Jacques Levy-Bruhl

Opérateurs d'antisymétrisation

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1959-1960), exp. n° 11, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A1_0>

OPÉRATEURS D'ANTISYMÉTRISATION

par Jacques LÉVY-BRUHL

I. Antisymétriseurs

1. Définition d'un antisymétriseur.

Soit S_n le groupe symétrique des permutations de n indices $1, 2, n$. Nous désignerons par la notation :

(1) $$s = \binom{1 \ldots 2 \ldots p \ldots n}{i_1 \ldots i_2 \ldots i_p \ldots i_n}$$

la permutation qui transforme l'indice p en i_p et nous pourrons nous abstenir d'écrire les colonnes pour lesquelles $q = i_q$. Dans cette notation, on obtient encore la permutation s en permutant d'une manière quelconque les colonnes verticales du deuxième membre de (1).

Nous considérerons l'algèbre A_n du groupe S_n sur un anneau commutatif unitaire A, qui pourra être le plus souvent l'anneau Z des entiers rationnels.

Nous appellerons antisymétriseur des indices i_1, i_k pris dans cet ordre un élément de A_n, désigné par $a = (i_1 \wedge i_2 \wedge \ldots \wedge i_k)$ tel que

(2) $$a = (i_1 \wedge i_2 \wedge \ldots \wedge i_k) = \sum (-1)^{I+J} \binom{i_1 \ldots i_k}{j_1 \ldots j_k}$$

la somme $\sum$ étant étendue aux $k!$ permutations $j_1 \ldots j_k$ des indices i_1, i_k, I et J représentant respectivement les nombres d'inversions des suites d'indices i_p et j_p.

EXEMPLE. - Pour $n = 4$,

$$a = (3 \wedge 1 \wedge 4) = \binom{1234}{3214} + \binom{1234}{1243} + \binom{1234}{4231} - \binom{1234}{3241} - \binom{1234}{1234} - \binom{1234}{4213} .$$

Comme conséquences immédiates de la formule de la définition, on a les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 1. - Un antisymétriseur $(i_1 \wedge i_2 \wedge \ldots \wedge i_k)$ est transformé en son opposé dans l'algèbre A_n si on transpose deux indices.

PROPRIÉTÉ 2. - Si j_1, j_k est une permutation des indices i_1, i_k, on a :

$$(j_1 \wedge j_2 \wedge \ldots \wedge j_k) = (-1)^{I+J}(i_1 \wedge i_2 \wedge \ldots \wedge i_k) \quad ,$$

I et J étant respectivement les nombres d'inversions des suites i_p et j_p .

2. Sous-groupe lié à un antisymétriseur.

Soit $a = (i_1 \wedge i_2 \wedge \ldots \wedge i_k)$ un antisymétriseur. Soit une permutation s des k indices i , laissant invariants les $n - k$ autres indices. Si $si_p = m_p$ on peut écrire $a = \sum(-1)^{I+M} s$, où I et M sont les nombres respectifs d'inversions des suites i_p et m_p . Les permutations s au nombre de $k!$ forment évidemment un groupe G_a , sous-groupe de S_n . G_a est appelé groupe lié à l'antisymétriseur a .

PROPRIÉTÉ 3. - Si $s \in G_a$, on a $sa = as = (-1)^{I+M} a$ (avec les notations précédentes). Soient s et t deux permutations de G_a $si_p = m_p$ $ti_p = n_p$. Si $sti_p = q_p$, on a

$$I + Q = (I + M) + (I + N) = M + N \quad (\text{modulo } 2) \quad .$$

De même pour la permutation ts (d'après la théorie des permutations paires et impaires).

Par suite

$$sa = s\sum(-1)^{I+N} t = \sum(-1)^{I+N} st = \sum(-1)^{I+Q} st.(-1)^{I+N-M-N} = (-1)^{I+M} a \; .$$

Même raisonnement pour as .

PROPRIÉTÉ 4. - Deux antisymétriseurs a et b tels que tous les indices de b en nombre h figurent parmi les indices de a sont permutables, et on a :

$$ab = ba = h! \; a$$

(si les indices de b sont écrits dans le même ordre dans a).

Ici le groupe lié à b , G_b , est évidemment un sous-groupe de G_a . Toute permutation s telle que $si_p = m_p$ de G_b appartient à G_a et donc

$$as = sa = (-1)^{I+M} a \quad .$$

Mais $b = \sum(-1)^{I+M} s$. D'où $ba = ab = h! \; a$ le nombre de permutations de b étant h .

PROPRIÉTÉ 5. - Deux antisymétriseurs n'ayant aucun indice commun sont permutables. $ab = ba$.

Soient deux antisymétriseurs n'ayant aucun indice commun $a=(i_1 \wedge \dots \wedge i_k)$ et $b=(j_1 \wedge \dots \wedge j_h)$. Si $s \in G_b$ et si $si_p = m_p$ on a $b = \sum(-1)^{J+M} s$. Si $t \in G_a$ $ti_p = n_p$ $a = \sum(-1)^{I+N} t$. D'où $ab = \sum(-1)^{I+J+N+M} st$. Or $st = ts$ avec les hypothèses faites (le complexe $G_a G_b$ est ici un groupe).

3. Formule de Laplace. Déterminoïdes.

Soit $a = (i_1 \wedge \dots \wedge i_k)$ un antisymétriseur, le groupe lié à a étant G_a. Répartissons les indices en k groupements comprenant chacun p_k indices, p_k étant un nombre positif ou nul tel que

$$\sum_1^k p_i = k \quad .$$

On peut associer à cette décomposition de k un schéma comprenant p_i points dans la i-ième ligne. On peut d'ailleurs toujours faire en sorte, en changeant convenablement le signe de a, que les p_i forment une suite non croissante (schéma de Young). Dans ces conditions, nous désignerons par a_i l'antisymétriseur de p_i indices correspondant au i-ième groupement, en posant $a_i = e$ (élément neutre de S_n si $p_i = 0$), et formons le produit $a_1 a_2 \dots a_k$.

Si G_{a_i} est le groupe lié à l'antisymétriseur a_i, le produit $G_{a_1} \dots G_{a_k}$ est un groupe H, les G_{a_i} étant permutables, puisque les a_i n'ont aucun élément commun (propriété 5).

On peut répartir les permutations de a en classe à gauche de G_a suivant H. On a $a = \sum(-1)^{I+M} s_1 a_1 a_2 \dots a_k$ si $s_1 i_p = m_p$, la somme étant étendue à tous les représentants a_1 des classes à gauche de G_a suivant H. Le nombre de termes figurant dans la somme est $\frac{k!}{p_1! \dots p_k!}$ (ordre de G_a : ordre de H). Pour obtenir ces classes à gauche, il suffit de remplir toutes les cases du schéma de Young avec les indices m_1, m_p de toutes les manières possibles, deux permutations correspondant à la même classe si les m figurant dans chacune des lignes horizontales sont identiques à l'ordre près.

