété $x_i \neq 0$, $0 \,{}^{\bullet}\!.\, x_i$ maximal.

Nous supposerons donc :

M <u>est un</u> A-<u>module isotypique</u>.

(Les E_i figurant dans (1)' sont isomorphes ; si Π est leur classe d'isomorphie, nous dirons que M est Π-isotypique).

On a alors la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 3.1. - $C(E) = C(E_1) \oplus \dots \oplus C(E_n)$.

Le coeur $C(E)$ est alors la somme directe des coeurs des sous-modules injectifs indécomposables E_i qui ont été étudiés au paragraphe 2. On en déduit en particulier :

PROPRIÉTÉ 3.2. - <u>Le coeur</u> $C(E)$ <u>est essentiel dans</u> E ; <u>le coeur</u> $C(M)$ <u>est essentiel dans</u> M .

On peut caractériser les sous-modules Π-isotypiques de M comme dans le cas irréductible :

THÉORÈME 3.3. - <u>Pour que</u> I <u>soit un sous-module</u> Π-<u>isotypique de</u> M , <u>il faut et il suffit qu'il soit de la forme</u> :

$$I = M \cap \operatorname{Ker} \beta_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} \beta_p$$

où β_i $(i = 1 , \dots , p)$ est un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Ker} \beta_i \not\supset M$.

On en déduit immédiatement :

THÉORÈME 3.4. - <u>Le coeur</u> $C(M)$ <u>est l'intersection de tous les sous-modules</u> Π-<u>isotypiques essentiels dans</u> M .

En particulier, si M est un module de type fini sur un anneau A commutatif noethérien et si 0 est primaire dans M (on dit alors que M est $\mathfrak{P}$-primaire), <u>le coeur</u> $C(M)$ <u>coïncide avec l'intersection de tous les sous-modules</u> $\mathfrak{P}$-<u>primaires essentiels de</u> M <u>et il est égal au sous-module</u> $0 : \mathfrak{P}$. Mais on sait dans ce cas que les sous-modules $\mathfrak{P}$-primaires de $0 : \mathfrak{P}$ forment un treillis géométrique de longueur finie n , isomorphe au treillis des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des quotients de $A/\mathfrak{P}$. C'est cette propriété fondamentale que l'on peut transposer dans le cas non commutatif par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.5. - Les sous-modules Π-isotypiques dans le coeur $C(M)$ forment un treillis géométrique de longueur finie n, dual du treillis des idéaux à droite de l'anneau simple $S(M)$.

On en déduit en particulier l'application suivante au problème de l'irréductibilité d'un A-module M dans le cas non commutatif, qui est à l'origine des recherches précédentes. Pour que M soit irréductible, il faut d'abord que 0 soit isotypique dans M. Si Π est le type de l'enveloppe injective $E(M)$, nous considérons donc un module Π-isotypique. Pour que M soit irréductible, il faut alors et il suffit, avec les notations précédentes, que $n = 1$, donc d'après le théorème 3.5, qu'il n'existe aucun sous-module non nul Π-isotypique dans $C(M)$.

THÉORÈME 3.6. - Pour que M soit irréductible, il faut et il suffit que M soit isotypique et que, si M est Π-isotypique, il n'existe aucun sous-module non nul Π-isotypique dans $C(M)$.

Si A est commutatif, on retrouve alors la condition de GRÖBNER : il n'y a aucun sous-module $\wp$-primaire non nul dans $0 \cdot' \wp$.

Nous nous sommes limités ici au cas d'un module isotypique, avec anneau A noethérien à gauche. La définition du coeur $C(M)$ ou $C(E)$ peut évidemment être donnée dans le cas le plus général et conduire à d'autres applications avec des hypothèses différentes. Ces applications, ainsi que des compléments, feront l'objet d'une conférence ultérieure de R. CROISOT. Les résultats en seront résumés dans une prochaine note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ASANO (Keizo). - Über die Quotientenbildung von Schiefringen, J. math. Soc. Japan, t. 1, 1949, p. 73-78.

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] DUBREIL (Paul). - Algèbre, Tome 1, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[4] FINDLAY (G. D.) and LAMBEK (J.). - A generalized ring of quotients, I, II, Canadian math. Bull., t. 1, 1958, p. 77-85 et p. 155-167.

[5] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 12, 1958/59, n° 17, 32 p.

[6] GABRIEL (Pierre). - La localisation dans les anneaux non commutatifs, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 13, 1959/60, n° 2, 35 p.

[7] GOLDIE (A. W.). - The structure of prime rings under ascending chain conditions, Proc. London math. Soc., t. 8, 1958, p. 589-608.

[8] GOLDIE (A. W.). - Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London math. Soc. t. 10, 1960, p. 201-220.

[9] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Self injective rings, Canadian math. Bull., t. 2, 1959, p. 167-174.

[10] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I., Colloque d'algèbre supérieure, [1956. Bruxelles] ; p. 79-121. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[11] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Sur les anneaux premiers noethériens à gauche, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 76, 1959, p. 161-183.

[12] MATLIS (Eben). - Injective modules over noethérian rings, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 511-528.