Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Marthe Grandet

Dérivés d'un ensemble d'entiers algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 15, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A14_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 15

6 mars 1961

DÉRIVÉS D'UN ENSEMBLE D'ENTIERS ALGÉBRIQUES

par Mme Marthe GRANDET

Soit S l'ensemble des entiers algébriques θ, de valeur absolue supérieure à 1, n'ayant qu'un conjugué extérieur au cercle unité, tous les autres étant intérieurs à ce cercle. Cet ensemble est fermé [1], [5]. Nous allons étudier quelques propriétés des éléments de S' et S'', respectivement ensemble dérivé et ensemble dérivé second de S, propriétés qui permettent d'en trouver les plus petits éléments.

A tout nombre $\theta \in S$, on peut associer au moins une fraction rationnelle irréductible $A(z)/Q(z)$ possédant les propriétés suivantes :

1° Elle a le seul pôle $1/\theta$ à l'intérieur du cercle unité.

2° Son développement en série entière au voisinage de l'origine est à coefficients entiers rationnels.

3° Elle est bornée par 1 en module sur le cercle unité (qu'il y ait ou non identité).

Si l'on considère une suite de nombres $\theta_k \in S$, tendant vers une limite θ, à chaque nombre θ_k on peut associer au moins une fraction rationnelle $A_k(z)/Q_k(z)$ du type précédent ; ces fractions forment une famille normale de fonctions méromorphes dans $|z| < 1$. De la suite $A_k(z)/Q_k(z)$, nous pouvons extraire une suite partielle convergente dans $|z| < 1$, la limite de cette suite est alors une fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$ possédant les propriétés suivantes [1] :

1° Elle admet le seul pôle $1/\theta$ à l'intérieur du cercle unité.

2° Son développement en série entière au voisinage de l'origine est à coefficients entiers rationnels.

3° $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ pour $|z| = 1$, l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.

Nous verrons plus loin que l'existence d'une telle fraction rationnelle associée à θ caractérise les nombres $\theta \in S'$.

Auparavant nous allons associer aux fonctions $A(z)/Q(z) = f(z)$ des fractions rationnelles qui nous permettront d'écrire certaines inégalités sur les coefficients de leur développement en série entière. Nous distinguerons le cas B , où $|A(z)| \equiv |Q(z)|$ pour $|z| = 1$, et le cas A , où cette identité n'est pas réalisée ; dans le cas B , $A(z)$ et $Q(z)$ sont deux polynômes réciproques l'un de l'autre.

THÉORÈME 1. [2]. - Pour $1 \leq n \leq s$ si $|f(0)| \neq 1$ et $2 \leq n \leq s$ si $|f(0)| = 1$, il existe deux polynômes $D_n(z)$ et $E_n(z)$ et deux polynômes $D_n^*(z)$ et $E_n^*(z)$ de degré n tels que :

$$D_n(z) \equiv - z^n E_n(1/z)$$

$$D_n^*(z) \equiv z^n E_n^*(1/z)$$

et :

$$f(z) - \frac{D_n(z)}{E_n(z)} = (V_n - W_n)\, z^n + \dots$$

$$f(z) - \frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)} = (V_n - W_n^*)\, z^n + \dots \quad \text{si} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n \quad .$$

les fractions $\dfrac{D_n(z)}{E_n(z)}$ et $\dfrac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)}$ sont irréductibles.

s est infini dans le cas A , et est le degré commun de $A(z)$ et $Q(z)$ dans le cas B . Ces polynômes sont uniques.

De plus $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ ont un seul zéro τ_n et τ_n^* extérieur au cercle unité, et l'on a les inégalités suivantes.

$$W_n \leq V_n \leq W_n^*$$

$$\tau_n \leq \theta \leq \tau_n^*$$

la suite $W_n^* - W_n$ est décroissante et la série de terme général : $\left(W_n - \dfrac{W_n + W_n^*}{2}\right)^2$ converge.

Ces polynômes vérifient un certain nombre de relations de récurrence qui permettent de les obtenir simplement en connaissant les coefficients de développement de $f(z)$.

THÉORÈME 2.[3]. - Si $f(z)$ est une fraction rationnelle du type A, alors on a l'inégalité :

$$W_n + 1 \leq V_n \leq W_n^* - 1$$

pour $n \geq 2$ si $a \neq s$, et $n \geq \max(r+1, 2)$ si $a = s$, a et s étant les degrés respectifs de $A(z)$ et $Q(z)$. Et le nombre θ qui lui est associé appartient à S'.