DEFINITION. - Nous appellerons <u>déterminoïde</u> un schéma d'Young où les cases sont garnies de deux indices, un indice supérieur et un indice inférieur, les indices inférieurs représentant une permutation des indices supérieurs.

Le déterminoïde sera par définition égal à $(-1)^{I+M} s\, a_1 a_2 \dots a_n$, où a_i est l'antisymétriseur des indices situés à la i-ième ligne, s la permutation $si_p = m_p$, I et M nombre d'inversions des suites i et m.

La formule de Laplace exprime que l'antisymétriseur $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ est une somme de déterminoïdes. Pratiquement, nous écrirons bout à bout les lignes du déterminoïde en les séparant par des traits verticaux.

Par exemple la notation $\left|{12 \atop 23}\right|\left|{34 \atop 14}\right| = \binom{1234}{2314}(1 \wedge 2)(3 \wedge 4)$ et on a la formule de Laplace :

$$(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4) = \left|{12 \atop 12}\right|\left|{34 \atop 34}\right| + \left|{12 \atop 13}\right|\left|{34 \atop 42}\right| + \left|{12 \atop 14}\right|\left|{34 \atop 23}\right| + \left|{12 \atop 23}\right|\left|{34 \atop 14}\right| + \left|{12 \atop 24}\right|\left|{34 \atop 31}\right| + \left|{12 \atop 34}\right|\left|{34 \atop 12}\right|.$$

4. Développement de Laplace duale.

Reprenant les notations du numéro 3, on peut répartir les permutations de a en classes à droite de G_a suivant H. Si les s_i constituent un système de représentants de classes à gauche, le système formé par les inverses s_i^{-1} est un ensemble de représentants de classes à droite de G_a suivant H. On obtient ainsi une nouvelle expression de l'antisymétriseur a sous forme de somme de déterminoïdes, qui se déduit de la précédente en permutant les indices supérieurs et les indices inférieurs, par exemple :

$$(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4) = \left|{12 \atop 12}\right|\left|{34 \atop 34}\right| + \left|{13 \atop 12}\right|\left|{42 \atop 34}\right| + \left|{14 \atop 12}\right|\left|{23 \atop 34}\right| + \left|{23 \atop 12}\right|\left|{14 \atop 34}\right| + \left|{24 \atop 12}\right|\left|{31 \atop 34}\right| + \left|{34 \atop 12}\right|\left|{12 \atop 34}\right|.$$

Un telle formule de Laplace sera appelée formule de Laplace duale : les indices inférieurs se succèdent dans le même ordre dans chaque déterminoïde alors que dans la première formule de Laplace, ce sont les indices supérieurs qui se succèdent dans le même ordre.

5. Produit d'un antisymétriseur par une permutation. Transmué d'un antisymétriseur.

Soit l'antisymétriseur $a = (i_1 \wedge \dots \wedge i_k)$ et une permutation s. Par définition sa est un déterminoïde. Si $si_p = m_p$ $(1 \leq p < n)$:

$$sa = \left|{i_1 \dots i_k \atop m_1 \dots m_k}\right|\left|{i_{k+1} \atop m_{k+1}}\right| \dots \left|{i_{k+p} \atop m_{k+p}}\right| .$$

Calculons maintenant as^{-1}. Partons de $m_1 \dots m_k \dots m_n$. On a $s^{-1} m_p = i_p$ et par suite :

$$as^{-1} = \left|{m_1 \dots m_k \atop i_1 \dots i_k}\right|\left|{m_{k+1} \atop i_{k+1}}\right| \dots \left|{m_{k+p} \atop i_{k+p}}\right|$$

se déduit de as en échangeant la ligne inférieure et la ligne supérieure. Il en résulte qu'on a : $sa = (m_1 \wedge \dots \wedge m_k)\, s$, où $m_p = si_p$. Nous poserons $sas^{-1} = a^s$. On a donc $sa = a^s s$. Le transmué a^s de l'antisymétriseur a par s s'obtient en remplaçant les éléments de a par leur transformé dans s.

CONSÉQUENCE. - Si D est un déterminoïde, $D = ta_1 a_2 \dots a_k$, t désignant une permutation et les a_i étant des antisymétriseurs sans indice commun. $a_1 \dots a_k t^{-1}$ se déduit de D en permutant ligne inférieure et ligne supérieure. s étant une permutation quelconque, on a $sDs^{-1} = D^s = sts^{-1} a_1^s \dots a_k^s$, formule qui donne le transmué du déterminoïde par s .

6. Produit de deux antisymétriseurs quelconques.

Nous allons voir que le produit de deux antisymétriseurs quelconques peut s'exprimer de deux manières comme somme de déterminoïdes. Soit :

$$a = (i_1 \wedge \dots \wedge i_k \wedge i'_1 \wedge \dots \wedge i'_{k'}) \qquad \text{et} \qquad b = (i_1 \wedge \dots \wedge i_k \wedge j_1 \wedge \dots \wedge j_h)$$

deux antisymétriseurs, où on a mis en évidence les indices communs i_1 , i_k . On peut calculer ab comme $\sum \in s_i\, b$ pour toutes les permutations $s_i \in G_a$. On obtient ainsi :

$$sb = \begin{vmatrix} i_1 & \dots & i_k & \dots & j_1 & \dots & j_h \\ si_1 & \dots & si_k & \dots & j_1 & \dots & j_h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i'_1 \\ si'_1 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} i'_{k'} \\ si'_{k'} \end{vmatrix} \quad .$$

Il reste à faire la sommation pour toutes les permutations s_i . On obtient ainsi :

$$(1) \qquad ab = k! \begin{vmatrix} i_1 & \dots & i_k & \dots & j_1 & \dots & j_h \\ m_1 & \dots & m_k & \dots & j_1 & \dots & j_h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i'_1 & \dots & i'_{k'} \\ m'_1 & \dots & m'_{k'} \end{vmatrix} (-1)^{M+I}$$

la somme $\sum$ étant étendue aux $\frac{k + k'}{k!\, k'!}$ combinaisons k à $km_1 \dots m_k$ des indices $i_{k,i'}$, M étant le nombre d'inversions de la suite $m_p\, m'_p$. Le nombre total de permutations contenues dans le développement est bien $(k + k')!\, (k + h)!$. On peut aussi faire le développement de manière duale. D'après le numéro 5, si on multiplie à gauche toutes les permutations de b par a , il viendra, par un raisonnement analogue au précédent :

$$(2) \qquad ab = k! \sum (-1)^{I+N} \begin{vmatrix} n_1 & \dots & n_k & i'_1 & \dots & i'_{k'} \\ i_1 & \dots & i_k & i'_1 & \dots & i'_{k'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n'_1 & \dots & n'_h \\ j_1 & \dots & j_h \end{vmatrix}$$

somme de $\frac{(k + h)}{k!\, h!}$ termes.

