Lech Dubikajtis

Construction de groupes cartésiens infinis dénombrables

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1959-1960), exp. n° 21, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_2_A10_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et théorie des nombres)
13e année, 1959/60, n° 21

CONSTRUCTION DE GROUPES CARTÉSIENS INFINIS DÉNOMBRABLES

par Lech DUBIKAJTIS

Dans ce travail, je donne une méthode pour construire certains groupes cartésiens.

DÉFINITION 1. - Un groupe cartésien, (1) est une structure algébrique sur un ensemble A (possédant au moins deux éléments différents) déterminée par deux lois de composition internes : addition et multiplication partout définies sur A et vérifiant les axiomes suivants :

A_1. L'addition détermine sur A une structure de groupe (pas nécessairement commutatif).

A_2. Si 0 est élément neutre du groupe additif, alors

$$\forall \ a \in A \ , \ \{0.a = a.0 = 0\} \quad .$$

A_3. $\exists \ 1 \in A \ , \ \forall \ a \in A \ , \ \{1.a = a.1 = a\}$.

A_4. $\forall \ a , b , c \in A \quad \{$si $a \neq b$, il existe **un et seulement un** x tel que $[x.a = c + x.b]\}$.

A_5. $\forall \ a , b , c \in A \quad \{$si $a \neq b$, $\exists \ y \in A \quad [a.y = b.y + c]\}$.

Le sujet de ce travail est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Pour chaque groupe infini dénombrable</u> A , <u>noté additivement, on peut définir une deuxième loi de composition interne (dite : multiplication) de manière à obtenir un groupe cartésien.</u>

Pour démontrer ce théorème, il faut introduire un certain nombre de constructions et de notions auxiliaires.

DÉFINITION 2. - Soit A un groupe infini dénombrable noté additivement (mais pas nécessairement commutatif), avec élément neutre 0 ; nous construisons une suite

---

(1) Cette définition est équivalente à celle de PICKERT ([3] p. 335, et [4] p. 90). Les conditions (2) et (4) sont ici remplacées par un seul axiome A_4.

quelconque : $a_0, a_1, a_2, \ldots$ d'éléments de A avec $a_0 = 0$. Cette suite sera fixée une fois pour toutes et nous l'appellerons la suite A.

Tout le problème consiste à construire le tableau (*) de multiplication.

$$(*) \qquad \begin{array}{c|ccccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_k & \ldots \\
\hline
a_0 & b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} & \ldots & b_{0k} & \ldots \\
a_1 & b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1k} & \ldots \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_j & b_{j0} & b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} & \ldots & b_{jk} & \ldots \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \quad \text{où} \quad b_{jk} = a_k \cdot a_j$$

Une première idée serait de définir les éléments de ce tableau par induction, dans l'ordre le plus naturel :

$$b_{00}, b_{01}, b_{02}, b_{03}, \ldots, b_{10}, b_{11}, b_{12}, b_{13}, \ldots, b_{20}, b_{21}, b_{22}, \ldots$$

Il faudrait donc définir une fonction $f(r, q)$ successivement pour les couples de la suite transfinie

$$(**) \quad (0, 0), (0, 1), (0, 2), \ldots, (1, 0), (1, 1), (1, 2), \ldots, (2, 0), (2, 1), \ldots$$

de façon que la valeur $f(r, q)$ soit égale à $b_{r,q}$. Les nombres r et q signifieraient dans ce cas respectivement les numéros de la ligne et de la colonne dans lesquelles se trouve l'élément $b_{r,q} = f(r, q)$.

Je n'ai pas pu y réussir. Mais j'ai pu déterminer par induction (par rapport à la même suite transfinie (**)) une fonction $f(r, q)$ dont les valeurs sont aussi égales aux éléments du tableau (*), mais dans un autre ordre : l'élément $f(r, q)$ est situé en général à une autre place que celle où se rencontrent la ligne r et la colonne q. Il fallait donc définir encore deux fonctions : $\ell(r, q)$, qui détermine la ligne, et $c(r, q)$, qui détermine la colonne où se trouve l'élément $f(r, q)$.

Dans cette construction, la ligne ne dépendant que de r, on peut écrire $\ell(r)$ au lieu de $\ell(r, q)$, et cette fonction sera déterminée à la définition 9. Les fonctions $f(r, q)$ et $c(r, q)$ seront déterminées simultanément (après certaines définitions auxiliaires) à la définition 6, à l'aide de l'induction par rapport aux éléments de la suite transfinie (**).

DÉFINITION 3. - $\varphi(r , q)$ est la partie entière du quotient $\frac{r + q - 2}{r + 1}$, et $\psi(r , q)$ est le reste de cette division.

Les valeurs de r et de q pour lesquelles nous profiterons de cette définition vérifiant les conditions $r \geqslant 0$ et $q \geqslant 3$, les valeurs de φ et de ψ, vérifient les inégalités :

$$1 \leqslant \varphi(r , q) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi(r , q) \leqslant r .$$

DÉFINITION 4. - Nous désignons par V l'ensemble de tous les triplets (a_j , a_k , a_ℓ) vérifiant les conditions suivantes :

1° $a_j , a_k , a_\ell \in A$;

2° $j < k$.

