Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

PIERRE LEFEBVRE

Sur les demi-groupes admettant pour image homomorphe un groupe avec zéro

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 1 (1959-1960), exp. n° 7, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_1_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
13e année, 1959/60, n° 7

21 décembre 1959

SUR LES DEMI-GROUPES ADMETTANT POUR IMAGE HOMOMORPHE UN GROUPE AVEC ZÉRO

par Pierre LEFEBVRE

INTRODUCTION. - Les résultats exposés dans ce travail font partie d'un projet de thèse, dont le point de départ est l'étude d'une généralisation de la notion d'homogroupe ([13]). Un homogroupe D est un demi-groupe possédant un groupe G comme idéal ; il existe un homomorphisme appliquant D sur G ; G est d'ailleurs, dans un certain sens ([12]) le plus grand groupe homomorphe à D.

On obtient une généralisation satisfaisante de cette notion, au moins dans le cas sans zéro, en considérant la classe des demi-groupes possédant à la fois des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux ([3] et [4]) ou, ce qui est équivalent, des idéaux à droite minimaux et des idéaux à gauche minimaux, ou encore un demi-groupe complètement simple sans zéro ([9] et [10]) comme idéal.

La recherche, pour ces demi-groupes, du plus grand groupe homomorphe ([5]) m'a amené à approfondir le rôle, dans un demi-groupe quelconque, des sous-demi-groupes normaux unitaires ([1]) et, plus généralement, des sous-demi-groupes réflectifs unitaires ([1], [7] et [12]), qui constituent, pour un demi-groupe, une généralisation de la notion de sous-groupe invariant d'un groupe. En particulier, certaines questions de modularité m'ont conduit à appliquer systématiquement les théorèmes d'isomorphisme démontrés par P. DUBREIL pour des groupoïdes quelconques ([2]).

Cet exposé est consacré en fait aux résultats obtenus pour le cas d'un demi-groupe D admettant pour image homomorphe un groupe avec zéro (voir aussi [6]). L'introduction d'un zéro, qui complique certains raisonnements et qui se révèle parfois, du point de vue gain en généralité, quelque peu illusoire, se justifie par l'espoir d'obtenir ultérieurement des résultats non triviaux dans le cas d'un demi-groupe avec zéro.

On trouvera essentiellement dans ce travail : une étude des complexes de D dont l'image est un sous-groupe (avec zéro) du groupe (avec zéro) homomorphe à D ; deux théorèmes d'isomorphisme, qui généralisent pour le cas envisagé les théorèmes classiques pour les groupes ; le premier de ces théorèmes met en évidence certaines propriétés intéressantes des demi-groupes admettant un sous-demi-groupe normal unitaire minimum. Parmi ceux-ci, j'étudie spécialement le cas des demi-groupes simples à idempotents, des demi-groupes inversés et rectangulaires ([14]), des demi-groupes de Vagner ([8] et [15]) et enfin celui des demi-groupes admettant à la fois des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux.

1. Hypothèses et notations.

Dans tout ce qui suit, D représente un demi-groupe, avec ou sans zéro ; $\bar{G} = \bar{G}^* \cup \{\bar{0}\}$ un groupe avec zéro, somme du groupe $\bar{G}^*$ et d'un zéro $\bar{0}$; f un homomorphisme appliquant D sur $\bar{G}$: $D \longrightarrow \bar{G} = f(D)$, $\mathcal{P}$ l'équivalence d'homomorphisme associée à f.

De [1], [7] et [12], on déduit assez facilement le lemme suivant.

LEMME 1.1. - <u>Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des groupes, avec zéro et sans zéro, homomorphes à un demi-groupe D, et l'ensemble des complexes S de D vérifiant une des conditions suivantes (équivalentes)</u> :

(Q_1) S <u>est un sous-demi-groupe symétrique, fort, unitaire de</u> D ;

(Q_2) S <u>est un sous-demi-groupe réflectif unitaire</u> ;

(Q_3) S <u>est un sous-demi-groupe vérifiant la propriété</u>

(C) $$a, b, x \in D \quad axb \in S \quad ab \in S \Longrightarrow x \in S \quad .$$

Nous renvoyons à [1] pour la définition des termes employés ci-dessus et à [12] pour le passage de cette correspondance biunivoque à un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Nous noterons seulement qu'un complexe S de D est dit <u>réflectif</u> lorsque :

$$a , b \in D \quad ab \in S \Longrightarrow ba \in S \quad .$$

Nous rappelons encore qu'un complexe S de D vérifiant une des conditions précédentes est équirésiduel et disjoint de son résidu (premier) Z lorsque celui-ci n'est pas vide ([1]).

Le groupe (avec ou sans zéro) homomorphe à D, correspondant à un complexe S donné, est défini par une quelconque des équivalences principales attachées à S :

$$a \equiv b(\mathcal{R}_S = {}_S\mathcal{R}) \Longleftrightarrow S\,.\,^{\cdot}a = S\,.\,^{\cdot}b \Longleftrightarrow S^{\cdot}.a = S^{\cdot}.b \quad .$$

Si le résidu Z de S est vide ($Z = \emptyset$), le quotient $D/S = D/\mathcal{R}_S = D/{}_S\mathcal{R}$ est un groupe ; S est dit <u>normal unitaire</u>. Un sous-demi-groupe normal unitaire est à la fois réflectif unitaire et net.

Si $Z \neq \emptyset$, ce quotient est un groupe avec zéro ; S est dit pseudo-normal unitaire ([1]).

Dans ce dernier cas, on remarque que $D - Z$ est un sous-demi-groupe de D contenant S et est appliqué par f sur $\bar{G}^*$ d'après le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} S & \subseteq & (D - Z) & + & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bar{e} & \in & \bar{G}^* & + & \{\bar{0}\} \end{array}$$

Dans $D - Z$, S est normal unitaire : cette remarque explique comment de nombreux résultats peuvent en fait se déduire immédiatement du cas $Z = \emptyset$.

