Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Bernard Charles

# Sous-groupes de base des groupes abéliens primaires

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 13, n° 2 (1959-1960), exp. n° 17, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
13e année, 1959/60, n° 17



28 mars 1960

# SOUS-GROUPES DE BASE DES GROUPES ABÉLIENS PRIMAIRES

par Bernard CHARLES

Dans toute la suite, $G$ est un $p$-groupe abélien, c'est-à-dire un groupe abélien dont tous les éléments ont pour ordre une puissance de l'entier premier $p$. Nous supposons toujours que $G$ est réduit, c'est-à-dire sans sous-groupe du type $p^{\infty}$. Un groupe du type $p^{\infty}$ est un groupe isomorphe au groupe additif de $Q_p/Z$ où $Q_p$ est l'ensemble des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de $p$ et où $Z$ est l'ensemble des entiers.

Pour tout ordinal $\alpha$ nous définissons $p^{\alpha} G$ en posant $p^{\alpha+1} G = p(p^{\alpha} G)$ et si $\alpha$ est un ordinal limite $p^{\alpha} G = \bigcap_{\beta<\alpha} p^{\beta} G$. Nous désignons par $\tau$ le plus petit ordinal tel que $p^{\tau} G = 0$. Un groupe $G$ est dit borné s'il existe un entier $n$ tel que $p^n G \neq 0$.

Le socle $P$ de $G$ est le sous-groupe des éléments d'ordre $\leq p$. On peut considérer $P$ comme espace vectoriel sur le corps $Z/(p)$. Nous désignons toujours par $P_{\alpha}$ le sous-espace $P \cap p^{\alpha} G$. Les nombres $f(\alpha) = \dim P_{\alpha}/P_{\alpha+1}$ sont les invariants d'Ulm de $G$.

Les groupes $p^{\alpha} G/p^{\omega}(p^{\alpha} G)$ ($\alpha = 0$ ou ordinal limite et $\omega$ = premier ordinal limite) sont les facteurs d'Ulm de $G$.

Le socle de $G$ est dit décomposable s'il existe une suite de sous-espaces $Q_{\alpha}$ de $P$ telle que :

$$P_{\alpha} = Q_{\alpha} \oplus P_{\alpha+1} \qquad P = \bigoplus_{\alpha<\tau} Q_{\alpha} \quad .$$

(Il s'agit ici de somme directe finie).

Si $H$, $K$, ... sont des sous-ensembles de $G$, nous désignons par $\{H , K , \ldots\}$ le sous-groupe qu'ils engendrent.

Nous désignons toujours par $G_n$ le sous-groupe de $G$ formé des éléments de $G$ d'ordre $\leq p^n$.

Un sous-groupe $H$ de $G$ est dit pur si $nH = H \cap nG$ pour tout entier $n$.

## Les topologies $\mathcal{T}_{\alpha}$ et $\mathcal{T}'_{\alpha}$.

Étant donné un ordinal $\alpha$ on peut considérer la topologie $\mathcal{T}_{\alpha}$ définie par le système fondamental de voisinages de $0$ constitué par les $p^{\beta} G$ ($\beta < \alpha$).

Si $\alpha$ est un ordinal limite, le complété de $G$ pour la topologie $\mathcal{C}_\alpha$ contient des éléments d'ordre infini, de sorte qu'il est préférable de considérer la topologie $\mathcal{C}'_\alpha$ qui est la limite inductive des topologies induites sur les sous-groupes $G_n$ par la topologie $\mathcal{C}_\alpha$. Le complété de $\hat{G}$, qui est alors la "réunion" des complétés $\hat{G}_n$ des $G_n$, ne contient pas d'élément d'ordre infini.

A notre connaissance, on s'est jusqu'à présent limité à la considération de la topologie $\mathcal{C}_\omega$. Nous pensons que l'étude systématique des topologies $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}'_\alpha$ serait utile pour la théorie des groupes abéliens primaires. A titre indicatif, nous signalons les propriétés suivantes :

Supposons la topologie $\mathcal{C}'_\tau$ séparée, c'est-à-dire $\tau$ ordinal limite. Les sous-groupes $G_n$ sont fermés et, pour que $H \subset G$ soit fermé, il faut et il suffit que les $H \cap G_n$ soient fermés. Le complété $\hat{G}$ de $G$ pour $\mathcal{C}'_\tau$ a les mêmes facteurs d'Ulm que $G$, car pour tout $\alpha < \tau$ la topologie induite sur $G/p^\alpha G$ par $\mathcal{C}'_\tau$ est la topologie discrète. Si $G$ est dénombrable, $\hat{G}$ ne l'est pas, ce qui donne un exemple élémentaire de $p$-groupes non isomorphes ayant les mêmes facteurs d'Ulm.