La somme $\sum$ est ici étendue à toutes les combinaisons $n_1 \dots n_k$ des indices i et j figurant dans b , pris k à k ($n'_1 \dots n'_k$ étant la combinaison complémentaire), I et N étant respectivement les nombres d'inversions des suites d'indices i et j , n et n' .

On obtient ainsi deux expressions distinctes de ab comme somme de déterminoïdes. Dans le développement (1), les indices supérieurs de tous les déterminoïdes sont ceux de b écrits dans un ordre fixe, et ceux de a ne figurant pas dans b . Les indices inférieurs appartenant à a sont permutés dans chaque terme de la somme.

Dans le développement (2), de façon duale, ce sont les indices inférieurs de a qui sont écrits dans un ordre fixe dans chaque déterminoïde, ainsi que les indices inférieurs de b qui ne figurent pas dans a . Les indices supérieurs appartenant à b sont permutés dans chaque terme de la somme.

EXEMPLE.

$$(1 \wedge 2 \wedge 3)(3 \wedge 4) = \left|{}^{12}_{12}\right|\left|{}^{34}_{34}\right| + \left|{}^{12}_{23}\right|\left|{}^{34}_{14}\right| + \left|{}^{12}_{31}\right|\left|{}^{34}_{24}\right| \quad (1)$$

$$= \left|{}^{123}_{123}\right|\left|{}^{4}_{4}\right| - \left|{}^{124}_{123}\right|\left|{}^{3}_{4}\right| \quad (2) \qquad .$$

REMARQUE 1. - La formule de Laplace ou la formule de Laplace duale peuvent permettre ensuite d'obtenir d'autres expressions du produit ab sous forme de somme de déterminoïdes. Par exemple on peut dans (2) développer $\left|{}^{123}_{123}\right|$ par la formule de Laplace et $\left|{}^{124}_{123}\right|$ par la formule de Laplace duale, ce qui donne

$$(3) \quad \left|{}^{12}_{12}\right|\left|{}^{3}_{3}\right|\left|{}^{4}_{4}\right| + \left|{}^{12}_{23}\right|\left|{}^{3}_{1}\right|\left|{}^{4}_{4}\right| + \left|{}^{12}_{31}\right|\left|{}^{3}_{2}\right|\left|{}^{4}_{4}\right| - \left|{}^{12}_{12}\right|\left|{}^{4}_{3}\right|\left|{}^{3}_{4}\right| - \left|{}^{24}_{12}\right|\left|{}^{1}_{3}\right|\left|{}^{3}_{4}\right| - \left|{}^{41}_{12}\right|\left|{}^{2}_{3}\right|\left|{}^{3}_{4}\right|$$

qui est encore égal à (1) ou (2).

REMARQUE 2. - Les formules de Laplace peuvent être considérées comme un cas particulier de ce développement.

Par exemple $(1 \wedge 2)(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4) = 2!\,(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4)$ donne par le développement (2) la formule de Laplace duale du numéro 4 .

REMARQUE 3. - Un antisymétriseur peut s'écrire comme somme de produits d'antisymétriseurs :

EXEMPLE : $$(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4) = (1 \wedge 2)(3 \wedge 4)\,[(1 \wedge 3 \wedge 4) - (2 \wedge 3 \wedge 4)] \quad .$$

7. Produit d'un déterminoïde par une permutation. Produit de plusieurs antisymétriseurs et de plusieurs déterminoïdes.

a. Un déterminoïde $D = sa_1 \dots a_k$, s étant une permutation et les a_i des antisymétriseurs sans élément commun. Pour effectuer le produit tD , t étant une permutation, il suffira donc de conserver les indices supérieurs figurant dans L et de remplacer les indices inférieurs par leurs transformés par t . Si

$$D = \left|{}^{i_1 \dots i_h}_{m_1 \dots m_h}\right|\left|{}^{i_{h+1} \dots i_p}_{m_{h+1} \dots m_p}\right|$$

et si $tm_p = n_p$, on aura :

$$tD = \begin{vmatrix} i_1 & \dots & i_h \\ n_1 & \dots & n_h \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i_{h+1} & \dots & i_p \\ n_{h+1} & \dots & n_p \end{vmatrix} .$$

Pour effectuer le produit Dt , on conserve au contraire les indices inférieurs, et on remplace i_q par r_q si $r_q = t^{-1}\, i_q$

$$Dt = \begin{vmatrix} r_1 & \dots & r_h \\ m_1 & \dots & m_h \end{vmatrix}\begin{vmatrix} r_{h+1} & \dots & r_p \\ m_{h+1} & \dots & m_p \end{vmatrix} .$$

b. Pour effectuer le produit de deux déterminoïdes contenant des indices communs, on pourra écrire si $D = sa_1 \dots a_h$, $D' = s'\, a'_1 \dots a'_{h'}$, s et s' étant deux permutations, les a et a' des antisymétriseurs :

$$DD' = ss'\, a_1^{-s'} \dots a_h^{-s'}\, a'_1 \dots a'_{h'} \qquad \text{(cf. numéro 5)}$$

ce qui ramène le problème aux produits de plusieurs antisymétriseurs.

c. Soient plusieurs antisymétriseurs a_1 , a_p , a_h . Il existe bien des manières de mettre ce produit sous forme de somme de déterminoïdes. On peut toujours partir d'un facteur quelconque a_p et le multiplier à gauche par $(a_1 \dots a_{p-1})$, ce qui donne une somme de déterminoïdes dont les éléments supérieurs de la première ligne en tant que schéma de Young sont ceux de a_p , puis multiplier à droite le résultat par $a_{p+1} \dots a_h$. Dans tous les déterminoïdes obtenus, le nombre d'éléments de la première ligne du schéma d'Young sera égal au nombre d'éléments de a_p .

8. <u>Formule de Schwein.</u>

Soit un déterminoïde D . Pour le multiplier à gauche par l'antisymétriseur $m_1 \wedge m_2 \wedge \dots \wedge m_k$; il suffit de faire la somme alternée des déterminoïdes obtenus en conservant les indices supérieurs et en permutant de toutes les manières possibles $m_1 \dots m_k$ dans les indices inférieurs.

De même pour multiplier D à droite par $i_1 \wedge \dots \wedge i_k$ il suffit de faire la somme alternée des déterminoïdes obtenus en conservant les indices inférieurs et en permutant $i_1 \dots i_k$ dans les indices supérieurs (cf. le numéro 7). Cela étant, soient deux déterminoïdes, à deux lignes de Young :

$$D_1 = (m_1 \wedge m_2 \wedge \dots \wedge m_{k'})(m_{k'+1} \wedge \dots \wedge m_k \wedge m_{k+1} \wedge \dots \wedge m_h)\, s$$

et

$$D_2 = s(i_1 \wedge i_2 \wedge \dots \wedge i_{k'} \wedge \dots \wedge i_k)(i_{k+1} \wedge \dots \wedge i_h)$$

où $si_p = m_p$.