L'ensemble V étant dénombrable, on peut ordonner ses éléments pour obtenir une suite infinie.

DÉFINITION 5. - Nous fixons une suite quelconque de tous les éléments de l'ensemble V, vérifiant les conditions :

$$v_0 = (a_0 , a_1 , a_0) \qquad \text{et} \qquad v_1 = (a_0 , a_1 , a_1)$$

et nous l'appellerons la suite V .

La définition des fonctions $c(r , q)$ et $f(r , q)$, que nous allons donner, se décompose en plusieurs cas, dont chacun correspond à une certaine propriété de la multiplication (déterminée par les axiomes A_2 à A_5). L'explication de ces cas et leurs liaisons avec les axiomes particuliers seront données immédiatement après la définition.

DÉFINITION 6. -

(6.1) $r = 0$. $c(0 , q) = a_q$, $f(0 , q) = a_0$ $(= 0)$.

(6.2) $r = 1$. $c(1 , q) = a_q$, $f(1 , q) = a_q$.

(6.3) $r \geqslant 2$, $q = 0$. $c(r , 0) = a_0$, $f(r , 0) = a_0$.

(6.4) $r \geqslant 2$, $q = 1$ et $q = 2$. Ici, il faut distinguer 4 possibilités : (a), (b), (c), (d). Nous verrons plus tard que la possibilité (c) ne peut pas se produire

([2]) (lemme 3), mais il faut la considérer ici pour que notre définition soit complète.

Considérons la suite V (définition 5) :

(a) Si pour chaque $v = (a_j , a_k , a_\ell) \in V$ la condition

$$(F_1) \quad \exists\ r' , q_1 , q_2 , \{r' < r ,\ c(r' , q_1) = a_j ,\ c(r' , q_2) = a_k ,\ f(r' , q_1) + a_\ell = f(r' , q_2)\}$$

est vérifiée, nous posons :

$$c(r , 1) = c(r , 2) = f(r , 1) = f(r , 2) = a_0 \quad .$$

Dans le cas contraire, nous désignons par $v = (a_j , a_k , a_\ell)$ le premier élément de la suite V ne vérifiant pas la condition (F_1) et nous considérons les cas (b), (c), (d).

(b) Si $a_j = a_0$, nous posons :

$$c(r , 1) = a_j ,\quad c(r , 2) = a_k ,\quad f(r , 1) = a_0 ,\quad f(r , 2) = a_\ell \quad .$$

(c) Si $a_j \neq a_0$, et si, pour chaque $a_m \in A$, on a soit

$$(F_{2'}) \qquad \exists\ r' , q' \{r' < r ,\ c(r' , q') = a_j ,\ f(r' , q') = a_m\} \quad ,$$

soit

$$(F_{2''}) \quad \exists\ r' , q' \{r' < r , c(r' , q') = a_k ,\ f(r' , q') = a_m + a_\ell\}$$

on pose :

$$c(r , 1) = c(r , 2) = f(r , 1) = f(r , 2) = a_0 \quad .$$

(d) Si $a_j \neq a_0$, et s'il existe a_m ne vérifiant ni la condition $(F_{2'})$ ni la condition $(F_{2''})$, on pose :

$$c(r , 1) = a_j ,\quad c(r , 2) = a_k ;\quad f(r , 1) = a_m ,\quad f(r , 2) = a_m + a_\ell$$

où a_m est le premier élément de la suite A ne vérifiant ni la condition $(F_{2'})$ ni la condition $(F_{2''})$.

(6.5) $r \geqslant 2$, $q \geqslant 3$, $\psi(r , q) = r$. Désignons la valeur $\varphi(r , q)$ par s . Il faut maintenant distinguer deux cas :

(a) Si l'on a

([2]) Le cas (6.4) (a) ne peut pas se produire non plus, mais nous omettons la démonstration de ce fait, comme n'ayant aucune importance dans la suite.

$$(F_3) \qquad \exists\ q' \ \{q' < q\ ,\ c(r\ ,\ q') = a_s\} \qquad ,$$

ou bien pour chaque $a_m \in A$,

$$(F_4) \quad \exists\ r'\ ,\ q_1\ ,\ q_2\ ,\ q_3\ ,\ \{r' < r\ ,\ q_2 < q\ ,\ c(r'\ ,\ q_3) = c(r\ ,\ q_2)\ ,$$
$$c(r'\ ,\ q_1) = a_s\ ;\ a_m = f(r\ ,\ q_2) - f(r'\ ,\ q_3) + f(r'\ ,\ q_1)\} \quad ,$$

on pose $c(r\ ,\ q) = f(r\ ,\ q) = a_0$;

(b) Si les conditions (F_3) et (F_4) ne sont pas remplies, on pose : $c(r\ ,\ q) = a_s$ et $f(r\ ,\ q) = a_m$ où a_m est le premier élément de la suite A ne vérifiant pas la condition (F_4).