Posons :

$$P(z) \equiv \varepsilon_1 z^s Q(1/z)$$

$$B(z) \equiv \varepsilon_1 z^a A(1/z)$$

où $\varepsilon_1 = \pm 1$ est choisi tel que $P(0) > 0$.

Considérons les polynômes

$$P_k(z) \equiv A(z) + \varepsilon z^{k+a-s} P(z)$$

$$Q_k(z) \equiv Q(z) + \varepsilon z^k B(z) \quad \text{où} \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad k + a - s \geq 1$$

le théorème de Rouché montre que $Q_k(z)$ a au plus un zéro intérieur au cercle unité. Nous allons voir qu'il en a effectivement un, et que $\frac{P_k(z)}{Q_k(z)}$ est une fraction rationnelle du type B.

Considérons les développements

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n \quad \text{et} \quad \frac{P_k(z)}{Q_k(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{k,n} z^n$$

ces développements sont à coefficients entiers rationnels. Et l'on a :

$$\frac{P_k(z)}{Q_k(z)} \equiv \frac{A(z)}{Q(z)} + \varepsilon z^K \frac{\Phi(z)}{Q(z)\, Q_k(z)}$$

où

a. Si $a > s$, $K = k \geq 1$

$$\Phi(z) \equiv z^{a-s}\, P(z)\, Q(z) - A(z)\, B(z) \quad .$$

b. Si $a < s$, $K = k + a - s \geqslant 1$

$$\Phi(z) \equiv P(z)\, Q(z) - z^{s-a}\, A(z)\, B(z) \quad .$$

c. Si $a = s$, $K = k + r \geqslant 1 + r$

$$\Phi(z) \equiv z^{-r}[\Phi(z)\, Q(z) - A(z)\, B(z)]$$

r étant tel que $\Phi(0) \neq 0$.

On a donc

$$u_{k,n} = V_n \quad \text{pour} \quad n < K$$

$$u_{k,K} = V_K + \varepsilon\Phi(0) \quad .$$

De plus, la fraction rationnelle $\dfrac{P_k(z)}{Q_k(z)}$ ne peut être holomorphe en vertu du principe de module maximum puisque :

$$\left|\frac{P_k(0)}{Q_k(0)}\right| = |V_0| \geqslant 1$$

elle admet donc un pôle $1/\theta_k$ à l'intérieur du cercle unité, c'est une fraction rationnelle du type B .

D'autre part on a :

$$W_K \leqslant u_{k,K} \leqslant W_K^*$$

et comme $|V_K - u_{k,K}| = |\Phi(0)| \geqslant 1$ il en résulte que :

$$W_K + 1 \leqslant V_K \leqslant W_K^* - 1$$

d'où le théorème annoncé.

θ , limite des θ_k , est donc un nombre de S' .

Nous allons voir qu'il existe un théorème analogue, relatif à certaines fractions rationnelles associées à des nombres $\theta \in S''$.

THÉORÈME 3 [4]. - A tout nombre $\theta \in S''$ on peut associer une fraction rationnelle du type A , telle que :

$$W_{n+2} \leq V_n \leq W_n^* - 2$$

pour $n \geq 2$ si $a \neq s$, et $n \geq \max(2, 1 + r')$ si $a = s$, où r ne dépend que de $A(z)/\theta(z)$ et peut facilement être calculé dans chaque cas.

Puisque la suite $W_n^* - W_n$ est décroissante, ceci entraîne que $W_n^* - W_n \geq 4$ pour tout $n \geq 2$.

Soit un nombre $\theta \in S''$, il peut être défini comme limite d'une suite de nombres $\theta_k \in S'$; à chaque nombre de cette suite on peut associer au moins une fraction rationnelle $A_k(z)/Q_k(z)$ de type A ; de cette suite on peut extraire une sous-suite tendant vers une fraction rationnelle $A(z)/Q(z)$ de type A , qui peut être associée à θ , une telle fraction sera dite de type A' . Nous noterons encore $A_k(z)/Q_k(z)$ les fractions de la sous-suite convergente. Nous allons construire deux suites de fonctions de type A , jouant le même rôle que les fonctions $P_k(z)/Q_k(z)$ dans la démonstration du théorème précédent.

Auparavant nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME. - Soient $F_k(z)$ une fonction rationnelle de type A ou B , et $A(z)/Q(z)$ une fraction rationnelle de type A . Si $F_k(z) - \frac{A(z)}{Q(z)} = z^K(\ldots)$, alors il existe deux polynômes $U_k(z)$ et $V_k(z)$ à coefficients rationnels, avec :

$$|U_k(z)| \leq |V_k(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1$$

l'égalité étant toujours vérifiée si $F_k(z)$ est de type B , et tels que :

$$F_k(z) = \frac{A(z)\,U_k(z) + z^{k+a-s}\,P(z)\,V_k(z)}{Q(z)\,U_k(z) + z^k\,B(z)\,V_k(z)}$$

de plus le nombre de pôles intérieurs au cercle unité de $V_k(z)\,|V_k(z)$ est borné par une constante qui ne dépend que de $A(z)/Q(z)$.