<u>Sous-groupes de base de</u> $G$.

A partir de maintenant, nous ne considérons que les topologies $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\omega$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_\omega$.

DÉFINITION. - $B$ est un sous-groupe de base de $G$ s'il vérifie les trois conditions :

(1) $B$ est somme directe de groupes cycliques,

(2) $B$ est dense dans $G$ pour $\mathcal{C}'$ (ou pour $\mathcal{C}$),

(3) $B \cap p^\omega G = 0$.

Soit $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$ où $B_i$ est une somme directe de groupes cycliques d'ordre $p^{i+1}$. Nous posons $B'_n = \bigoplus_{i=1}^{n} B_i$ et $B''_n = \bigoplus_{i>n} B_i$ et nous désignons par $\overline{H}$ la fermeture de $H \subset G$ pour la topologie $\mathcal{C}'$. Comme $B'_n \cap p^{n+1} G = 0$, on en conclut que $B'_n$ est discret et on en déduit facilement :

(4) $G = \overline{B} = B'_n \oplus \overline{B''_n}$.

En désignant de façon générale par $S(H)$ le socle d'un sous-groupe $H$ de $G$, on en déduit :

(5) $S(G) = S(B_n') \oplus P_{n+1}$ .

Ces propriétés permettent d'indiquer une méthode pour obtenir l'ensemble de tous les sous-groupes de base de $G$ : pour chaque $n < \omega$ , on construit un sous-espace $Q_n$ de $P_n$ tel que $P_n = Q_n \oplus P_{n+1}$ puis un sous-groupe $B_n$ de $G$ de socle $Q_n$ et somme directe de groupes cycliques d'ordre $p^{n+1}$ . La somme directe des $B_n$ est un sous-groupe de base de $G$ et tous les sous-groupes de base de $G$ peuvent s'obtenir par cette construction.

La définition que nous avons donnée de la notion de sous-groupe de base diffère de celle donnée initialement par KULIKOV, mais nous la croyons plus maniable. La notion de sous-groupe de base a permis à KULIKOV de mettre en évidence une classe importante de $p$-groupes, à savoir ceux qui sont complets pour la topologie $\mathcal{C}'$ et qu'il appelle $p$-fermés. La condition d'être $p$-fermé implique $p^{\omega} G = 0$ , c'est-à-dire que $G$ ne possède pas d'éléments $\neq 0$ de hauteur infinie.

Structure des groupes abéliens primaires tels que $p^{\omega} G = 0$ .

Sur un tel groupe, la topologie $\mathcal{C}$ est séparée, et si $B$ est un sous-groupe de base de $G$ , on peut identifier $G$ avec un sous-groupe du complété $\hat{B}$ de $B$ : $B \subset G \subset \hat{B}$. Si $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ il est facile de vérifier que $\hat{B}$ est l'ensemble des suites bornées $(u_0 , u_1 , \dots , u_n , \dots)$ où $u_n \in B_n$ (une suite est dite bornée si l'ordre de ses éléments est borné par un nombre fixe).

THÉORÈME 1. - Tout endomorphisme $\theta$ de $G$ est continu pour $\mathcal{C}'$ . Tout homomorphisme ( resp. isomorphisme) de $B$ dans $\hat{B}$ se prolonge de façon unique à un homomorphisme ( resp. isomorphisme) de $\hat{B}$ dans $\hat{B}$ continu pour $\mathcal{C}'$ .

Un endomorphisme $\theta$ de $G$ laissant les sous-groupes $G_n$ invariants, il suffit de montrer que la restriction de $\theta$ aux $G_n$ est continue. Cela résulte de ce que, dans $G_n$ , on a un système fondamental de voisinages de $0$ formé par les sous-groupes $(p^k G) \cap G_n$ qui sont invariants pour tout endomorphisme.

La deuxième partie du théorème se démontre de façon analogue, et revient à remarquer que, si $\varphi$ est un homomorphisme de $B$ dans $\hat{B}$ la suite

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi(u_i)$$

est une suite de Cauchy si la suite des $u_i$ est bornée.