Notons encore que l'ensemble $\mathcal{S}$ des complexes S de D vérifiant une des conditions (C_i), complété le cas échéant par l'ensemble vide, forme une famille de Moore, donc un treillis complet. Si D est un groupe, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des sous-groupes invariants : le treillis $\mathcal{S}$ est alors modulaire. Nous avons étudié un cas où l'on a encore, pour $\mathcal{S}$, cette propriété de modularité.

Dans tout ce qui suit, S représente maintenant un sous-demi-groupe réflectif unitaire propre déterminé ($S \neq \emptyset$, $S \neq D$) ayant un résidu Z non vide ; $D/S = \bar{G}$ est un groupe avec zéro homomorphe à D : $D \xrightarrow{f} \bar{G} = \bar{G}^* \cup \{\bar{0}\} = D/S$.

Nous utiliserons également l'extension saturée W' , modulo l'équivalence d'homomorphisme $\mathcal{P}$, d'un complexe W de D : $W' = \{x \; ; \; x \in D \; ; \; \exists w \in W , \; x \equiv w(\mathcal{P})\}$. Si $\bar{W} = f(W)$, W' est l'image inverse, par f^{-1} , de $\bar{W}$.

Suivant que W coupe ou non S (ou Z), W' contient ou non S (ou Z), car S et Z sont des classes modulo $\mathcal{P}$.

2. <u>Etude des complexes de</u> D <u>dont l'image homomorphe est un sous-groupe de</u> $\bar{G}$.

LEMME 2.1 - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que l'image homomorphe d'un complexe</u> W <u>de</u> D <u>soit un sous-groupe avec zéro de</u> $\bar{G}$ <u>est que l'image homomorphe de sa trace</u> U <u>sur</u> $D - Z$: $U = W \cap (D - Z)$ <u>soit un sous-groupe de</u> $\bar{G}^*$.

REMARQUE 2.1. - Il résulte de ce lemme que notre étude porte essentiellement sur les complexes contenus dans le sous-demi-groupe $D - Z$.

LEMME 2.2. - <u>Pour qu'un complexe</u> U <u>de</u> D <u>ait pour image dans l'homomorphisme considéré un sous-groupe</u> $\bar{U}$ <u>de</u> $\bar{G}^*$, <u>il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée</u> :

(F) $\quad u \, , u' \in U \, , \; x \in D \, , \; u' x \in S \implies \exists u_1 \in U \; \; ux \equiv u_1(\mathcal{P})$

(G) $\begin{cases} (G_1) & u \, , u' \in U \implies \exists u_1 \in U \; \; uu' \equiv u_1(\mathcal{P}) \\ (G_2) & \forall u \in U \; \; uU \cap S \neq \emptyset \end{cases}$.

REMARQUE 2.2. - Si l'on introduit l'extension saturée U' de U modulo $(\mathcal{P})$, la condition (F) se met sous une forme équivalente (F'), que m'a signalée P. DUBREIL :

$$(F') \qquad \forall u \in U \qquad U(S.\dot{}u) \subseteq U' \quad .$$

REMARQUE 2.3. - La réflectivité de S permet de remplacer $S.\dot{}u$ par $S\dot{}.u$ dans (F') et uU par Uu dans (G_2). On notera également que (G_2) entraîne $U \subsetneq D - Z$.

DÉMONSTRATION. - C'est la traduction dans D, des conditions classiques pour qu'un complexe du groupe $\bar{G}^*$ soit un sous-groupe.

Nous démontrons d'abord que, si $\bar{U}$ est un sous-groupe de $\bar{G}^*$, (F) est vérifiée. Soit $u, u' \in U$, $x \in D$, $u'x \in S$, ces relations entraînent dans $\bar{G}$, pour les images $\bar{u}$, $\bar{u}'$ et $\bar{x}$ de u, u' et x : $\bar{u}'.\bar{x} = \bar{e}$ (e élément neutre de $\bar{G}$). $\bar{U}$ étant un sous-groupe, $\bar{u} \in \bar{U}$, $\bar{u}' \in \bar{U}$ entraînent $\bar{u}.\bar{u}'^{-1} = \bar{u}.\bar{x} = \overline{ux} \in \bar{U}$. De la définition de $\bar{U}$ résulte qu'il existe dans U un élément u_1 tel que $ux \equiv u_1(\mathcal{P})$.

Démontrons ensuite que si (F) est vérifiée, $\bar{U}$ est un sous-groupe de $\bar{G}^*$. Soit $\bar{u} \in \bar{U}$, $\bar{u}' \in \bar{U}$ $(\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{u}' \neq \bar{0})$, images de deux éléments u et u' de U. Si $\bar{x}$ est l'inverse de $\bar{u}'$ dans $\bar{G}$, on a $\overline{u'x} = \bar{e}$ d'où $u'x \in S$. De la condition (F) on déduit l'existence de $u_1 \in U$ tel que $ux \equiv u_1(\mathcal{P})$ c'est-à-dire :

$$\bar{u}.\bar{u}'^{-1} = \bar{u}.\bar{x} = \bar{u}_1 \in \bar{U}$$

Nous démontrons enfin l'équivalence des conditions (F) et (G).

(F) $\Longrightarrow$ (G) : Si U vérifie (F), U coupe S : car S étant net dans $D - Z$, il existe $x \in D - Z$ tel que $ux \in S$ et d'après la condition (F) appliquée en prenant $u' = u$, on voit qu'il existe $u_1 \in U$ tel que $ux \equiv u_1(\mathcal{P})$ c'est-à-dire $u_1 \in S$.