La fraction ainsi obtenue n'est pas nécessairement irréductible.

On peut toujours poser :

$$\frac{A_k(z)}{Q_k(z)} - \frac{A(z)}{Q(z)} \equiv z^K \frac{\Phi(z)\ V_k(z)}{Q(z)\ Q_k(z)}$$

$\Phi(z)$ étant le polynôme défini plus haut et $V_k(z)$ étant un polynôme à coefficients rationnels avec $V_k(0) \neq 0$ d'où :

$$A_k(z)\ Q(z) - A(z)\ Q_k(z) \equiv z^K\ \Phi(z)\ V_k(z)$$

$A(z)$ et $Q(z)$ étant premiers entre eux, il existe $R(z)$ et $T(z)$ à coefficients rationnels tels que :

$$Q(z)\ R(z) - A(z)\ T(z) \equiv 1 \quad .$$

D'où :

$$Q(z)\ [A_k(z) - z^K\ \Phi(z)\ V_k(z)\ R(z)] - A(z)\ [Q_k(z) - z^K\ \Phi(z)\ V_k(z)\ T(z)] \equiv 0$$

et :

$$A_k(z) \equiv A(z)\ U'_k(z) + z^K\ \Phi(z)\ V_k(z)\ R(z)$$

$$Q_k(z) \equiv Q(z)\ U'_k(z) + z^K\ \Phi(z)\ V_k(z)\ T(z) \quad .$$

$U'_k(z)$ étant un polynôme à coefficients rationnels.

En explicitant $\Phi(z)$, on obtient dans les trois cas possibles ($a > s$, $a < s$, $a = s$)

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} A_k(z) &\equiv A(z)\ U_k(z) + z^{k+a-s}\ P(z)\ V_k(z) \\ Q_k(z) &\equiv Q(z)\ U_k(z) + z^k\ B(z)\ V_k(z) \end{aligned}$$

toutefois si $a = s$, ces formules ne sont valables que si $K \geqslant r$, et dans tous les cas, k et K se correspondent comme plus haut. $U_k(z)$ est un polynôme à coefficients rationnels.

A partir des identités (I), on voit facilement que

$$|V_k(z)| \leqslant |U_k(z)| \quad \text{pour} \quad |z| = 1$$

cette inégalité devenant une égalité si $F_k(z)$ est de type B .

On remarque que, sous cette forme, la fraction obtenue n'est pas nécessairement irréductible, il peut y avoir simplification par un diviseur de $\Phi(z)$; d'où l'on déduit, par application du théorème de Rouché, la dernière partie de la proposition.

Les fractions $A_k(z)/Q_k(z)$, considérées plus haut, peuvent se mettre sous cette forme. Posons :

$$B_k(z) \equiv \varepsilon_1 \, z^{a_k} A_k(1/z)$$

$$P_k(z) \equiv \varepsilon_1 \, z^{s_k} Q_k(1/z)$$

a_k et s_k étant les degrés respectifs de $A_k(z)$ et $Q_k(z)$, les fractions $B_k(z)/Q_k(z)$ et $P_k(z)/Q_k(z)$ forment des suites dont on peut extraire des sous-suites convergeant respectivement vers $B'(z)/Q(z)$ et $A''(z)/Q(z)$, la première de ces fonctions étant de type A' et la seconde de type A . Pour ne pas alourdir les notations, nous noterons encore par k les indices pour lesquels les trois suites considérées convergent. On peut alors écrire :

$$B_k(z) \equiv B'(z) \, U'_k(z) + z^{k'+a'-s'} P(z) \, V'_k(z)$$

$$A_k(z) \equiv A(z) \, U_k(z) + z^{k+a-s} P(z) \, V_k(z)$$

$$P_k(z) \equiv A''(z) \, U''_k(z) + z^{k''+a''-s} P(z) \, V''_k(z)$$

$$Q_k(z) \equiv Q(z) \, U_k(z) + z^{k} B(z) \, V_k(z)$$

$$\equiv Q(z) \, U'_k(z) + z^{k'} A'(z) \, V'_k(z)$$

$$\equiv Q(z) \, U''_k(z) + z^{k''} B''(z) \, V''_k(z)$$

les polynômes $U_k(z)$ et $V_k(z)$, $U'_k(z)$ et $V'_k(z)$; $U''_k(z)$ et $V''_k(z)$ n'étant pas nécessairement premiers entre eux.