La formule de Schwein s'énonce :

(1) $h!(m_1 \wedge \ldots \wedge m_{k'} \wedge m_k)\, \mathfrak{s}_1 = k'!\, D_2(i_{k'+1} \wedge i_{k'+2} \wedge \ldots \wedge i_{k+1} \wedge \ldots \wedge i_h)$.

En effet, tous les indices de $(m_1 \wedge \ldots \wedge m_{k'})$ figurent parmi ceux de $m_1 \wedge \ldots \wedge m_k$. Le premier membre de (1) vaut donc

$$k'!(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k)(m_{k'+1} \wedge \ldots \wedge m_k \wedge \ldots \wedge m_h)\, s$$

et le deuxième membre de (1) vaut :

$$h!\, s(i_1 \wedge \ldots \wedge i_k)(i_{k'+1} \wedge \ldots \wedge i_h) \quad .$$

Or les antisymétriseurs $(m_1 \wedge m_k)$, $(m_{k'+1} \ldots m_h)$ étant respectivement les transmués par s de $(i_1 \wedge i_k)$ et $(i_{k'+1} \wedge \ldots \wedge i_h)$, on a bien l'égalité annoncée.

EXEMPLE. - Si :

$$s = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}{a\ b\ c\ d\ e\ f}(a \wedge b \wedge c)\left|{12 \atop ab}\right|\left|{3456 \atop cdef}\right| = \left|{123 \atop abc}\right|\left|{456 \atop def}\right|(3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6) \quad .$$

Car le premier membre vaut $(a\wedge b\wedge c)(a\wedge b)(c\wedge d\wedge e\wedge f)s = 2!\,(a\wedge b\wedge c)(c\wedge d\wedge e\wedge f)\, s$ et le deuxième membre :

$$s(1\wedge 2 \wedge 3)(4 \wedge 5 \wedge 6)(3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6) = 2!\, s(1\wedge 2 \wedge 3)(3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6) \quad .$$

Remarque générale. - Toute la théorie développée jusqu'ici s'applique aussi bien aux symétriseurs $(i_1 \ldots i_k)^+$ définis comme somme des permutations de $i_1 \ldots i_k$ sans alternance de signes qu'aux antisymétriseurs.

II. Indices équivalents

1. Indices équivalents.

Soient deux sous-groupes G et H de S_n . La relation R entre deux permutations s , s' de S_n $(s\ ,\ s' \in R)$ si et seulement si $s' = hsg$, $h \in H$ et $g \in G$, est une relation d'équivalence dans S_n , les classes d'équivalence se nommant les catégories de S_n suivant H et G .

Cette relation d'équivalence n'est pas compatible avec le produit des permutations, mais, dans l'algèbre de groupe de S_n , A_n , on peut la considérer comme compatible avec la multiplication par un élément de l'anneau A , et la somme des permutations. Si on considère le sous-A-module du A-module A_n engendré par les différences de deux permutations équivalentes, soit M , nous allons considérer certaines propriétés du module quotient A_n/M .

Dans ce qui suit, nous prendrons pour G les permutations échangeant les k indices i_1 , i_k , et pour H les permutations échangeant les k' indices j_1 , $j_{k'}$, les autres indices restant invariants par une permutation de G ou H . Nous dirons que les i sont supérieurement équivalents et les j inférieurement équivalents.

PROPRIÉTÉ 1. - On obtient les permutations équivalentes à une permutation s en échangeant dans $s = \begin{pmatrix} 1 2 & \cdots & n \\ m_1 & m_2 \cdots & m_n \end{pmatrix}$ de toutes les manières possibles les indices i_p dans la ligne supérieure, et les indices j_p dans la ligne inférieure.

Car effectuer le produit sg où $g \in G$ peut se faire en laissant les m dans l'ordre fixe et en permutant certains i_k . De même pour le produit hs , $h \in H$.

PROPRIÉTÉ 2. - On obtient les déterminoïdes équivalents à un déterminoïde donné en permutant de toutes les manières possibles les indices i supérieurs et les indices j inférieurs.

Car, d'après le numéro 7, la multiplication Dt du déterminoïde D par une permutation t de G , revient à laisser fixes les indices inférieurs et à permuter les indices i supérieurs. De même pour tD où $t \in H$.

PROPRIÉTÉ 3. - Si un déterminoïde D possède deux indices i supérieurs (ou deux indices j inférieurs) équivalents dans une même ligne de son schéma de Young, il est nul dans A_n/M .

En effet, si $D = sa_1 \dots a_k$, les a_i étant des antisymétriseurs sans éléments communs, les indices supérieurs de la i-ième ligne de Young de D sont les indices de a_i . Transposer deux indices supérieurs d'une ligne de Young revient donc à transposer deux indices de a_i , et D devient $-D$ dans A_n , donc dans A_n/M . Mais si ces indices supérieurs sont équivalents, leur transposition conserve D dans A_n/M . Donc $D = -D$ et $D = 0$ (modulo M) .

PROPRIÉTÉ 4. - Calcul du produit d'antisymétriseurs ayant des indices supérieurs (ou inférieurs) équivalents.

Soient deux antisymétriseurs a_1 et a_2 dans lesquels nous choisirons deux indices i_1 et i_2 équivalents supérieurement, et deux indices j_1 , j_2 équivalents inférieurement. Reprenant le calcul fait au numéro 6 du produit de deux antisymétriseurs, on pourra mettre $a_1 a_2$ sous forme de somme de déterminoïdes à deux lignes de Young. Pour que le terme obtenu ne soit pas nul dans A_n/M , en supposant les indices supérieurs fixes, il faut d'après la propriété 3 que les indices j_1 et j_2 soient situés dans chaque ligne de Young, donc on peut se borner à permuter les indices inférieurs autres que les indices j_1 , j_2 .

Le résultat de généralise de deux manières :

a. On peut considérer le produit de plusieurs antisymétriseurs sous forme d'une somme de déterminoïdes. Si on choisit dans chaque symétriseur des indices i_p supérieurs équivalents et des indices j_p inférieurs équivalents, les i_p et j_p devront être répartis un et un seul dans chaque ligne de Young de chaque déterminoïde. Donc on ne tiendra pas compte des indices équivalents pour la formation du produit.

b. En considérant des groupes G_1 , G_k et H_1 , H_k , on peut considérer des éléments i_p^q équivalents à $i_p^{q'}$ relativement au groupe G_p . S'il y a un et un seul indice inférieurement équivalent modulo H_p et supérieurement équivalent modulo G_p dans chaque antisymétriseur, il devra y en avoir un et un seul dans chaque ligne des déterminoïdes du produit $a_1 \dots a_h$, et on ne tiendra pas compte de ces indices, pour les permuter.