Soit $u \in U$; il existe $x \in D$ tel que $ux \in S$; prenons un élément quelconque de $S \cap U$ soit $t \in S \cap U$. En appliquant la condition (F) pour u et t et en remarquant que $sx \equiv x(\mathcal{P})$ $\forall x \in D$ et $\forall s \in S$, on voit qu'il existe $u_1 \in U$ tel que $tx \equiv u_1(\mathcal{P})$ d'ou $x \equiv u_1(\mathcal{P})$ et $ux \equiv uu_1(\mathcal{P})$ et finalement $uu_1 \in S$. La condition (G_2) est donc vérifiée.

Soit enfin $u, u' \in U$. On a $uu' \notin Z$, sinon u ou u' appartient à Z. Donc $\exists x \in D$ tel que $uu'x \in S$.

Soit u'' un élément de U tel que $u''u \in S$ (condition (G_2)). En appliquant la condition (F) à u et u'', on détermine un élément $u_1 \in U$ tel que $u'' u' x \equiv u_1(\mathcal{P})$. D'après la propriété $sx \equiv x(\mathcal{P})$ $\forall x \in D$ et $\forall s \in S$, on a $x \equiv u_1(\mathcal{P})$. Si u_1' est un élément de U tel que $u_1 u_1' \in S$, on voit que $xu_1' \equiv u_1 u_1'(\mathcal{P})$ d'ou $xu_1' \in S$. De $uu' x \in S$ résulte alors $uu' \equiv u_1'(\mathcal{P})$. La condition (G_1) est donc vérifiée.

(G) $\Longrightarrow$ (F) : Soit $u' x \in S$ avec $u, u' \in U$, $x \in D$. On sait, d'après la condition (G_2), qu'il existe $u'' \in U$ tel que $u' u'' \in S$ d'ou $x \equiv u''(\mathcal{P})$ et $ux \equiv uu'(\mathcal{P})$. En appliquant (G_1), on détermine $u_1 \in U$ tel que $uu'' \equiv u_1(\mathcal{P})$ d'ou $ux = u_1(\mathcal{P})$;

C. Q. F. D.

On déduit de ce lemme des conditions suffisantes pour que l'image $\bar{U}$ d'un complexe U de D soit un sous-groupe de $\bar{G}^*$. En particulier :

DÉFINITION 2.1. - On dit que le complexe H du demi-groupe D est net à droite (à gauche) <u>par rapport</u> au complexe K de D lorsque : $\forall k \in K$ $\exists x \in D$ tel que $kx \in H$ $(xk \in H)$. Si $H \subseteq F$ et si $\forall k \in F$ $\exists x \in F$ tel que $kx \in H$ $(xk \in H)$ H est dit net à droite (à gauche) <u>dans</u> F.

THÉORÈME 2.1. - <u>Tout sous-demi-groupe</u> U, <u>unitaire d'un côté, tel que l'intersection</u> $S \cap U$ <u>soit nette de l'autre côté par rapport à</u> U (<u>ce qui entraîne</u> $S \cap U \neq \emptyset$ <u>et</u> $S \cap U$ <u>nette dans</u> U), <u>a pour image homomorphe un sous-groupe</u> $\bar{U}$ <u>de</u> $\bar{G}^*$.

On vérifie aisément que U satisfait, par exemple, à la condition (G).

COROLLAIRE 2.1. - <u>Tout sous-demi-groupe</u> U, <u>unitaire d'un côté, contenant</u> S <u>et ne coupant pas</u> Z, <u>est unitaire de l'autre côté, donc unitaire, et a pour image homomorphe par</u> f <u>un sous-groupe de</u> $\bar{G}^*$.

Démontrons que U est unitaire. Supposons U unitaire à gauche ; si $xu \in U$ avec $u \in U$, $\exists t \in D$ tel que $xut \in S \subseteq U$ car S est net dans $D - Z$, d'où $t \in U$, S étant réflectif, on a : $(ut)x \in X \subseteq U$ et comme $ut \in U$, on a aussi $x \in U$: U est donc aussi unitaire à droite. La fin du corollaire se déduit immédiatement du théorème 2.1.

Parmi les complexes U de $D - Z$ dont l'image homomorphe est un sous-groupe de $\bar{G}^*$, les plus intéressants sont ceux qui sont image inverse d'un sous-groupe de $\bar{G}^*$. On a immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. - <u>Si</u> $\bar{U}$ <u>est un sous-groupe de</u> $\bar{G}^*$, <u>l'image inverse</u> U' <u>de</u> $\bar{U}$ <u>est un sous-demi-groupe unitaire de</u> D <u>contenant</u> S <u>et ne coupant pas</u> Z.

REMARQUE 2.4. - Dans une étude générale sur le comportement dans les homomorphismes des propriétés intervenant couramment dans la théorie des demi-groupes, P. DUBREIL a démontré, de plus, que U' *est fort*.

Si on prend l'image inverse d'un sous-groupe avec zéro de $\bar{G}$, on obtient :

THÉORÈME 2.3. - *Si* $\bar{W}$ *est un sous-groupe avec zéro de* $\bar{G}$, *l'image inverse* W' *de* $\bar{W}$ *est la somme de l'idéal premier* Z *et d'un sous-demi-groupe unitaire de* D *contenu dans* $D - Z$.

REMARQUE 2.5. - W' n'est ni unitaire, ni fort (cf. théorème 2.2. et remarque 2.4).

Nous étudions ensuite ceux des complexes de $D - Z$ dont l'image homomorphe est un sous-groupe invariant de $\bar{G}^*$. Les conditions obtenues traduisent simplement le fait qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe d'un groupe soit invariant est qu'il soit réflectif.