(6.6) $r \geq 2$, $q \geq 3$, $0 \leq \psi(r\ ,\ q) \leq r - 1$. Désignons les valeurs $\varphi(r\ ,\ q)$ et $\psi(r\ ,\ q)$ respectivement par s et t . Il faut maintenant distinguer deux cas :

(a) Si pour chaque q_1 , on a soit

$$(F_5) \qquad \exists\ q_2 \ \{q_2 < q\ ,\ c(t\ ,\ q_1) = c(r\ ,\ q_2)\} \qquad ,$$

soit

$$(F_6) \quad \exists\ r'\ ,\ q_2\ ,\ q_3\ ,\ q_4 \ \{r' < r\ ,\ q_2 < q\ ,\ c(t\ ,\ q_1) = c(r'\ ,\ q_3),$$
$$c(r\ ,\ q_2) = c(r'\ ,\ q_4)\ ,\ a_s + f(t\ ,\ q_1) = f(r\ ,\ q_2) - f(r'\ ,\ q_4) + f(r', q_3)\}$$

on pose $c(r\ ,\ q) = f(r\ ,\ q) = a_0$.

(b) Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe q_1 ne vérifiant ni la condition (F_5), ni la condition (F_6), on pose

$$c(r\ ,\ q) = c(t\ ,\ q_1)$$

et

$$f(r\ ,\ q) = a_s + f(t\ ,\ q_1)$$

où q_1 est le plus petit nombre naturel ne vérifiant ni (F_5) ni (F_6).

INTERPRÉTATION. - Nous avons dit qu'à chaque r correspond une ligne du tableau (*). La fonction $\ell(r)$ définissant cette correspondance n'est pas encore déterminée, mais nous verrons plus tard qu'aux valeurs $r = 0$ et $r = 1$ correspondent respectivement les lignes a_0 et a_1 . On en conclut immédiatement que les cas (6.1) et (6.3) de notre définition entraînent la vérification de deux égalités de l'axiome A_2 ($a.0 = 0$ et $0.a = 0$) et le cas (6.2) l'égalité $a.1 = a$ (de l'axiome A_3). (La deuxième égalité de l'axiome A_3 sera vérifiée grâce à la définition convenable de la fonction $\ell(r)$).

Les conditions considérées dans le cas (6.4) servent à assurer la vérification de l'axiome A_5, car grâce à ces conditions, pour chaque triplet $v = (a_j , a_k , a_\ell)$ (où $a_j \neq a_k$) il existe dans la tableau (*) une ligne telle que l'élément y correspondant à cette ligne vérifie l'égalité

$$a_j \cdot y + a_\ell = a_k \cdot y \quad .$$

Le seul cas : (6.4) (c) où elle pouvait ne pas exister, ne peut pas se produire en vérité, ce que nous verrons au lemme 3. L'interdiction de remplir la condition (F_1), dans les cas (b) et (d) a pour but d'assurer l'unicité de l'élément y pour chaque triplet v , ce qui est une propriété de groupe cartésien résultant des axiomes A_1 à A_5. Et l'interdiction de remplir les conditions $(F_{2'})$ et $(F_{2''})$ dans le cas (d), nous empêche de placer dans une colonne deux éléments égaux dans deux lignes différentes.

Le cas (6.5) assure que pour chaque r et s il existe un élément placé dans la ligne $\ell(r)$ et dans la colonne s , donc tout le tableau (*) sera rempli. L'interdiction de vérifier les conditions (F_3) et (F_4) dans le cas (b), a pour but d'empêcher de placer deux éléments différents à la même place (F_3) et d'assurer que, si pour une certaine équation (de l'axiome A_4) il y a déjà une solution, l'élément a_s n'en sera pas une deuxième (F_4).

Le cas (6.6) permet pour chaque $t < r$ de placer dans une certaine colonne $x = c(r , q)$ un élément $f(r , q)$ tel que x deviendra la solution de l'équation : $x.a_i = a_s + x.a_j$ (où $i = \ell(r)$ et $j = \ell(t)$). Les négations des conditions (F_5) et (F_6) dans le cas (6.6) (b) ont pour but d'empêcher de placer deux éléments différents à la même place (F_5) et d'assurer l'unicité de la solution pour la même équation (F_6).

Maintenant nous démontrerons plusieurs lemmes et théorèmes concernant les fonctions $c(r , q)$ et $f(r , q)$.

THÉORÈME 2. - <u>Pour chaque valeur de r , q , q' l'égalité</u> $c(r , q) = c(r , q')$ <u>entraîne</u> $f(r , q) = f(r , q')$.

Démonstration. - Supposons que l'on ait

(1) $$c(r , q) = c(r , q')$$

et

(2) $$q' < q \quad .$$

Considérons plusieurs cas pour les valeurs de r et q, correspondant aux différents cas de la définition 6.

(6.1) $r = 0$. Dans ce cas, on a, quels que soient q et q',

$$f(r , q) = a_0 = f(r , q') \quad .$$

(6.2) $r = 1$. La condition (1) implique $q = q'$, donc $f(r , q) = f(r , q')$.

(6.3) $q = 0$. Ce cas ne peut pas se produire à cause de la condition (2).