EXEMPLE. - Soit à former $(1 \wedge 2 \wedge 4)(1 \wedge 3 \wedge 5)$ où l'on suppose que 4 et 5 sont supérieurement équivalents, et 2 et 3 inférieurement équivalents. On a :

$$(1 \wedge 2 \wedge 4)(1 \wedge 3 \wedge 5) = \left|{}^{124}_{124}\right|\left|{}^{35}_{35}\right| = \left|{}^{324}_{124}\right|\left|{}^{15}_{35}\right| + \left|{}^{524}_{124}\right|\left|{}^{13}_{35}\right| \quad .$$

Les indices à permuter supérieurs sont 1 , 3 , 5 à partir du premier déterminoïde. Mais 5 et 4 étant supérieurement équivalents, on les laissera en place et on ne permutera que 1 et 3 . En effet le troisième terme est nul d'après la propriété 3. En formant :

$$(1 \wedge 2)(1 \wedge 3) = \left|{}^{12}_{12}\right|\left|{}^{3}_{3}\right| - \left|{}^{32}_{12}\right|\left|{}^{1}_{3}\right| \quad ,$$

il aurait suffi d'ajouter $\left|{}^{5}_{5}\right|$ à droite de chaque ligne du déterminoïde pour obtenir le résultat annoncé.

PROPRIÉTÉ 5. - Si une somme de déterminoïdes obtenue comme somme de produits d'antisymétriseurs est nulle, elle reste nulle dans A_n/M si on ajoute ou si on supprime à chaque ligne de chaque déterminoïde la même paire (ou plusieurs mêmes paires d'indices, l'un supérieurement, l'autre inférieurement équivalents).

EXEMPLE. - Du développement $\left|{}^{12}_{12}\right| = \left|{}^{1}_{1}\right|\left|{}^{2}_{2}\right| - \left|{}^{1}_{2}\right|\left|{}^{2}_{1}\right|$, on peut déduire, si 3 et 3' sont inférieurement équivalents, 4 et 4' supérieurement équivalents :

$$\begin{vmatrix}124\\123\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4'\\3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}14\\13\end{vmatrix}\begin{vmatrix}24'\\23'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}14\\23\end{vmatrix}\begin{vmatrix}24'\\13'\end{vmatrix} .$$

III. Diviseurs élémentaires.

1. Réalisation des antisymétriseurs et des déterminoïdes.

A toute permutation s de n indices $s = \begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}$, on peut faire correspondre une suite d'éléments $(e^1_{i_1}\ e \ldots e^n_{i_n})$, les e appartenant à un ensemble E, et affectés de deux indices, l'indice supérieur et l'indice inférieur. D'après la signification de la permutation s, on obtient le même mot en permutant deux e^j_i.

Il peut se faire que $e^j_i = e^{j'}_{i'}$ pour deux couples différents d'indices, mais cela ne change rien au calcul sur les permutations.

A l'antisymétriseur $(i_1 \wedge i_2 \wedge \ldots \wedge i_k)$ correspondra l'expression

$$\sum (-1)^{I+J}\ e^{i_1}_{j_1} \ldots e^{i_k}_{j_k} (e^{i_{k+1}}_{i_{k+1}} \ldots e^{i_n}_{i_n})$$

et de même on pourra former ce qui correspond à un déterminoïde donné.

Exemples de réalisations.

1° Les e sont des éléments d'un anneau R et les indices supérieurs représentent la place occupée par chaque facteur e, les indices inférieurs servant à distinguer les éléments de R. Alors par exemple $e^2_1\ e^1_3\ e^3_2 = P$ signifiera le produit $e_3\ e_1\ e_2$. Dans ces conditions, le produit de

$$P(1 \wedge 2) = e^2_1\ e^1_3\ e^3_2 - e^1_1\ e^2_3\ e^3_2 = e_3\ e_1\ e_2 - e_1\ e_3\ e_2$$

est l'antisymétrisé de P pour les deux premiers facteurs, tandis que

$$(1 \wedge 2)\ P = e^2_1\ e^1_3\ e^3_2 - e^2_3\ e^1_3\ e^3_1 = e_3\ e_1\ e_2 - e_3\ e_1\ e_2$$

représente l'antisymétrisé pour les facteurs de noms e_1 et e_2.

2° Les e^j_i sont des éléments d'un anneau commutatif, en nombre n^2, et on considère un produit $P = e^{i_1}_1 \ldots e^{i_n}_n$. Les déterminoïdes sont alors des produits de mineurs du déterminant des e^j_i formés avec des colonnes et des lignes différents. L'antisymétriseur $(1 \wedge 2 \wedge \ldots \wedge n)\ P$ est le déterminant des e^j_i.

3° Les D_j et les f_i, tous deux en nombre n étant des éléments de deux ensembles sur lesquels on peut définir une opération externe $D_j f_i = e_i^j$, on aura par exemple :

$$(1 \wedge 2)(D^1 , D^2)(f_1 , f_2) = D^1 f_1 . D^2 f_2 - D^2 f_1 . D^1 f_2 \quad .$$

d. Dans l'exemple 1, les e_i peuvent être des éléments d'un R module de dimension n . Dans ce cas si $e_1 = a_1^1 i_1 + a_1^2 i_2$, $e_2 = a_2^1 i_1 + a_2^2 i_2$. R étant commutatif, et les i les vecteurs de base, l'antisymétrisé $e_1 e_2 - e_2 e_1$ peut permettre de définir le produit extérieur des vecteurs e_1 et e_2 .

2. Cas où l'on peut définir une valuation des mineurs.

Dans tout ce qui suivra, nous admettrons que, si j et j' sont des indices équivalents, ainsi que i et i' , $e_i^j = e_i^{j'} = e_{i'}^j = e_{i'}^{j'}$. Nous supprimerons les e , dans l'expression de la réalisation des déterminoïdes, et nous représenterons des indices équivalents par le même symbole, ce qui est possible en vertu de la convention précédente.

Nous appellerons mineur d'ordre h une expression de la forme $|e_{i_1}^{j_1} \dots e_{i_h}^{j_h}|$ que nous représentons simplement par la notation $\left|{}_{i_1}^{j_1} \dots {}_{i_h}^{j_h}\right|$. Toute réalisation de déterminoïdes apparaît comme un produit de mineurs, et sur les mineurs on peut définir une somme, correspondant à la somme dans l'algèbre A_n du groupe des permutations. Les mineurs sont donc éléments d'un anneau commutatif S , en particulier les e_i^j .

On suppose qu'on puisse associer à tout élément de S un élément d'un groupe abélien ordonné, tel que : $v(ss') = v(s) + v(s')$ $v(s + s') \geqslant \min[v(s) , v(s')]$. On appelle mineur régulier d'ordre k , tout mineur tel que sa valuation v_k soit inférieure ou égale à la valuation de tout autre mineur d'ordre k . On appelle mineur d'ordre k + 1 bordant un mineur D d'ordre k donné, tout mineur dont les indices supérieurs comprennent les indices supérieurs de D , et de même pour les indices inférieurs. Dans ces conditions, on a le théorème suivant :

THÉORÈME de Frobenius. - Tout mineur régulier d'ordre k est bordé par un mineur régulier d'ordre k + 1 , et contient un mineur régulier d'ordre k - 1 .