LEMME 2.3. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'image* $\bar{U}$ *d'un complexe* U *vérifiant l'une des conditions* (F) *ou* (G) *soit un sous-groupe invariant de* $\bar{G}^*$ *est qu'une des conditions suivantes (équivalentes) soit vérifiée* :

(H) $\qquad u \in U\,,\quad a\,,\ b \in D \quad ab \equiv u(\mathcal{P}) \implies \exists u' \in U\,,\quad ba \equiv u'(\mathcal{P})$

(H') $\qquad u \in U\,,\quad a\,,\ b \in D \quad abu \in S \implies \exists u' \in U\,,\quad bau' \in S$

Pour démontrer l'équivalence de (H) et de (H'), il suffit de remarquer que les relations $\exists u \in U \ \ ab \equiv u(\mathcal{P})$ et $\exists u' \in U \ \ abu' \in S$ sont équivalentes, ce qu'on voit facilement en prenant $u'' \in U$ tel que $uu'' \in S$ (condition (G_2)) et en utilisant le fait que $\forall s \in S \ \ \forall x \in D \ \ sx \equiv x(\mathcal{P})$. Le reste de la démonstration résulte immédiatement du fait que la condition (H) exprime que l'extension saturée U' de U modulo $\mathcal{P}$ est réflective.

On déduit en particulier de ce lemme, le théorème suivant :

THÉORÈME 2.4. - *Si* U *est un sous-demi-groupe réflectif de* D *vérifiant les conditions* :

(G_2) $$\forall u \in U \quad uU \cap S \neq \emptyset$$

(G_3) $$\forall s \in S \quad sS \cap U \neq \emptyset$$

l'image homomorphe par f *de* U *est un sous-groupe invariant de* $\bar{G}^*$.

Soit $u \in U$ tel que $abu \in S$. Nous démontrons qu'il existe $u' \in U$ tel que $ba \equiv u'(\mathcal{P})$. De $abu \in S$, de la condition (G_3) et de la réflectivité de S , on déduit l'existence de $x\,,\ x' \in D$ tels que $ax \in U$ et $x'b \in U$.

U étant un sous-demi-groupe, on a $axx'b \in U$ et $axx'bu \in U$.

U étant réflectif, on a : $xx'bua \in U$; de la condition (G_2) résulte que : $\exists u_1 \in U$ tel que $u_1 xx' bua \in S$.

S étant réflectif et unitaire, de $abu \in S$ ou $bua \in S$ on déduit $u_1 xx' \in S$. En outre, $axx'b \in U$ entraîne, puisque U est réflectif, $baxx' \in U$. De la condition (G_2) résulte que : $\exists u'_1 \in U$ tel que $u'_1 baxx' \in S$. Comparant $u_1 xx' \in S$ et $u'_1 baxx' \in S$ on déduit que $u_1 \equiv u'_1 ba(\mathcal{P})$ d'où, en prenant $u''_1 \in U$ tel que $u''_1 u'_1 \in S$: $u''_1 u_1 = u''_1 u'_1 ba \equiv ba(\mathcal{P})$ et en posant $u''_1 u_1 = u' \in U$, $ba \equiv u'(\mathcal{P})$,

C. Q. F. D.

REMARQUE 2.6. - Les hypothèses du théorème 2.4 sont vérifiées, en particulier, lorsque U est un sous-demi-groupe réflectif unitaire tel que l'intersection $S \cap U$ soit nette par rapport à la réunion $S \cup U$, d'où :

COROLLAIRE 2.2. - <u>Tout sous demi-groupe réflectif unitaire contenant</u> S <u>et ne coupant pas</u> Z <u>a pour image homomorphe par</u> f <u>un sous-groupe invariant de</u> $\bar{G}^*$.

Ici encore, on s'intéresse spécialement à l'image inverse d'un sous-groupe invariant de $\bar{G}^*$. On obtient immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 2.5. - <u>Si</u> $\bar{U}$ <u>est un sous-groupe invariant de</u> $\bar{G}^*$, <u>l'image inverse</u> U' <u>de</u> $\bar{U}$ <u>est un sous-demi-groupe réflectif unitaire de</u> D <u>contenant</u> S <u>et ne coupant pas</u> Z .

Ce résultat peut être complété par un théorème récent de P. DUBREIL :

THÉORÈME 2.6. - <u>Pour que le sous-groupe</u> $\bar{U}$ <u>soit invariant dans</u> $\bar{G}^*$, <u>il faut et il suffit que son image inverse</u> U' <u>vérifie, outre la condition</u> (G), <u>l'une quelconque des conditions suivantes</u> :

a. U' <u>symétrique</u> (cf. corollaire 2.2 et théorème 2.5).

b. <u>L'équivalence principale à droite définie par</u> U' : $\mathcal{R}_{U'}$ <u>est régulière à gauche</u>.

c. ${}_{U'}\mathcal{R}$ <u>est régulière à droite</u>.

REMARQUE 2.7. - Ce théorème reste valable si l'on considère l'image inverse d'un sous-groupe avec zéro de $\bar{G}$.

Au cours de nos recherches, nous avions utilisé, pour certaines démonstrations directes les fermetures, dans le treillis complet des sous-demi-groupes unitaires à gauche (à droite ou bilatères), de certains complexes U de D . Il ne paraît pas sans intérêt de donner ici quelques-uns des résultats obtenus

LEMME 2.4. - <u>Si un complexe</u> U <u>de</u> D <u>vérifie la condition</u> (G_2) $\forall u \in U$ $uU \cap S \neq \emptyset$, <u>le saturé</u> U' <u>de</u> U <u>modulo</u> $\mathcal{P}$ <u>est l'ensemble</u> X <u>des éléments</u> x <u>de</u> D <u>vérifiant</u>

la condition (A) :

(A) $\exists u \in U$, $s \in S$ tels que $ux = s$.

1° $X \subseteq U'$. - Si $x \in D$ est tel que $\exists u \in U$, $s \in S$, $ux = s$, soit $u' \in U$ tel que $u'u \in S$; on a $u'ux = u's$ d'ou $x \equiv u'(\mathcal{P})$ c'est-à-dire $x \in U'$.

2° $U' \subseteq X$. - Si $x \in D$ est tel que $\exists u \in U$, $x \equiv u(\mathcal{P})$, soit $u' \in U$ tel que $u'u \in S$; on a $u'x \equiv u'u(\mathcal{P})$ d'ou $u'x \in S$ c'est-à-dire $x \in X$.