(6.4) $r \geqslant 2$, $q = 1$ ou $q = 2$. Il est évident que dans le cas (6.4) (a) et (c) notre théorème est vrai (car $f(r , 0) = f(r , 1) = f(r , 2) = a_0$). Dans le cas (d), les valeurs $c(r , 0)$, $c(r , 1)$ et $c(r , 2)$ sont différentes (car $0 \neq j < k$), donc il n'existe pas de valeur q' vérifiant les conditions (1) et (2). Dans le cas (b), les conditions (1) et (2) sont remplies si $q' = 0$, $q = 1$, mais alors $f(r , q') = a_0 = f(r , q)$.

Il nous reste maintenant à considérer le cas $r \geqslant 2$, $q \geqslant 3$, c'est-à-dire les cas (6.5) et (6.6) de la définition 6.

Nous pouvons exclure de nos considérations les cas (6.5) (a) et (6.6) (a), car dans ces deux cas on a $c(r , q) = f(r , q) = a_0$, et si notre théorème étant faux, il existerait q' vérifiant les conditions :

$$0 < q' < q \; ; \quad c(r , 0) = a_0 = c(r , q') \; ; \quad f(r , 0) = a_0 \neq f(r , q') \quad ,$$

donc il existerait un autre q pour lequel notre théorème est faux et tel que $f(r , q) \neq a_0$.

(6.5)(b) : $\psi(r , q) = r$, $c(r , q) = a_s$ et a_s ne vérifie pas la condition (F_3), donc il n'existe pas q' vérifiant nos hypothèses (1) et (2).

(6.6)(b) : $0 \leqslant \psi(r , q) \leqslant r - 1$, $c(r , q) = c(t , q_1)$ où q_1 ne remplit pas la condition (F_5) ; mais ceci est impossible car l'existence de q' vérifiant les hypothèses (1) et (2) entraîne la vérification de la condition (F_5) par q_1.

Ayant démontré le théorème 2, nous voyons que les fonctions $c(r , q)$ et $f(r , q)$ déterminent pour chaque r une fonction univalente $B_r(a_k)$ définie dans A de la manière suivante :

DÉFINITION 7. - On dit que $a_m = B_r(a_k)$ si et seulement s'il existe q tel que $c(r , q) = a_k$ et $f(r , q) = a_m$.

REMARQUE. - On ne peut pas encore affirmer que cette fonction est définie partout sur l'ensemble A, mais on déduit immédiatement du théorème 2 que, si la fonction

B_r est déterminée par un certain $a \in A$, elle y est univalente.

On a les lemmes suivants :

LEMME 1. - Pour chaque r la valeur $B_r(a_0)$ est déterminée et est égale à a_0.

LEMME 2. - Quels que soient r, a_j, a_k, a_ℓ fixés, le nombre d'éléments a_m remplissant la condition $(F_{2'})$ ou $(F_{2''})$ de la définition 6 est fini.

Démonstration. - En se basant sur la définition 7, on peut écrire la condition $(F_{2'})$ sous la forme

$$\exists \ r' \ \{r' < r \ , \ B_{r'}(a_j) = a_m\} \quad .$$

La fonction B_r étant univalente et l'élément a_j étant fixé, on voit que pour chaque r' il n'y a pas plus d'un a_m vérifiant cette condition. Donc le nombre d'éléments r' différents n'étant pas plus grand que r, on voit que le nombre d'éléments a_m différents vérifiant $(F_{2'})$ est aussi fini.

De la même façon, on démontre que le nombre d'éléments a_m différents vérifiant la condition $(F_{2''})$ est également fini.

Par suite :

LEMME 3. - Le cas (6.4) (c) de la définition 6 ne peut jamais se produire.

LEMME 4. - Si $v_p = (a_j , a_k , a_\ell)$ est le p-ième élément de la suite V (définition 5), alors il y a des nombres : r, q_1 et q_2 vérifiant les conditions suivantes :

(1) $0 \leqslant r \leqslant p$;

(2) $c(r , q_1) = a_j$, $c(r , q_2) = a_k$;

(3) $f(r , q_1) + a_\ell = f(r , q_2)$.

Démonstration par induction :

1° Il est évident que pour $p = 0$ il suffit de poser $r = q_1 = 0$, $q_2 = 1$; et pour $p = 1$: $r = q_2 = 1$, $q_1 = 0$.

2° Supposons maintenant que notre lemme soit vrai pour les éléments $v_0 , v_1 , v_2 , v_3 , \ldots , v_{p-1}$ (où $p \geqslant 2$), et démontrons-le pour $v_p = (a_j , a_k , a_\ell)$.

Dans ce but calculons les valeurs : $c(p , 1)$, $c(p , 2)$, $f(p , 1)$ et $f(p , 2)$, en s'appuyant sur la définition (6.4). Dans le cas (6.4) (a), notre lemme est évidemment vérifié, et dans tous les autres cas, il faut (pour calculer les valeurs de

c et de f) trouver le premier élément de la suite V ne vérifiant pas la condition (F_1). Les éléments $v_0 , \dots , v_{p-1}$ la vérifiant (d'après l'hypothèse d'induction), nous avons deux possibilités suivant que v_p est le premier élément qui ne la vérifie pas, ou qu'il la vérifie aussi.