La démonstration est donnée par le principe suivant. Soit D un mineur régulier d'ordre k + 1 . Si D' ne borde pas D , on peut trouver des mineurs D_i d'ordre k , et D_i' d'ordre k + 1 tels que :

(1) $$DD' + D_1 D_1' + \dots + D_h D_h' = 0 \quad .$$

Si on admet (1), on a $v(DD') \geqslant \min(v(D_i\ D'_i))$.

Donc il existe un indice i pour lequel on a : $v(D) + v(D') \geqslant v(D_i) + v(D'_i)$.
D'où :

$$0 \geqslant v(D) - v(D_i) \geqslant v(D'_i) - v(D') \qquad .$$

D'où : $v(D'_i) \leq v(D')$. D' peut être régulier, mais il existe au moins un D'_i de valuation plus petite.

b. Supposons maintenant que D' soit régulier d'ordre $k + 1$, et D quelconque non bordé par D' . Le même raisonnement montre qu'il existe un D_j tel que $v(D_j) \leq v(D)$.

Tout revient donc à montrer qu'il existe une identité telle que (1), D et D' étant deux mineurs d'ordre k et $k + 1$, D' ne bordant pas D .(Les D'_i figurant dans (1) ayant un indice commun avec D de plus que D' . Nous distinguerons trois cas :

a. Les mineurs $\left|\begin{matrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{matrix}\right| = D$ et $\left|\begin{matrix} i'_1 & \cdots & i'_{k+1} \\ j'_1 & \cdots & j'_{k+1} \end{matrix}\right| = D$ sont tels que les i sont distincts des i' et les j distincts des j' . Dans ce cas, on peut égaler deux développements de Laplace du mineur :

$$\left|\begin{matrix} i_1 & \cdots & i_k & i'_1 & \cdots & i'_{k+1} \\ j_1 & \cdots & j_k & j'_1 & \cdots & j_{k+1} \end{matrix}\right| = \Delta$$

le premier formé à partir des indices supérieurs de D et D' en permutant les indices inférieurs par combinaisons k à k . Le deuxième développement obtenu en prenant k indices i' supérieurs, et les $k + 1$ indices restant. On est ainsi assuré que le terme DD' ne figure pas deux fois, et on a bien une formule telle que (1) .

b. Les mineurs D et D' ont au moins un indice supérieur (ou inférieur) commun, mais pas d'indice inférieur (ou supérieur commun). Alors on a encore $2k + 1 \leqslant n$, et Δ est encore un mineur qui est nul, si bien que le premier développement de Laplace seul donne l'identité (1) (on laisse fixes les indices supérieurs si les indices inférieurs sont en commun).

c. Si D' a en commun avec D des indices supérieurs et inférieurs, ce qui arrive notamment si $2k + 1 > n$, le raisonnement précédent n'est pas plus valable, car le terme DD' peut figurer plusieurs fois et donc disparaître dans le développement de Δ . Mais on peut supprimer alors dans les deux mineurs D et D' les indices équivalents supérieurs et inférieurs ; on est alors ramené au cas a ou au cas b, et on écrit la formule (1') relative aux mineurs $\bar{D}$ et $\bar{D}'$ ainsi obtenus. On peut alors rajouter à chaque mineur les indices équivalents supprimés, et d'après la propriété 5 de II, on a encore une identité telle que (1).

EXEMPLE. - Prenons le cas de $n = 5$, et supposons que $D = \left|{}^{12}_{12}\right|$.

a. Supposons $D' = \left|{}^{345}_{345}\right|$. On forme les deux développements de Laplace :

$$\binom{12345}{12345}(1 \wedge 2)(3 \wedge 4 \wedge 5)(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5)$$

et

$$\binom{12345}{12345}\ (3 \wedge 4)(1 \wedge 2 \wedge 5)(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5)$$

qu'on égale.

b. Supposons $D' = \left|{}^{234}_{345}\right|$ qui n'a que des indices supérieurs communs avec D . $\Delta = \left|{}^{12234}_{12345}\right| = 0$. Si on développe Δ en permutant les indices inférieurs suivant un développement de Laplace, (2 , 3) , on obtient :

$$0 = \left|{}^{12}_{12}\right|\left|{}^{234}_{345}\right| + \left|{}^{12}_{13}\right|\left|{}^{234}_{245}\right| + \dots$$

c. Supposons $D' = \left|{}^{234}_{215}\right|$ où l'indice inférieur 1 est commun avec D ainsi que l'indice supérieur 2 . On les supprime et on forme :

$$\bar{D} = \left|{}^{1}_{2}\right| \qquad \bar{D}' = \left|{}^{24}_{35}\right| \quad .$$

On est ramené au cas a pour $\bar{D}$ et $\bar{D}'$. On écrit

$$\left|{}^{124}_{235}\right| = \left|{}^{1}_{2}\right|\left|{}^{24}_{35}\right| + \left|{}^{1}_{3}\right|\left|{}^{24}_{52}\right|\left|{}^{1}_{5}\right|\left|{}^{24}_{23}\right|$$

$$= \left|{}^{2}_{3}\right|\left|{}^{41}_{52}\right| + \left|{}^{3}_{5}\right|\left|{}^{41}_{23}\right| + \left|{}^{3}_{2}\right|\left|{}^{41}_{35}\right| \quad .$$

On égale ces deux développements et on rajoute à chaque mineur écrit la colonne ${}^{2}_{1}$ pour obtenir l'identité à zéro cherchée.

COROLLAIRE du théorème de Frobenius. - Si v_k désigne la valuation d'un mineur régulier d'ordre k , on a $v_k + v_{k+2} \geqslant 2v_{k+1}$. Autrement dit, les différences $v_{k+1} - v_k$ forment une suite non décroissante.

En effet, si un mineur d'ordre $k + 1$ est régulier, il borde au moins un mineur d'ordre k régulier, et est bordé par un mineur d'ordre $k + 2$ régulier.

On peut donc choisir le mineur D de valuation v_k , et D' de valuation v_{k+2} de manière que D' ait k indices supérieurs communs avec D ainsi que k indices inférieurs (D' borde D).

Si par exemple $D = \left|\begin{matrix}12 \dots k\\ 12 \dots k\end{matrix}\right|$ et $D' = \left|\begin{matrix}12 \dots k & k+1 & k+2\\ 12 \dots k & k++1 & k+2\end{matrix}\right|$ calculons DD' . De la formule :

$$\left|\begin{matrix}k+1\\ k+1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}k+2\\ k+2\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}k+1\\ k+2\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}k+2\\ k+1\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}k+1\\ k+1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}k+2\\ k+2\end{matrix}\right|$$

on déduit, en rajoutant aux deux membres les k indices communs en haut et en bas :

$$DD' = \left|\begin{matrix}12 \dots k\ k+1\\ 12 \dots k\ k+2\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}12 \dots k\ k+2\\ 12 \dots k\ k+1\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}12 \dots k\ k+1\\ 12 \dots k\ k+1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}12 \dots k\ k+2\\ 12 \dots k\ k+2\end{matrix}\right|$$

et par suite $v(DD') = v_k + v_{k+2} \geqslant 2v_{k+1}$.