THÉORÈME 2.7. - Si un complexe U de D vérifie l'une des conditions (F) ou (G), l'extension saturée U' de U modulo $\mathcal{P}$ est le plus petit sous-demi-groupe unitaire (à gauche, à droite ou bilatère) de D contenant S et U .

Car l'image homomorphe $\bar{U}$ de U étant un sous-groupe de $\bar{G}^*$, l'image inverse de $\bar{U}$, saturé de U modulo $\mathcal{P}$, est un sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et U , et c'est aussi, d'après le lemme 2.4, l'ensemble des $x \in D$ tels que $\exists u \in U$ $s \in S$ vérifiant $ux = s$. Le théorème en résulte immédiatement.

Nous poserons $U' = \overline{S \cup U}$, fermeture unitaire de $S \cup U$, prise indifféremment dans le treillis (complet) des sous-demi-groupes unitaires à gauche, à droite ou bilatères de D .

THÉORÈME 2.8. - Si un sous-demi-groupe réflectif U de D vérifie les conditions (G_2) et (G_3) :

(G_2) $\forall u \in U \quad uU \cap S \neq \emptyset$

(G_3) $\forall s \in S \quad sS \cap U \neq \emptyset$

le saturé de U modulo $\mathcal{P}$ est le plus petit sous-demi-groupe réflectif unitaire de D contenant S et U .

Car l'image homomorphe de U est un sous-groupe $\bar{U}$ invariant dans $\bar{G}^*$ (théorème 2.4), dont l'image inverse est un sous-demi-groupe réflectif unitaire de D contenant S et U . Comme c'est déjà le plus petit sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et U , le théorème est démontré.

COROLLAIRE 2.3. - Si U vérifie les hypothèses du théorème précédent et est de plus unitaire, U' peut être défini par les conditions équivalentes suivantes :

(A) $x \in U' \iff \exists u \in U$, $s \in S$ $ux = s$

(B) $x \in U' \iff \exists u' \in U$, $s' \in S$ $s'x = u'$.

REMARQUE 2.8. - Ce corollaire permet de caractériser simplement, moyennant certaines conditions l'union de deux sous-demi-groupes réflectifs unitaires dans le treillis de ces sous-demi-groupes.

3. Premier théorème d'isomorphisme.

Nous appliquons à l'ensemble formé par D et le groupe avec zéro homomorphe $\bar{G}$, des théorèmes de F. DUBREIL qui généralisent à des groupoïdes quelconques les théorèmes d'isomorphisme pour les groupes ([2]).

Les résultats obtenus, non seulement contiennent le cas des groupes, mais confirment que les sous-demi-groupes réflectifs unitaires, et plus spécialement les sous-demi-groupes normaux unitaires, constituent une bonne généralisation pour les demi-groupes de la notion de sous-groupe invariant, en particulier dans le cas d'un demi-groupe possédant un sous demi-groupe normal unitaire minimum.

Nous énoncerons d'abord le premier théorème général de F. DUBREIL.

THÉORÈME 3.1. - Si l'on a l'homomorphisme $E \xrightarrow{f} \bar{E}$, où E et $\bar{E}$ sont deux groupoïdes, il y a correspondance biunivoque entre les équivalences $\mathcal{R}$ de E, régulières d'un côté et contenant l'équivalence d'homomorphisme $\mathcal{P}$, et les équivalences $\bar{\mathcal{R}}$ de $\bar{E}$, régulières du même côté. Les ensembles quotients $E/\mathcal{R}$ et $\bar{E}/\bar{\mathcal{R}}$ se correspondent biunivoquement, les relations $x \equiv x'(\mathcal{R})$ et $\bar{x} \equiv \bar{x}'(\bar{\mathcal{R}})$ étant vérifiées en même temps.

$\mathcal{R}$ et $\bar{\mathcal{R}}$ sont régulières en même temps et la correspondance entre les groupoïdes quotients est alors un isomorphisme : $E/\mathcal{R} \simeq \bar{E}/\bar{\mathcal{R}}$.

REMARQUE 3.1. - Il résulte immédiatement des définitions respectives de $\mathcal{R}$ et de $\bar{\mathcal{R}}$ que la correspondance précédente est un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des équivalences de E, régulières d'un côté et contenant $\mathcal{P}$, et celui des équivalences de $\bar{E}$, régulières du même côté.

REMARQUE 3.2. - La correspondance entre $E/\mathcal{R}$ et $\bar{E}/\bar{\mathcal{R}}$ est définie par

$$A \in E/\mathcal{R} \quad \bar{A} \in \bar{E}/\bar{\mathcal{R}} \quad A \longleftrightarrow \bar{A} \iff \exists a \in E \quad \bar{a} \in \bar{E} \quad a \in A \quad \bar{a} \in \bar{A}$$

ce qui montre que $\bar{A}$, en tant que complexe, est l'image homomorphe de A par f et A l'image inverse de $\bar{A}$.

Nous démontrons les propositions suivantes en prenant, avec les notations des paragraphes 1 et 2, $E = D$ $\bar{E} = \bar{G}$.

LEMME 3.1. - Si $\mathcal{R}$ est une équivalence régulière d'un côté contenant $\mathcal{P}$, la classe U modulo $\mathcal{R}$ contenant S est un sous-demi-groupe unitaire de D ne coupant pas Z ; $\mathcal{R}$ coïncide avec l'équivalence principale du même côté définie par U dans D et est simplifiable du même côté sur $D - Z$.

Nous raisonnons sur des équivalences régulières à droite.

1° Si $\bar{\mathcal{R}}$ est l'équivalence régulière à droite induite par $\mathcal{R}$ dans $\bar{G}$, l'image de U dans l'homomorphisme appliquant D sur $\bar{G}$ est la classe modulo $\bar{\mathcal{R}}$ contenant l'élément neutre de $\bar{G}$, c'est-à-dire un sous-groupe $\bar{U}$ de $\bar{G}^*$; U est l'image inverse de $\bar{U}$, c'est-à-dire un sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et ne coupant pas Z.