Mais dans le premier cas on pose, soit (6.4) (b) :

$$c(p , 1) = a_j , \quad c(p , 2) = a_k , \quad f(p , 1) = a_0 , \quad f(p , 2) = a_\ell \quad ,$$

soit (6.4) (d) :

$$c(p , 1) = a_j , \quad c(p , 2) = a_k , \quad f(p , 1) = a_m , \quad f(p , 2) = a_m + a_\ell$$

(le cas (6.4) (c) selon le lemme 3, ne se produit jamais). Et alors notre lemme est vérifié par $r = p$, $q_1 = 1$ et $q_2 = 2$.

Dans le deuxième cas, la condition (F_1) étant vérifiée par v_p , il existe aussi r' , q_1 , q_2 vérifiant notre lemme.

LEMME 5. - <u>Quels que soient</u> r , q <u>vérifiant l'égalité</u> $\psi(r , q) = r$, <u>le nombre d'éléments</u> $a_m \in A$ <u>remplissant la condition (F_4) de la définition 6, est fini</u>.

Démonstration. - Supposons que a_m remplit la condition (F_4) :

$$\exists \; r' , q_1 , q_2 , q_3 \; \{r' < r , \quad q_2 < q , \quad c(r' , q_3) = c(r , q_2) , \quad c(r' , q_1) = a_s ,$$
$$a_m = f(r , q_2) - f(r' , q_3) + f(r' , q_1)\}$$

où $s = \varphi(r , q)$.

En désignant par a_k la valeur $c(r , q_2)$, et en se basant sur la définition 7, nous pouvons écrire cette condition sous la forme :

$$\exists \; r' , q_2 , a_k \; \{r' < r , \quad q_2 < q , \quad a_k = c(r , q_2) ,$$
$$a_m = B_r(a_k) - B_{r'}(a_k) + B_{r'}(a_s)\} \quad .$$

Les nombres d'éléments r' et q_2 différents vérifiant cette condition, donc aussi le nombre d'éléments a_k distincts étant fini, et l'élément a_s étant fixé, on voit immédiatement que le nombre d'éléments a_m distincts doit être également fini.

LEMME 6. - $\forall \; r , a_k , \; \exists \; q , \; \{c(r , q) = a_k\}$.

Démonstration. - Si $r = 0$ ou $r = 1$, nous poserons $q = k$, et le lemme sera vérifié immédiatement d'après la définition (6.1) ou (6.2).

Si $r \geq 2$ il faut considérer la valeur $c(r , q)$ où $q = (r + 1).k + 2$.

Dans ce cas $\psi(r , q) = r$ et $\varphi(r , q) = k$, nous avons donc le cas (6.5) de la définition 6. En considérant les possibilités (a) et (b) de ce cas, nous voyons que dans le cas (b) on pose $c(r , q) = a_k$, et dans le cas (a) (vu que d'après le lemme 5 la condition (F_4) ne peut pas être vérifiée par tous les a_m) la condition (F_3) doit être remplie, donc il existe q' tel que $c(r , q') = a_k$.

De ce lemme résulte immédiatement :

THÉORÈME 3. - Quel que soit le nombre naturel **r** **la fonction** $B_r(a_k)$ **est définie** partout sur l'ensemble A .

DÉFINITION 8. - On dit que le nombre r remplit la condition B si et seulement si, quels que soient r' , r'' , a_j vérifiant les conditions : $r' < r$, $r'' < r$, $r' \neq r''$, $a_j \in A$, il existe un et un seul élément $a_k \in A$ remplissant la condition

$$B_{r'}(a_k) = a_j + B_{r''}(a_k) \quad .$$

LEMME 7. - Si r , q vérifient toutes les conditions admises dans le cas (6.6) (a) de la définition 6, et si r remplit la condition B , alors il existe q' et a_m tels que

(1) $\quad q' < q$, $c(r , q') = a_m$, $B_r(a_m) = a_s + B_t(a_m)$

où $s = \varphi(r , q)$ et $t = \psi(r , q)$.

Démonstration. - Supposons vérifiées les hypothèses de notre lemme :

(2) $r \geqslant 2$, $q \geqslant 3$;

(3) $\varphi(r , q) = s$, $\psi(r , q) = t$, $0 \leqslant t \leqslant r - 1$;

(4) r remplit la condition B ;

(5) chaque q_1 vérifie, soit la condition (F_5), soit la condition (F_6).

Considérons l'ensemble A . Selon le lemme 6, pour chaque $a_k \in A$, il y a un q_1 tel que

(6) $$a_k = c(t , q_1) \quad .$$

Considérons d'abord tous les a_k auxquels correspondent q_1 vérifiant la condition (F_5). Il est évident que leur nombre doit être fini, car ils doivent remplir l'égalité $a_k = c(r , q_2)$, où $q_2 < q$.