Cas particuliers.

1° Si les e_i^j éléments des mineurs appartiennent à un corps où la valuation de l'élément 0 est prise égale à l'infini, si un mineur d'ordre k est régulier et de valuation finie, c'est-à-dire non nul, il est bordé par au moins un mineur d'ordre $k+1$ régulier. Si tous les mineurs d'ordre $k+1$ ont une valuation infinie, c'est-à-dire sont nuls, les autres ne peuvent avoir une valuation moindre. Si tous les mineurs d'ordre $k+1$ bordant un déterminant d'ordre k sont nuls, tous les mineurs d'ordre $k+1$ sont nuls.

2° Si les éléments des mineurs font partie d'un anneau à idéaux principaux, on peut prendre pour v le degré par rapport à un élément premier. La valuation de D est h si D est divisible par p^h et non par p^{h+1} . Le raisonnement précédent, appliqué à tous les nombres premiers intervenant dans la décomposition de D , montre que $\Delta_k\,\Delta_{k+2}$ est divisible par Δ_{k+1}^2 si Δk est le plus grand commun diviseur (pgcd) des mineurs d'ordre k .

3. Treillis des suites v_i .

Soit un groupe abélien ordonné noté additivement V et une suite d'éléments de V , v_i satisfaisant à la condition

(1) $$v_{i+1} - v_i \geqslant v_i - v_{i-1} .$$

Nous allons définir sur les suites v_i satisfaisant à (1) une structure de treillis.

Soient deux suites v_i et v'_i satisfaisant à (1). Je dis que $w_i = \sup(v_i, v'_i)$ satisfait aussi à (1).

On peut supposer $v_i \leq v'_i$. Alors $w_i = v'_i$. Il faut distinguer quatre cas.

a. $v_{i-1} < v'_{i-1}$, $v_{i+1} < v'_{i+1}$. Alors :

$$w_{i+1} - w_i = v'_{i+1} - v'_i \geq v'_i - v'_{i-1} = w_i - w_{i-1}.$$

b. $v_{i-1} < v'_{i-1}$, $v_{i+1} > v'_{i+1}$. Alors :

$$w_{i+1} - w_i = v_{i+1} - v'_i \geq v'_{i+1} - v'_i \geq v'_{i-1} = w_i - w_{i-1}.$$

c. $v_{i-1} > v'_{i-1}$, $v_{i+1} > v'_{i+1}$. Alors :

$$w_{i+1} - w_i = v_{i+1} - v'_i \geq v'_{i+1} - v'_i \geq v'_i - v'_{i-1} \geq v'_i - v_{i-1} = w_i - w_{i-1}.$$

d. $v_{i-1} > v'_{i-1}$, $v_{i+1} < v'_{i+1}$. Alors

$$w_{i+1} - w_i = v'_{i+1} - v'_i \geq v'_i - v'_{i-1} \geq v'_i - v_{i-1} = w_i - w_{i-1}.$$

Si, donc, on définit une relation d'ordre entre deux suites (v_i) et (v'_i) par la relation $(v_i) < (v'_i)$ si et seulement si $v_i < v'_i$ pour tout i, deux suites quelconques ont un <u>plus petit majorant commun</u>.

Elles ont aussi un plus petit minorant commun, mais qui n'est pas défini par la relation $w_i = \inf(v_i, v'_i)$ qui n'obéit pas en général à la condition (1), comme le montrent les deux suites 7, 9, 12, 20 et 2, 8, 14, 20, la suite 2, 8, 12, 20 n'obéissant pas à la condition des différences décroissantes. On peut utiliser le lemme suivant :

LEMME.- Etant donnée une suite (s_i), quelqonque finie, il existe une suite unique (w_i) qui est supérieure à toutes les suites satisfaisant à (1) et inférieures à s_i, w_i satisfaisant elle-même à (1).

Soit la suite $s_1, s_2 \dots s_n$, quelconque finie. Il existe au moins une suite inférieure à s_i, par exemple $0, 0, 0, \dots, 0, s_n$, qui satisfait à (1). Le plus petit majorant commun t_i de toutes ces suites satisfait aussi à (1).

Si on choisit pour suite (s_i) la suite $s_i = \inf(v_i, v'_i)$ on obtient ainsi une suite t_i supérieure à tous les minorants communs de v_i et v'_i, t_i satisfaisant à la condition (1).

Les suites v_i satisfaisant à la condition (1) ont une structure de groupe abélien réticulé.

REMARQUE. - Les mêmes considérations s'appliquent si la suite v_i est décroissante, et si la suite de ces différences premières $w_i = v_i - v_{i+1}$ est elle-même non croissante.

4. Exemple. Treillis de partitions.

Considérons une famille F de monômes à n indéterminées $x_1^{p_1} \dots x^{p_n} = P$ où les exposants p_i vérifient la condition $p_i - p_{i+1} \geqslant p_{i+1} - p_{i+2} \geqslant 0$ pour tout i. Si deux monômes P, $Q \in F$, le produit $PQ \in F$, et d'après le paragraphe précédent le plus petit commun multiple (ppcm) de deux monômes P et $Q \in F$. Le pgcd au sens usuel n'est pas élément de F en général, mais il existe un monôme de F qui est multiple de tous les monômes de F qui sont diviseurs communs de P et Q. F a une structure de treillis multiplicatif.

Considérons en particulier la famille G des monômes P, pour lesquels $p_1 = n$. Il existe une application bijective de G sur l'ensemble des partitions de n en somme de nombres entiers positifs ou nuls, non croissants. Soit en effet le monôme $x_1^n\, x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}$, on lui fera correspondre la partition de n :

$$e_1 = n - p_2 \;,\quad e_2 = p_2 - p_3 \;,\quad e_i = p_i - p_{i+1} \;,\quad e_n = p_n \qquad ,$$

et inversement, les e_i étant donnés, on aura $p_1 = \sum\limits_{1,n} e_j$, $p_i = \sum\limits_{i,n} e_i$. On définit ainsi sur l'ensemble des partitions de n un treillis. Si on considère un schéma de Young pour représenter une partition de n, en mettant e_i points dans la i-ième ligne horizontale d'un tableau, et s'astreignant à conserver les i premières colonnes, dans chaque ligne, multiplier par x_{i+1} un tel schéma revient à prélever un point dans la i-ième ligne pour le porter dans la i + 1-ième ligne. Par exemple le schéma

```
....
..
.
```

donne par multiplication par x_3 le schéma

```
....
.
..
```

qui ne correspond pas à une partition, les indices e_i ne formant pas une suite décroissante. Mais si le résultat donne un schéma de partition, on voit qu'on a déplacé un point d'une colonne pour le placer dans une colonne ayant un indice inférieur. D'où le résultat. On reconnaît qu'un schéma S correspond à un monôme P multiple du monôme Q qui correspond au schéma T si on peut obtenir S à partir de T en déplaçant des points de T pour les amener dans des lignes d'indices inférieurs ou dans des colonnes d'indices supérieurs.