2° $\mathcal{R}$ est simplifiable à droite sur $D - Z$. Soit ax, $bx \in D - Z$; $ax \equiv bx(\mathcal{R})$. On a, dans $\bar{G}$, $\overline{ax} = \bar{a}.\bar{x} \neq 0$, $\overline{bx} = \bar{b}.\bar{x} \neq 0$ et $\bar{a}.\bar{x} = \bar{b}.\bar{x}(\bar{\mathcal{R}})$; $\bar{\mathcal{R}}$ équivalence régulière à droite d'un groupe avec zéro est simplifiable à droite sur $\bar{G} - \{0\}$. Donc, on a $\bar{a} \equiv \bar{b}(\bar{\mathcal{R}})$ d'ou $a \equiv b(\mathcal{R})$.

3° Soit $\mathcal{R}_U$ l'équivalence principale à droite définie par U dans D. Montrons que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_U$. Soit $a \equiv b(\mathcal{R})$. Pour démontrer que $a \equiv b(\mathcal{R}_U)$ il suffit de prouver que $ax \in U$ entraîne $bx \in U$. Or U est une classe modulo $\mathcal{R}$; de $a \equiv b(\mathcal{R})$ on déduit $ax \equiv bx(\mathcal{R})$ puisque $\mathcal{R}$ est régulière à droite, donc $ax \in U$ entraîne $bx \in U$.

Soit $a \equiv b(\mathcal{R}_U)$ c'est-à-dire $U.\cdot a = U.\cdot b$. Si $U.\cdot a = U.\cdot b = \emptyset$, a et b appartiennent au résidu à droite Z_U de U dans D. De $S \subseteq U$, on déduit $Z_U \subseteq Z$, d'ou a, $b \in Z$ c'est-à-dire $a \equiv b(\mathcal{P})$. De $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$ résulte alors $a \equiv b(\mathcal{R})$. Si $U.\cdot a = U.\cdot b \neq \emptyset$, $\exists t \in D$ tel que $at \in U$, $bt \in U$ c'est-à-dire $at \equiv bt(\mathcal{R})$, U ne coupant pas Z, at et bt appartiennent à $D - Z$ sur lequel $\mathcal{R}$ est simplifiable à droite. Donc on a $a \equiv b(\mathcal{R})$.

LEMME 3.2. - <u>Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-demi-groupes unitaires de D contenant S et ne coupant pas Z et celui des équivalences régulières d'un côté contenant $\mathcal{P}$.</u>

1° A toute équivalence régulière à droite $\mathcal{R}$ contenant $\mathcal{P}$, nous faisons correspondre la classe modulo $\mathcal{R}$ contenant S. Nous avons démontré que cette classe U était un sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et ne coupant pas Z, et qu'on avait $\mathcal{R} = \mathcal{R}_U$ équivalence principale à droite définie dans D par U.

2° L'application ainsi définie est injective : si $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$ on a $U \neq U'$; car $U = U'$ entraîne $\mathcal{R} = \mathcal{R}_U = \mathcal{R}_{U'} = \mathcal{R}'$.

3° Cette application est surjective : car si U est un sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et ne coupant pas Z, l'équivalence principale à droite $\mathcal{R}_U$ est régulière à droite et U est la classe modulo $\mathcal{R}_U$ contenant S.

En outre, on a $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}_U$. Soit en effet $a \equiv b(\mathcal{P})$ et $ax \in U$; puisque U ne coupe pas Z, il existe $t \in D$ tel que $axt \in S \subseteq U$; U étant unitaire, on a $t \in U$. $\mathcal{P}$ est régulière, donc $axt \equiv bxt(\mathcal{P})$ d'ou $bxt \in S \subseteq U$ et finalement $bx \in U$.

4° Cette correspondance est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Supposons d'abord que : $U \subseteq U'$; U et U' étant des sous-demi-groupes unitaires de S contenant

S et ne coupant pas Z. Soit $a \equiv b(\mathcal{R}_U)$. Montrons que $ax \in U'$ entraîne $bx \in U'$. Puisque $U' \cap Z \neq \emptyset$, il existe $t \in D$ tel que $axt \in S \subseteq U \subsetneq U'$ d'où $t \in U'$. $\mathcal{R}_U$ étant régulière à droite, on a $axt \equiv bxt(\mathcal{R}_U)$ d'où $bxt \in U \subseteq U'$ et finalement $bx \in U'$.

Supposons maintenant que $\mathcal{R}_U \subseteq \mathcal{R}_{U'}$; $\mathcal{R}_U$ et $\mathcal{R}_{U'}$ étant les équivalences principales à droite définies par les sous-demi-groupes U et U', unitaires, contenant S et ne coupant pas Z.

Nous démontrons d'abord que : $\forall u \in U$ et $\forall u' \in U'$ $u' \equiv uu'(\mathcal{R}_{U'})$

a. $u'x \in U$ entraîne évidemment $uu'x \in U$;

b. si $uu'x \in U$, on a $u'x \in U$ puisque U est unitaire.

Nous avons alors, $\forall u \in U$ et $\forall u' \in U'$, $u' \equiv uu'(\mathcal{R}_U)$ d'ou $u' \equiv uu'(\mathcal{R}_{U'})$; puis $u'^2 \equiv uu'^2(\mathcal{R}_{U'})$ c'est-à-dire $uu'^2 \in U'$ puisque U' est une classe modulo $\mathcal{R}_{U'}$. Finalement, U' étant unitaire, on obtient $\forall u \in U$ $u \in U'$ donc $U \subseteq U'$.

On retrouve en particulier la propriété classique des groupes :

THÉORÈME 3.2. - <u>Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-groupes de</u> $\bar{G}^*$ <u>et celui des équivalences régulières d'un côté du groupe avec zéro</u> $\bar{G}$.