Maintenant, considérons tous les a_k auxquels correspondent q_1 vérifiant la condition (F_6) avec la condition supplémentaire

(7) $$r' \neq t \quad .$$

Si nous désignons $c(r, q_2)$ par a_m, nous pouvons écrire (F_6) sous la forme suivante :

$$\exists\ r', q_2, a_m\ \{r' < r,\ q_2 < q,\ a_m = c(r, q_2),$$
$$a_s + B_t(a_k) = B_r(a_m) - B_{r'}(a_m) + B_{r'}(a_k)\} \quad .$$

Posons maintenant $a_i = - a_s + B_r(a_m) - B_{r'}(a_m)$.

r et s étant fixés et r', q_2 étant bornés, le nombre des éléments a_m distincts, donc aussi celui des a_i, doit être fini.

Nous voyons donc que a_k doit vérifier les égalités

$$(8) \qquad B_t(a_k) = a_i + B_{r'}(a_k)$$

où $r' < r$, $t < r$, $r' \neq t$ et le nombre des équations (8) différentes est fini. On en conclut, en se basant sur la condition (4), que le nombre des éléments a_k distincts vérifiant la condition (F_6) avec l'hypothèse supplémentaire (7) est fini. Comme nous avons déjà démontré que le nombre des a_k vérifiant (F_5) est aussi fini, et comme l'ensemble A est infini, nous voyons qu'il doit exister a_k vérifiant les conditions (6) et (F_6) mais ne vérifiant pas la condition (7). Or, on a $a_m = c(r, q_2)$, $q_2 < q$ et

$$a_s + B_t(a_k) = B_r(a_m) - B_t(a_m) + B_t(a_k)$$

d'où résulte

$$a_s + B_t(a_m) = B_r(a_m) \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 4. - <u>La condition</u> B <u>de la définition 8 est remplie par tous les nombres naturels.</u>

Démonstration par induction. - Les hypothèses de la condition B n'étant remplies qu'à partir de $r = 2$, il faut commencer l'induction par $r = 2$.

1° Pour prouver que le nombre 2 remplit la condition B il faut démontrer que les équations

$$B_0(a_k) = a_j + B_1(a_k) \qquad \text{et} \qquad B_1(a_k) = a_j + B_0(a_k)$$

possèdent chacune exactement une solution pour chaque valeur de a_j. En se basant sur les définitions (6.1) et (6.2), nous pouvons représenter ces équations respectivement sous la forme :

$$a_0 = a_j + a_k \qquad \text{et} \qquad a_k = a_j + a_0 \quad ,$$

et il est évident que chacune d'elles possède exactement une solution (respectivement $a_k = - a_j$ et $a_k = a_j$).

2° Supposons maintenant le théorème vrai pour un certain nombre r (où $r \geqslant 2$), c'est-à-dire supposons que le nombre r remplit la condition B . Il faut démontrer que $r + 1$ remplit également la condition B .

Pour le prouver, il suffit de démontrer que, quels que soient $a_j \in A$ et $r' < r$, il existe un et un seul élément a_k vérifiant la condition

(1) $$B_r(a_k) = a_j + B_{r'}(a_k) \quad .$$

(L'équation $B_{r'}(a_k) = a_j + B_r(a_k)$ est équivalente à l'équation $B_r(a_k) = - a_j + B_{r'}(a_k)$ ayant la même forme que (1), et l'existence d'une solution unique pour chaque équation $B_{r'}(a_k) = a_j + B_{r''}(a_k)$, où $r' \neq r''$ et r' , $r'' < r$, résulte de l'hypothèse d'induction.)

Nous partagerons la suite de cette démonstration en deux parties en démontrant successivement l'existence de la solution a_k et son unicité.

A. Existence. - Si $j = 0$, l'équation (1) prend la forme $B_r(a_k) = B_{r'}(a_k)$ et la solution est $a_k = a_0$.

Supposons donc que $j \geqslant 1$, et considérons les valeurs des fonctions $c(r , q)$ et $f(r , q)$ pour $q = (r + 1).j + r' - r + 2$. Nous avons donc : $r \geqslant 2$; $q \geqslant (r + 1).1 + r' - r + 2 \geqslant 3$; $\varphi(r , q) = j$; $0 \leqslant \psi(r , q) = r' \leqslant r - 1$, et alors toutes les conditions du cas (6.6) de la définition 6 sont remplies. Si l'on a le cas (6.6) (a), alors, d'après le lemme 7, il existe a_k vérifiant la condition (1), et si l'on a le cas (6.6) (b) l'élément $a_k = c(r , q)$ est celui qui vérifie l'équation (1).

B. Unicité. - Supposons qu'il existe deux éléments a_k et $a_{k'}$ différents vérifiant la condition (1). Soient q et q' les plus petits nombres vérifiant les conditions

(2) $$a_k = c(r , q) \qquad \text{et} \qquad a_{k'} = c(r , q') \quad .$$

On peut supposer sans diminuer la généralité :

(3) $$q' < q \qquad \text{donc} \qquad q \neq 0$$

Considérons maintenant les valeurs particulières de q . Puisque $r \geqslant 2$, il ne faut considérer que les cas suivants de la définition 6 : (6.3), (6.4) (a, b, c, d), (6.5) (a, b), (6.6) (a, b).