Si on appelle partition conjuguée de la partition correspondant au schéma S, celle dont le schéma S' est symétrique de S par rapport à la diagonale principale, la remarque prédédente rend intuitive les propriétés suivantes ; en appelant conjugués deux monômes P et P' correspondant à deux permutations conjuguées.

PROPRIÉTÉ 1. - Si P est multiple de Q, alors Q' est multiple de P'.

PROPRIÉTÉ 2. - Le conjugué du plus grand antécédent commun est le plus petit minorant commun des conjugués.

Soit R le plus grand antécédent commun de P et Q. Son conjugué R' est est multiple commun à P' et Q', et les diviseurs de R appartenant à G sont les diviseurs communs à P et Q. Leurs conjugués sont donc des multiples de R'. R' est bien de ppcm le P et Q.

PROPRIÉTÉ 3. - Le treillis G est autodual. Il y a une correspondance bijective (par la conjugaison) entre les portions de treillis comprises entre P et Q, d'une part, et Q' et P' de l'autre. En particulier, le nombre de diviseurs de P est égal au nombre de multiples de P', et une partition autoconjuguée a autant de diviseurs que de multiples.

EXEMPLE. - Treillis de partitions pour $n = 7$:

$$\begin{tikzcd}
1^7 \arrow[r, dash] & 2^1\,1^5 \arrow[r, dash] & 2^2\,1^3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 2^3\,1 \arrow[d, dash] & & & \\
& & 31^4 \arrow[r, dash] & 321^2 \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & 322 \arrow[d, dash] & & \\
& & & & 3^2\,1 \arrow[d, dash] & & \\
& & & 41^3 \arrow[r, dash] & 421 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 43 \arrow[d, dash] & \\
& & & & 51^2 \arrow[r, dash] & 52 \arrow[d, dash] & \\
& & & & & 61 \arrow[r, dash] & 7
\end{tikzcd}.$$

Un monôme situé à gauche ou dessus est multiple d'un monôme situé à droite ou en dessous dans le treillis. On voit que cet ordre ne coïncide pas avec l'ordre lexicographique des hauteurs.

Sur une même verticale sont situées les partitions de n en un même nombre de parties positives sous forme de hauteurs croissantes. Par exemple, les partitions $3^2\,1$ et 41^3 correspondent respectivement aux monômes $x_1^7\,x_2^4\,x_3$ et $x_1^7\,x_2^3\,x_3^2\,x_4$ dont le ppcm $x_1^7\,x_2^4\,x_3^2\,x_4$ correspond à la partition 321^2, comme on le voit sur le schéma.

Expression des p_i en fonction des différences secondes.

Soit le monôme $x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} = P$. En posant $e_i = p_i - p_i - p_{i+1}$, puis $d_i = e_i - e_{i+1}$, il vient, après un calcul aisé,

$$p_{n-k+1} = kd_n + (k-1)\, d_{n-1} + \dots + (k-p)\, d_{n-p} + \dots + d_{n-k} \quad .$$

En particulier

$$p_1 = nd_n + (n-1)\, d_{n-1} + \dots + d_1 = n$$

est le poids de la suite des différences secondes d_i de la suite p_i .

Quant à la partition conjuguée de celle dorrespondant à P, elle peut s'écrire sous la forme :

$$(n^{i_n} , (n-1)^{d_{n-1}} , 2^{d_2} , 1^{d_1}) \quad ,$$

étant entendu que les d_n premiers e'_i sont égaux à n , les d_{n-1} e' suivants sont égaux à $n-1$, et ainsi de suite.

5. Application à la théorie des diviseurs élémentaires.

Soient deux produits $e_1^{k_1} e_2^{k_2} \dots e_n^{k_n} = P$ et $e_1'^{k_1} \dots e_n^{k'_n} = P'$ où les e_i sont permutables et tels que $e_{i+1} = d_{i+1} e_i$, $k_i \geqslant k_{i+1}$, $k'_i \geqslant k'_{i+1}$. Il vient en remplaçant les e_i par leurs expressions en fonction des

$$d_i \dots e_i = d_1 \dots d_2 \dots d_i \quad .$$

D'où $P = d_1^{k_1+k_2+\dots+k_n} d_2^{k_2+k_3+\dots+k_n} \dots d_n^{k_n}$. P sera certainement divisible par P' si le monôme

$$x_1^{k_i} x_2^{k_2+\dots+k_n} \dots x_n^{k_n}$$

est divisible par le monôme correspondant pour P' , c'est-à-dire si la partition (k_1 , k_n) est divisible par la partition $(k'_1 , \dots , k'_n)$, au sens du treillis des partitions.

Or, si on pose $D_i = e_1 e_2 \dots e_i$, considérons un produit de la forme $D_{a_1} D_{a_2} \dots D_{a_p} = P$ où les a_i sont des entiers naturels non croissants. P s'exprime en fonction des e_i sous la forme $P = e_1^{k_1} \dots e_n^{k_n}$, où k_1 , k_n est la partition conjuguée de a_1 , a_p . On conclut de ce qui précède et de la propriété 1 des partitions conjuguées le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ. - Si D_i désigne le mineur d'ordre i de valuation minima, le produit $D_{a_1} \dots D_{a_2} \dots D_{a_n}$ divise le produit $D_{a'_1} D_{a'_2} \dots D_{a'_n}$ si la partition a'_1 , a'_n divise la partition a_1 , a_n .($a_i \geqslant a_{i+1}$; $a'_i \geqslant a'_{i+1}$) .

EXEMPLE. - Dans un anneau principal, si D_i est le pgcd des mineurs d'ordre i d'une matrice, $D_5 D_1 = e_1^2 e_2 e_3 e_4 e_5$ et $D_4 D_2 = e_1^2 e_2^2 e_3 e_4$. $D_5 D_1$ est multiple de $D_4 D_2$. Or 51 est diviseur de 42 (voir le schéma page 18).

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, chap. 6 et 7. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1179 ; Eléménts de Mathématique, 14).

[2] CHÂTELET (Albert). - Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers. - Paris, Gauthier-Villars, 1925 (Travaux et Mémoires de l'Univ. de Lille).

[3] DRACH (J.). - Théorie des formes et des invariants, Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées (édition française), Tome 1 , volume 2 , article I 11 , p. 380-520. - Paris, Gauthier-Villars ; Leipzig, B. G. Teubner, 1911/12.

[4] TURNBULL (H. W.). - The theory of determinants, matrices and invariants, 2e éd. - London and Glasgow, Blackie and son, 1948.