FRANÇOIS CHÂTELET

L'arithmétique des corps quadratiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1960-1961), exp. nº 11, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1960-1961__14_1_A10_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
14e année, 1960/61, n° 11
6 février 1961

L'ARITHMÉTIQUE DES CORPS QUADRATIQUES

par François CHÂTELET

[d'après Albert CHÂTELET]

Un important travail posthume d'Albert CHÂTELET paraîtra dans les mois prochains comme Monographie de l'Enseignement mathématique. Il est consacré à l'arithmétique des corps quadratiques.

Ce n'est pas seulement un exposé détaillé et accessible à tout étudiant qui ne connaîtrait pas les éléments de la théorie des nombres. C'est aussi un exposé original qui utilise des idées et des méthodes susceptibles d'être généralisées avec fruit à d'autres problèmes.

Une première idée consiste à construire les idéaux d'un corps quadratique au moyen d "idéaux canoniques" qui déterminent biunivoquement les classes du groupe des idéaux du corps par rapport au sous-groupe formé par les idéaux rationnels. La définition de ces idéaux canoniques est liée étroitement aux propriétés de certaines congruences (dans l'anneau des entiers rationnels). De façon précise, un idéal canonique peut être engendré par un entier rationnel m et un entier du corps de la forme $\theta + c$, où θ est une racine de l'équation "fondamentale" $F(x) = 0$, qui permet d'engendrer à la fois les nombres et les entiers du corps quadratique considéré, et où c est une racine de la congruence $F(c) \equiv 0 \pmod{m}$.

La seconde idée consiste à "associer" les idéaux canoniques engendrés par un même entier $\theta + c$ du corps et par deux entiers rationnels m et n tels que $F(c) = mn$. Si deux idéaux canoniques sont associés, le conjugué de l'un d'entre eux appartient à la même classe d'idéaux que l'autre (par rapport au sous-groupe formé par les idéaux principaux du corps). L'association précédente permet alors d'introduire un procédé de réduction dans les différentes classes d'idéaux du corps. On montre que chaque classe contient au moins un idéal réduit et que la recherche des idéaux réduits permet de construire toutes les classes.

En outre, si le corps quadratique est imaginaire, chaque classe ne contient qu'un idéal réduit. Les classes sont donc définies de manière univoque par les idéaux réduits.

Si le corps quadratique est réel, il peut exister plusieurs idéaux réduits dans une même classe. En généralisant la définition des idéaux réduits, on peut introduire dans chaque classe des idéaux semi-réduits, qui se groupent par "cycles". Chaque classe ne contient qu'un seul cycle d'idéaux semi-réduits. La construction de ces cycles permet de différencier les différentes classes. Elle permet aussi d'obtenir l'unité fondamentale du corps.