Mais dans les cas : (6.4) (b) pour $q = 1$, (6.3), (6.4) (a), (6.4) (c), (6.5) (a) et (6.6) (a) on a $a_k = c(r , q) = a_0$. Vu que $q \neq 0$, il existe un autre nombre, notamment 0 , plus petit que q , et tel que $a_k = c(r , 0)$, ce qui est contraire à l'hypothèse que q est minimum pour cette condition.

Il ne nous reste que les cas (6.4) (b) pour $q = 2$, (6.4) (d), (6.5) (b) et (6.6) (b).

L'existence de deux solutions différentes de l'équation (1) vérifiant les conditions (2) et (3), implique :

$$B_r(a_k) - B_{r'}(a_k) = a_j = B_r(a_{k'}) - B_{r'}(a_{k'}) \qquad ,$$

d'où résulte

$$B_r(a_k) = B_r(a_{k'}) - B_{r'}(a_{k'}) + B_{r'}(a_k) \qquad ,$$

donc

(4) $\exists\ q' , \bar{q} , \bar{q}', \{q' < q , \ c(r , q) = a_k = c(r' , \bar{q}) ,$

$$c(r , q') = a_{k'} = c(r' , \bar{q}') , \ f(r , q) = f(r , q') - f(r' , \bar{q}') + f(r' , \bar{q})\}.$$

Il est facile de vérifier que cette condition est contradictoire avec les conditions qui doivent être vérifiées dans les cas (6.5)(b) et (6.6)(b), car elle entraîne respectivement la vérification soit de (F_4) soit de (F_6).

Dans le cas (6.4) (d) pour $q = 2$, et $q' = 1$, la condition (4) prend la forme :

$$\exists\ \bar{q} , \bar{q}' , \{c(r , 2) = a_k = c(r' , \bar{q}) , \ c(r , 1) = a_j = c(r' , \bar{q}') ,$$

$$a_m + a_\ell = a_m - f(r' , \bar{q}') + f(r' , \bar{q})\}$$

ce qui entraîne la vérification de la condition (F_1).

Et pour $q' = 0$ et $q = 1$ ou $q = 2$ la condition (4) entraîne respectivement soit la vérification de la condition $(F_{2'})$ soit celle de la condition $(F_{2''})$.

Enfin, dans le cas (6.4) (b) pour $q = 2$, on a $c(r , q') = a_0 = f(r , q')$, et alors la condition (4) implique

$$a_j = a_0 = c(r' , \bar{q}') \ ; \ a_k = c(r' , \bar{q}) \ ; \ f(r , q) = a_\ell = f(r' , \bar{q})$$

donc $a_\ell = - a_0 + f(r' , \bar{q}) = -f(r' , \bar{q}') + f(r' , \bar{q})$ et alors la condition (F_1) est remplie.

Nous avons donc démontré dans tous les cas possibles l'unicité de la solution de l'équation (1), d'où le théorème 4.

LEMME 8. - <u>Quel que soit</u> $a_m \in A$ <u>il existe un et un seul nombre naturel</u> r <u>tel que</u> $a_m = B_r(a_1)$.

Démonstration. - Pour démontrer l'existence de r , considérons l'élément (a_0 , a_1 , a_m) de la suite V . Selon le lemme 4, il existe r , q_1 et q_2 tels que $c(r , q_1) = a_0$, $c(r , q_2) = a_1$ et $f(r , q_1) + a_m = f(r , q_2)$, c'est-à-dire $a_0 + a_m = B_r(a_1)$.

S'il existait deux valeurs r' et r'' distinctes vérifiant cette condition, on aurait $B_{r'}(a_1) = B_{r''}(a_1)$. Mais vu le lemme 1, on a $B_{r'}(a_0) = B_{r''}(a_0)$, et alors l'équation $B_{r'}(a_k) = B_{r''}(a_k)$ posséderait deux solutions différentes : $a_k = a_0$ et $a_k = a_1$, malgré le théorème 4.

En posant :

DÉFINITION 9. $$\ell(r) = B_r(a_1) \quad ,$$

on pourra facilement déduire du lemme 8 le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - <u>La fonction</u> $\ell(r)$ <u>est inversible. La fonction inverse</u> $r = \ell^{-1}(a_m)$ <u>est définie partout sur l'ensemble</u> A , <u>et son image est l'ensemble de tous les nombres entiers</u> $r \geqslant 0$. <u>En particulier on a</u> $\ell^{-1}(a_0) = 0$ <u>et</u> $\ell^{-1}(a_1) = 1$.

Maintenant, nous pouvons définir la deuxième loi de composition (multiplication) sur l'ensemble A .

DÉFINITION 10. $$a_k \cdot a_m = B_{\ell^{-1}(a_m)}(a_k) \quad .$$

(On pourrait écrire cette définition aussi sous la forme $a_k \cdot a_m = f(\ell^{-1}(a_m) , c^{-1}(a_k))$, où c^{-1} n'est pas une fonction univalente, mais grâce au théorème 2, le produit est déterminé d'une manière univoque.)

Les théorèmes 3 et 5 entraînent alors le résultat suivant :

THÉORÈME 6. - La multiplication est une opération partout définie sur l'ensemble A .