La notion de sous-groupe de base permet d'aborder de façon intéressante le problème de la structure des p-groupes sans élément $\neq 0$ de hauteur infinie. Si $B$ est un sous-groupe de base de $G$, nous avons vu que $B \subset G \subset \hat{B}$, c'est-à-dire que tout p-groupe $G$ est intermédiaire entre une somme directe de groupes cycliques et un p-groupe fermé. Nous avons démontré dans [1] le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Si on se donne un espace vectoriel $P$ sur le corps $Z/(p)$ avec une suite décroissante de sous-espaces $P_i$ tels que $\bigcap_i P_i = 0$ il existe un groupe $G$ de socle $P$ et tel que $P_i = P \cap p^i G$.

Pour démontrer ce théorème, on peut partir d'une suite de sous-espaces $Q_i \subset P_i$ tels que $P_i = Q_i \oplus P_{i+1}$ et construire $B_i$ de socle $Q_i$ et somme directe de groupes cycliques d'ordre $p^{i+1}$. On peut alors obtenir $G$ comme sous-groupe du complété de $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$ pour la topologie analogue à $\mathcal{C}'$ qu'on peut définir sur $B$ ( $P$ est identifié à un sous-espace du socle $\hat{P}$ de $\hat{B}$ ).

Le théorème 2 met en évidence deux problèmes importants que nous ne savons pas résoudre :

PROBLÈME 1. - Deux sous-groupes purs d'un p-groupe fermé $\hat{B}$ qui ont le même socle sont-ils isomorphes ?

PROBLÈME 2. - Trouver un système d'invariants pour la structure qui consiste en la donnée d'un espace vectoriel avec une suite décroissante de sous-espaces.

Si le problème 1 admettait une réponse positive, l'étude de la structure des p-groupes sans élément $\neq 0$ de hauteur infinie serait ramenée au problème 2. Dans le cas contraire, le problème 2 serait un problème intermédiaire qu'il faudrait de toute façon résoudre.

Dans [2], L. FUCHS signalait le résultat suivant de H. LEPTIN : soit $G_1$, $G_2$ tels que $B \subset G_1 \subset \hat{B}$, $B \subset G_2 \subset \hat{B}$. Les groupes $G_1$ et $G_2$ sont isomorphes si et seulement s'il existe un automorphisme de $\hat{B}$ qui transforme $G_1$ en $G_2$. On peut en donner une démonstration facile en utilisant la topologie $\mathcal{C}'$. Si $G_1$ et $G_2$ sont isomorphes, et si $\theta$ est un isomorphisme de $G_1$ sur $G_2$, $\theta$ se prolonge par continuité en un endomorphisme de $\hat{B}$. Comme $\theta(B)$ est un sous-groupe de base (il est dense dans $G_1$, donc dans $\hat{B}$ ) il est facile d'en déduire que $\theta$ se prolonge à un automorphisme.

Structure des groupes abéliens primaires (réduits).

Seule, la structure des p-groupes dénombrables est complètement connue (ULM, ZIPPIN) . Ces groupes sont déterminés à une isomorphie près par les invariants d'Ulm $f(\alpha)$ . La notion de sous-groupe de base perd une partie de son efficacité, car la topologie $\mathcal{T}'$ n'est pas séparée si $\tau > \omega$ .

Les groupes qui pourraient jouer le rôle des sommes directes de groupes cycliques dans l'étude des groupes sans élément $\neq 0$ de hauteur infinie nous semblent être les groupes à socle décomposable. Le théorème suivant justifie ce point de vue :

THÉORÈME 3. - Pour que le socle de $G$ soit décomposable, il suffit qu'il existe dans son socle $P$ une suite croissante de sous-espaces $R^n$ vérifiant les conditions :

1° $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = P$ ,

2° pour chaque $n$ , il n'existe qu'un nombre fini d'ordinaux $\alpha$ tels que

$$P_\alpha \cap R^n \neq P_{\alpha+1} \cap R^n . \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Comme $R^n \subset R^{n+1}$ on peut, pour chaque $\alpha$ , construire par récurrence sur $n$ une suite de sous-espaces $Q^n_\alpha$ de $P$ vérifiant :

$$(1) \qquad R^n \cap P_\alpha = Q^n_\alpha \oplus (R^n \cap P_{\alpha+1})$$

$$(2) \qquad Q^n_\alpha \subset Q^{n+1}_\alpha \qquad (\alpha < \tau) \quad .$$

Nous allons montrer que $R^n = \bigoplus_{\alpha<\tau} Q^n_\alpha$ . Pour cela, étant donné $u \in R^n$ , nous allons définir par récurrence sur $\alpha$ une suite $u_\alpha \in Q^n_\alpha$ telle que $u = \sum_{\alpha<\tau} u_\alpha$ . Notons qu'une telle somme aura un sens puisque tous les $Q^n_\alpha$ $(\alpha<\tau)$ sont nuls, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux.