Formons maintenant les polynômes :

$$P_{nk}(z) \equiv A_k(z) + \varepsilon z^{n+a_k-s_k} P_k(z)$$

$$Q_{nk}(z) \equiv Q_k(z) + \varepsilon z^n B_k(z)$$

la fraction $P_{nk}(z)/Q_{nk}(z)$ est de type B , et est associée à un nombre $\theta_{nk} \in S$, si l'on fait tendre k vers l'infini, k étant fixé , elle tend vers une fraction $A_n(z)/Q_n(z)$ de type A , associée à un nombre $\theta_n \in S$, et quand n tend vers l'infini, la suite des fractions $A_n(z)/Q_n(z)$ tend vers $A(z)/Q(z)$. Nous allons voir, en étudiant la forme des fractions $A_n(z)/Q_n(z)$ que nous avons bien construit les deux suites cherchées.

Distinguons les différents cas possibles :

a. $\underline{a_k - s_k}$ est borné. - Dans ce cas, nous pouvons supposer $a_k - s_k = \delta$, entier positif, négatif ou nul.

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A(z) + z^{n+\delta} A''(z)}{Q(z) + \varepsilon z^n B'(z)}$$

donc :

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{A(z)}{Q(z)} = \varepsilon z^N \frac{\Phi_1(z)}{Q(z)\ Q_n(z)}$$

où

1° si $\delta > 0$, $\Phi_1(z) \equiv z^\delta Q(z) A''(z) - A(z) B'(z)$

$$N = n \geqslant 1 \quad .$$

2° Si $\delta < 0$ $\Phi_1(z) \equiv Q(z) A''(z) - z^{-\delta} A(z) B'(z)$

$$N = n + \delta \geqslant 1 \quad .$$

3° Si $\delta = 0$ $\Phi_1(z) \equiv z^{-r_1}[Q(z) A''(z) - A(z) B'(z)]$

$$N = n + r_1 \geqslant r_1 + 1$$

r_1 étant choisi tel que $\Phi_1(0) \neq 0$.

Dans ce dernier cas, si $a'' = a'$ et $a = s$, posons :

$$\Phi_2(z) \equiv [A(z)\, B''(z) - A'(z)\, Q(z)]\, z^{-r_2}$$

avec $\Phi_2(0) \neq 0$, et soit $r' = \max(r_1 , r_2)$.

Si l'on n'a pas deux égalités, on peut recommencer l'opération avec la suite $A_n(z)/Q_n(z)$, pour laquelle $\delta' = a'' - a' = 0$; dans ce cas, on peut convenir de prendre $r' = 0$.

On a donc bien le résultat annoncé

b. $\underline{a_k - s_k \to +\infty}$

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A(z)}{Q(z) + \varepsilon z^n B'(z)}$$

et l'on a l'inégalité voulue pour $n \geqslant 2$.

c. $\underline{a_k - s_k \to -\infty}$

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A(z) + \varepsilon z^n A''(z)}{Q(z)}$$

et l'inégalité a encore lieu pour $n \geqslant 2$.

<u>Application à la recherche des plus petits éléments des ensembles</u> S' <u>et</u> S" .

A partir du théorème 2, DUFRESNOY et PISOT [3] ont obtenu les nombres de S' qui sont inférieurs à 1 , 8 en utilisant les inégalités sur les coefficients que permettent d'écrire les relations de récurrence vérifiées par les polynômes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$, et en remarquant que si, a partir d'un certain rang, on a

$$W_n^* - W_n < 3$$

il ne peut y avoir qu'une seule fraction de type A correspondant au développement considéré. Ils ont ainsi démontré que :

<u>Les seules fractions de type</u> A <u>relatives à des nombres</u> $\theta \in S'$ <u>inférieurs à</u> 1 , 8 <u>sont</u> :

$$\frac{1-z^2}{1-z-z^2} \text{ et } \frac{1}{1-z-z^2} \; ; \; \frac{1-z+z^2-z^3}{1-2z+z^2-z^3} \text{ et } \frac{1-z+z^2}{1-2z+z^2-z^3} \; .$$

Mais cette méthode n'a pas permis d'obtenir tous les nombres de S' inférieurs à 2 ; par contre une méthode analogue basée sur le théorème 3 permet de montrer qu'il n'y a pas de nombre de S'' inférieur à 2. Or il est facile de voir que les fractions $\dfrac{1+z+\dots+z^{n-2}}{1-z-\dots-z^{n-1}}$ sont de type A, et correspondent à une suite de nombres $\theta_n \in S'$ et tendant vers 2, d'où l'on déduit que 2 <u>est le plus petit nombre de</u> S''.