Des théorèmes 3.1 et 3.2 et du lemme 3.2, on déduit :

THÉORÈME 3.3. - <u>Soit</u> $\bar{G}$ <u>un groupe avec zéro homomorphe à un demi-groupe</u> D, S <u>le sous-demi-groupe réflectif unitaire de</u> D <u>correspondant</u> : $\bar{G} = D/S$, Z <u>le résidu de</u> S <u>dans</u> D. <u>Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-groupes</u> $\bar{U}$ <u>de</u> $\bar{G} - \{\bar{0}\}$ <u>et celui des sous-demi-groupes unitaires</u> U <u>de</u> D <u>contenant</u> S <u>et ne coupant pas</u> Z.

REMARQUE 3.3. - $\bar{U}$ est l'image par f de U et U est l'image inverse de $\bar{U}$.

LEMME 3.3. - <u>Si</u> $\mathcal{R}$ <u>est régulière dans</u> D, U <u>est réflectif et réciproquement.</u>

Notons d'abord (théorème 3.1) que $\mathcal{R}$ et $\bar{\mathcal{R}}$ sont régulières en même temps. Si $\mathcal{R}$ est régulière, soit $ab \in U$; $\overline{ab} = \bar{a}.\bar{b} \in \bar{U}$ qui est un sous-groupe invariant de $\bar{G}$, d'où $\bar{b}.\bar{a} = \overline{ba} \in U$ et $ba \in U$.

Inversement, si U est réflectif, $\bar{U}$ est un sous-groupe invariant de $\bar{G}$ (corollaire 2.2). Donc $\bar{\mathcal{R}}$ est régulière et $\mathcal{R}$ aussi.

On peut d'ailleurs observer, pour abréger cette démonstration, que la réflectivité des complexes se conserve dans un homomorphisme, lorsque l'on prend un complexe U de E image inverse d'un complexe $\bar{U}$ de $\bar{E}$ $(E \longrightarrow \bar{E})$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème correspondant au premier théorème d'isomorphisme pour les groupes.

THÉORÈME 3.4. (Premier théorème d'isomorphisme). - Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-groupes invariants $\bar{U}$ de $\bar{G} - \{\bar{0}\}$ et celui des sous-demi-groupes réflectifs unitaires U de D, contenant S et ne coupant pas Z.

En outre, on a l'isomorphisme de groupes avec zéro : $D/U \simeq \bar{G}/\bar{U}$.

On déduit de ce théorème une propriété intéressante de certains ensembles de sous-demi-groupes réflectifs unitaires :

THÉORÈME 3.5. - Dans un demi-groupe quelconque, les sous-demi-groupes réflectifs unitaires de D contenant un sous-demi-groupe réflectif unitaire S et ne coupant pas le résidu Z de S forment un treillis complet modulaire. L'élément nul de ce treillis est S et l'élément universel $D - Z$.

Car cet ensemble est isomorphe, au sens des ensembles ordonnés, à celui des sous-groupes invariants d'un groupe.

Ce théorème met en évidence une classe de demi-groupes qui généralise, du point de vue ensemble des sous-groupes invariants, celle des groupes : les demi-groupes possédant un sous-demi-groupe normal unitaire minimum.

THÉORÈME 3.6. - Si un demi-groupe D admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum, l'ensemble des sous-demi-groupes normaux unitaires de D forme un treillis complet modulaire.

Nous donnons au paragraphe 5 des exemples de tels demi-groupes.

4. Second théorème d'isomorphisme.

Nous donnons d'abord le second théorème d'isomorphisme démontré par P. DUBREIL ([2]) pour des groupoïdes quelconques, du point de vue "équivalences régulières".

THÉORÈME 4.1. - Soit $\mathcal{P}$ une équivalence régulière dans un groupoïde E, M un sous-ensemble de E, M' l'extension saturée de M par $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_M$ et $\mathcal{P}_{M'}$ les restrictions de $\mathcal{P}$ à M et M' ; $\bar{E} = E/\mathcal{P}$ le groupoïde-quotient, $\bar{M}$ l'image du sous-ensemble M de E dans l'homomorphisme appliquant E sur $\bar{E}$. Si M est un sous-groupoïde de E, $M = W$, l'équivalence $\mathcal{P}_M = \mathcal{P}_W$ est régulière, W' extension saturée de W par $\mathcal{P}$ est un sous-groupoïde de E et on a les isomorphismes :

$$W/\mathcal{P}_W \simeq W'/\mathcal{P}_{W'} \simeq \bar{W} \simeq \bar{W'} .$$

REMARQUE 4.1. - La correspondance entre $W/\mathcal{P}_W$ et $W'/\mathcal{P}_{W'}$ est définie par :

$$X \in W/\mathcal{P}_W \, , \quad X' \in W'/\mathcal{P}_{W'} \, , \quad X \longleftrightarrow X' \iff \exists x \in X \cap W \, , \quad x' \in X' \cap W'$$
$$x \equiv x' (\mathcal{P})$$

Si nous appliquons ce théorème à un demi-groupe D dans lequel le sous-demi-groupe réflectif unitaire S ($S \neq \emptyset$; $S \neq D$) , admettant un résidu non vide Z , définit une équivalence régulière $\mathcal{P}$, équivalence associée à l'homomorphisme appliquant D sur le groupe avec zéro $\dot{\bar{G}} = D/S$, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2. - Si W est un sous-demi-groupe de D , l'équivalence d'homomorphisme $\mathcal{P}_W$ restreinte à W est régulière, l'extension saturée W' de W par $\mathcal{P}$ est un sous-demi-groupe et l'on a les isomorphismes (de demi-groupes) :

(I) $$W/\mathcal{P}_W \simeq W'/\mathcal{P}_{W'} \simeq \bar{W} \simeq \bar{W'} \quad .$$

Nous étudions ici le cas où (I) est une suite d'isomorphismes de groupes avec zéro (ou de groupes sans zéro).