Pour démontrer notre théorème fondamental, (théorème 1), il faut encore prouver que cette multiplication remplit les axiomes A_2 à A_5 :

A_2. $a_0 \cdot a_k = B_{\ell^{-1}(a_k)}(a_0) = a_0$.

$$a_k \cdot a_0 = B_{\ell^{-1}(a_0)}(a_k) = B_0(a_k) = a_0 \quad .$$

A_3. $a_1 . a_k = B_{\ell^{-1}(a_k)}(a_1) = a_k$

$a_k . a_1 = B_{\ell^{-1}(a_1)}(a_k) = B_1(a_k) = a_k$.

A_4. Soient a_i , a_j , a_k trois éléments de A , tels que $a_i \neq a_k$. Considérons l'équation $x.a_i = a_j + x.a_k$. On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$B_{r'}(x) = a_j + B_{r''}(x) \qquad \text{où} \qquad r' = \ell^{-1}(a_1) \qquad \text{et} \qquad r'' = \ell^{-1}(a_k) \quad .$$

Les éléments a_i et a_k étant différents, et la fonction $\ell(r)$ étant univalente, on voit que $r' \neq r''$; or notre équation possède d'après le théorème 4 une et seulement une solution x .

A_5. Soient a_i , a_j , a_k trois éléments de A , tels que $a_i \neq a_j$. Considérons l'équation $a_i . y = a_j . y + a_k$. On peut l'écrire sous la forme suivante :

(1) $$B_r(a_i) = B_r(a_j) + a_k \qquad \text{et} \qquad y = \ell(r) \quad .$$

Maintenant, il suffit de démontrer qu'il existe r vérifiant la condition (1). Dans ce but considérons deux possibilités :

1° $j < i$. Dans ce cas, nous considérons le triplet (a_j , a_i , a_k) . Ce triplet appartient évidemment à l'ensemble V , ce qui entraîne, d'après le lemme 4 , l'existence d'une solution r de l'équation (1).

2° $j > i$. Dans ce cas, nous considérons le triplet $(a_i , a_j , -a_k)$. Ce triplet appartenant à V , il existe un r vérifiant l'équation $B_r(a_i) - a_k = B_r(a_j)$, qui est équivalente à l'équation (1).

Ainsi, nous avons démontré que la multiplication définie dans la définition 10 vérifie les axiomes A_2 à A_5, ce qui, avec le théorème 6, démontre notre théorème 1.

Nous avons même démontré un théorème un peu plus général si l'on note que la suite A a été prise arbitrairement :

THÉORÈME 7. - <u>Pour tout groupe infini dénombrable A , noté additivement, on peut définir une loi de multiplication de manière à obtenir un groupe cartésien, dont l'unicité sera un élément choisi arbitrairement parmi tous les éléments de A différents de 0</u> .

L'application des résultats obtenus dans ce travail est la suivante :

On appelle géométrie plane affine tout système vérifiant les axiomes [3] :

---

[3] cf. [2], p. 318 et 319 ; [1], p. 52 et 53.

G_1. Deux points distincts P et Q appartiennent à une même droite D' et à une seule. Une droite donnée contient toujours deux points distincts.

G_2. Il existe trois points non situés sur une même droite.

G_3. Un point P n'appartenant pas à une droite D' appartient à une droite unique n'ayant aucun point commun avec D'.

On dit qu'une géométrie plane affine est de translation pour la direction Z si le théorème de Desargues pour cette direction et pour la droite de l'infini est valable. Précisément : si pour deux triangles dont les sommets convenables sont situés sur trois droites ayant la direction Z, le parallélisme de deux couples de côtés convenables entraîne le parallélisme des autres (4).

Dans une telle géométrie, on peut déterminer un groupe de transformations, dites "translations pour la direction Z" ([1], p. 56-57).

Il est bien connu que chaque groupe cartésien permet de construire une géomètrie plane affine de translation pour une direction de manière que la groupe de translation (pour cette direction) soit isomorphe au groupe additif de ce groupe cartésien (5).

Le problème posé en 1957 dans le livre d'ARTIN (6) de savoir s'il existe une géométrie plane affine de translation pour une direction, dont le groupe de translations soit non-commutatif, avait déjà été résolu par G. PICKERT qui a démontré l'existence d'un groupe cartésien non-commutatif en 1952 [3].

Les résultats de notre travail nous permettent de généraliser cette solution, en disant que pour chaque groupe infini dénombrable il existe une géométrie plane affine de translation pour une direction dont le groupe de translations soit isomorphe à ce groupe.

---

(4) Cette définition est équivalente à celle qui se trouve à la "Remarque" de la page 327 dans [2].

(5) Cela résulte de la deuxième partie du théorème 3 ([2], p. 323).

(6) [1], Remarque, p. 58.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (E.). - Geometric algebra. - New-York, London, Interscience Publishers, 1957 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 3).

[2] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algèbriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[3] PICKERT (Günter). - Nichtkommutative cartesische Gruppen, Archiv der Math., t. 3, 1952, p. 335-342.

[4] PICKERT (Günter). - Projective Ebenen. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 80).