Pour calculer des coefficients des développements des fractions cherchées on utilise les relations suivantes :

(1) $$D_{n+2}(z) \equiv (1+z)\, D_{n+1}(z) - z\,\frac{V_{n+1}-W_{n+1}}{V_n - W_n}\, D_n(z) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1$$

(2) $$W^*_{n+1} - W_{n+1} = 2\,\frac{D_{n+1}(1)}{D_n(1)}\,(V_n - W_n) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1$$

(3) $$W^*_{n+1} - W_{n+1} = \frac{4(W^*_n - V_n)(V_n - W_n)}{W^*_n - W_n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 3 \; .$$

De plus il faut $\tau_2 < 2$, d'où

(4) $$V_{n+1} - W_{n+1} < \frac{3}{2}\,\frac{D_{n+1}(2)}{D_n(2)}\,(V_n - W_n) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \; .$$

D'autre part pour que $A(z)/Q(z)$ soit de type A', il faut : $W^*_n - W_n \geqslant 4$ pour $n \geqslant 2$, il n'y aura qu'une fraction de ce type correspondant au développement considéré, si, à partir d'un certain rang : $W^*_n - W_n < 5$.

<u>Principe de déroulement des calculs</u>.

$$D_1(z) \equiv V_0 - z$$

$$D_1(2) = V_0 - 2 < 0 \text{ il faut donc } V_0 = 1 \; .$$

On a alors :

$$D_2(z) \equiv 1 + \frac{V_1}{2}\, z - z^2 \quad \text{et} \quad W_1 = 0$$

$$\tau_2 < 2 \text{ , donc } 0 < V_1 < 3 \text{ , donc } V_1 = 1 \text{ où } V_1 = 2 \quad .$$

Si $V_1 = 2$, on a

$$D_2(z) \equiv 1 + z - z^2 \quad \text{et} \quad W_2 = 2 \quad .$$

D'après (4), il faut $V_2 - W_2 < 3$, les valeurs possibles pour V_2 sont donc 3 et 4 . On voit facilement que si $V_2 = 3$, on ne peut pas obtenir de nombre de S" correspondant au développement considéré ; il faut donc prendre $V_2 = 4$, d'où

$$D_z(z) \equiv 1 + z + z^2 - z^3$$

et

$$W_3 = 6 \quad \text{et} \quad W_3^* - W_3 = 8$$

pour que

$$W_4^* - W_4 \geqslant 4 \quad \text{et} \quad \tau_2 \leqslant 2$$

il faut que

$$V_3 = 8 \quad .$$

On obtient donc le développement $(1 , 2 , 4 , 8 , \ldots)$ et l'on voit assez facilement que la fraction $\frac{1}{1 - 2z}$ est la seule fraction ayant ce développement et correspondant à un nombre de S" . En effet, on peut calculer les polynômes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ correspondant à cette fraction ainsi que les coefficients W_n et W_n^* . On trouve que :

$$W_n = 2^n - 2$$

$$W_n^* = 2^n + \frac{2n}{n - 2} \qquad \text{donc} \quad W_n^* - W_n = \frac{4(n - 1)}{n - 2}$$

$$D_n(1) = 1$$

$$D_n(2) = - 1 \quad .$$

On en déduit que, pour $n \geq 4$, 2^n est le seul nombre vérifiant les inégalités voulues.

Si $V_1 = 1$, les calculs sont plus compliqués du fait que pour la fraction $\frac{1 - z}{1 - 2z}$, $W_n^* - W_n \to \sqrt{5} + 3$, toutefois l'on peut calculer tous les coefficients, ainsi que les constantes r ou r' des fonctions de type A' , correspondant à des nombres θ , inférieurs à 2 , qui pourraient l'approcher, et on voit que $r' \leq 2$, il est alors aisé de voir que le seul développement possible est celui $\frac{1 - z}{1 - 2z}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les dérivés successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., t. 77, 1953, 1re partie, p. 129-136.

[2] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité ..., Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 72, 1955, p. 69-92.

[3] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les éléments d'accumulation d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., t. 78, 1955, 1re partie, p. 54-64.

[4] GRANDET (Marthe). - Sur un ensemble d'entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 1542-1543.

[5] SALEM (Raphaël). - A remarkable class of algebraic integers, Proof of a conjoncture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.