1° On définit $u_0$ par $u - u_0 \in P_1$ .

2° Supposons définis les $u_\alpha$ pour $\alpha \leq \beta$ avec la condition

$$u - \sum_{\alpha\leq\beta} u_\alpha \in P_{\beta+1} \quad .$$

Il existe alors $u_{\beta+1} \in Q^n_{\beta+1}$ défini de façon unique par :

$$u - \sum_{\alpha\leq\beta+1} u_\alpha \in P_{\beta+2} \quad .$$

3° Supposons définis les $u_\alpha$ pour $\alpha < \beta$ où $\beta$ est un ordinal limite, avec les conditions :

$$u - \sum_{\alpha\leq\gamma} u_\alpha \in P_{\gamma+1} \qquad \forall \gamma < \beta \quad .$$

On a alors $u - \sum_{\alpha<\beta} u_\alpha \in \bigcap_{\gamma<\beta} P_\gamma = P_\beta$ ce qui permet de définir $u_\beta$ tel que $u - \sum_{\alpha\leq\beta} u_\alpha \in P_{\beta+1}$ .

On aura $u = \sum_{\alpha<\tau} u_\alpha$ puisque $P_\tau = 0$ , ce qui démontre que $R^n = \bigoplus_{\alpha<\tau} Q^n_\alpha$ .

Posons $Q_\alpha = \bigcup_n Q^n_\alpha$ , il vient :

$$P = \bigcup_n R^n = \bigcup_n \left( \bigoplus_{\alpha<\tau} Q^n_\alpha \right) = \bigoplus_{\alpha<\tau} Q_\alpha \quad .$$

Le socle de G est décomposable, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. - Si G est dénombrable, son socle est décomposable.

Si $P = \{u_0 , u_1 , \ldots , u_n , \ldots\}$ il suffit d'appliquer le théorème en prenant $R^n = \{u_0 , u_1 , \ldots , u_n\}$ .

Rappelons maintenant un résultat de KULIKOV : pour que G soit une somme directe de groupes cycliques, il faut et il suffit que G soit l'union d'une suite croissante de sous-groupes $H_n$ discrets pour la topologie $\mathcal{C}_\omega$ . Il résulte facilement du théorème 3 que cette condition est équivalente à : $p^\omega G = 0$ et le socle est décomposable.

Tout ceci montre bien que la classe des groupes à socle décomposable est celle qui s'impose comme objet d'étude dans la théorie des groupes abéliens primaires, pour dépasser les résultats de ULM, ZIPPIN.

PROBLÈME 3. - Les groupes abéliens primaires à socle décomposable sont-ils caractérisés par leurs invariants d'Ulm $f(\alpha)$ ?

On ne connaît pas la réponse à ce problème. L. FUCHS pense qu'elle est négative. Nous espérons qu'elle est positive, mais cela nous semble difficile à démontrer. Nous pensons que tout groupe primaire G contient des sous-groupes à socle décomposable et ayant les mêmes invariants d'Ulm. On pourrait espérer faire jouer à ces sous-groupes un rôle analogue aux sous-groupes de base définis par L. KULIKOV.

## Sous-groupes purs minimaux contenant un sous-groupe donné.

Soit G tel que $p^\omega G = 0$ , les deux problèmes suivants ont un lien avec ce qui précède :

PROBLÈME 4. - H étant un sous-groupe de G , existe-t-il des sous-groupes purs minimaux de G contenant H ?

PROBLÈME 5. - $H_1$ et $H_2$ étant deux sous-groupes purs minimaux contenant H existe-t-il un isomorphisme de $H_1$ sur $H_2$ qui prolonge l'identité dans $H$ ?

Si $H$ est contenu dans le socle de $G$, il existe toujours des sous-groupes purs de $G$ de socle $H$, de tels sous-groupes sont alors minimaux. Le problème 1 apparaît ainsi comme un cas particulier du problème 5.

Nous ne savons pas résoudre le problème 1 même dans le cas où $G$ est borné. Des résultats partiels sur ces questions paraîtront prochainement dans un article qui sera inséré dans le Bulletin de la Société mathématique de France.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] CHARLES (Bernard). - Etude des groupes abéliens primaires de type $\leq \omega$, Annales Universitatis saraviensis, t. 4, 1955, p. 184-199.

[2] FUCHS (Laszlo). - Strukturfragen in der Theorie der Abelschen Gruppen, Séminaire Dubreil, Dubreil-Jacotin et Pisot, t. 12, 1958/59 : Algèbre et Théorie des nombres, n° 25.