THÉORÈME 4.3. - Une condition nécessaire et suffisante pour que (I) soit une suite d'isomorphismes de groupes avec zéro (ou de groupes sans zéro) est que la trace U de W sur $D - Z$: $U = W \cap (D - Z)$ vérifie la condition (G_2) :
$\forall u \in U \quad uU \cap S \neq \emptyset$.

Nous étudions alors le passage des équivalences régulières $\mathcal{P}_W$ à des équivalences principales, qui permettent de donner une version "sous-algèbre" du second théorème d'isomorphisme :

LEMME 4.1. - Si W coupe S , on a $S \cap W = S \cap U$.
Si $\mathcal{R}_{S\cap U} ({}_{S\cap U}\mathcal{R})$ est l'équivalence principale à droite (à gauche) définie dans U par $S \cap U$, on a alors :

$$\mathcal{P}_U \subseteq \mathcal{R}_{S\cap U} = {}_{S\cap U}\mathcal{R} \qquad \mathcal{P}_W \subseteq \mathcal{R}_{S\cap W} = {}_{S\cap W}\mathcal{R} \quad .$$

$U'(W')$ étant le saturé de $U(W)$ modulo $\mathcal{P}$, on a :

$$S \subseteq U' \subseteq W' \quad .$$

Si $\mathcal{R}_S(\mathcal{R}'_S)$ est l'équivalence principale (à droite ou à gauche) définie dans $U'(W')$ par S , on a enfin :

$$\mathcal{P}_{U'} \subseteq \mathcal{R}_S \quad \mathcal{P}_{W'} \subseteq \mathcal{R}'_S$$

DÉMONSTRATION. - Notons d'abord que $S \cap U$ est réflectif unitaire dans U : si $uxu' \in S \cap U$, $uu' \in S \cap U$ avec u , x , $u' \in U$, on a $x \in S$ d'après la propriété (C) vérifiée par S (voir le paragraphe 1) ; d'où $x \in S \cap U$, ce qui montre que $S \cap U$ vérifie la propriété (C) dans U . De même, $S \cap W$ (= $S \cap U$)

est réflectif unitaire dans W . Car $wxw' \in S \cap W$, $ww' \in S \cap W$ avec $w, x, w' \in W$ entraîne d'abord, puisque $S \cap Z \neq \emptyset$, $w, x, w' \in D - Z$ c'est-à-dire $w, x, w' \in U$ et la démonstration se termine comme ci-dessus.

En particulier, dans $U(W)$, $S \cap U(S \cap W)$ est un complexe symétrique et l'on a

$$\mathcal{R}_{S\cap U} = {}_{S\cap U}\mathcal{R} \quad \mathcal{R}_{S\cap W} = {}_{S\cap W}\mathcal{R}$$

Si $u \equiv u'(\mathcal{P}_U)$ avec $u , u' \in U$, nous démontrons que $u \equiv u'(\mathcal{R}_{S\cap U})$. Pour cela il suffit de prouver que $u , u' , x \in U$, $ux \in S \cap U$ entraîne $u'x \in S \cap U$. $ux \in S$ entraîne, d'après l'hypothèse, $u'x \in S$ et comme $x \in U$, $u'x \in U$ d'ou $u'x \in S \cap U$. $\mathcal{P}_W \subseteq \mathcal{R}_{S\cap W}$ se démontre de la même manière en remarquant que $wx \in S$ entraîne $w \in U$. Les inclusions $S \subseteq U' \subseteq W'$ résultent de ce que, pour un élément quelconque u de $S \cap U$ et $\forall s \in S$, on a $s \equiv u(\mathcal{P})$ d'ou $s \in U' \subseteq W'$.

Enfin, si $u' , u_1' \in U'$, $u' \equiv u_1'(\mathcal{P}_{U'})$ et $u'x \in S$ avec $x \in U'$, on a $u_1' x \in S$ c'est-à-dire $u' \equiv u_1'(\mathcal{R}_S)$ d'ou $\mathcal{P}_{U'} \subseteq \mathcal{R}_S$.

LEMME 4.2. - Si W est un sous-demi-groupe de D dont la trace U sur $D - Z$ vérifie la condition (G_2) : $\forall u \in U \;\; uU \cap S \neq \emptyset$, on a :

$$\mathcal{P}_U = \mathcal{R}_{S\cap U} \qquad \mathcal{P}_W = \mathcal{R}_{S\cap W}$$
$$\mathcal{P}_{U'} = \mathcal{R}_S \qquad \mathcal{P}_{W'} = \mathcal{R}'_S$$

Il suffit de démontrer les inclusions $\mathcal{R}_{S\cap U} \subseteq \mathcal{P}_U$ et $\mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{P}_{U'}$. Les démonstrations concernant W et W' se font de la même manière encore la remarque du lemme 4.1 : $wx \in S \Longrightarrow w \in U$.

On notera que l'image homomorphe $\bar{U}$ de U est ici un sous-groupe de $\bar{G}^*$ (lemme 2.2).

1° $\mathcal{R}_{S\cap U} \subseteq \mathcal{P}_U$: nous prouvons que $u , u' \in U$, $x \in D$ $ux \in S$ entraîne $u'x \in S$ dès que $u \equiv u'(\mathcal{R}_{S\cap U})$. D'après (G_2), il existe $u'' \in U$ tel que $uu'' \in S$; on a donc $x \equiv u''(\mathcal{P})$ d'ou $u'x \equiv u'u''(\mathcal{P})$. $uu'' \in S \cap U$ entraîne, d'après l'hypothèse, $u'u'' \in S \cap U$ d'où $u'x \in S$,

C. Q. F. D.

2° $\mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{P}_{U'}$. Montrer que $u' \equiv u_1'(\mathcal{R}_S) \Longrightarrow u' \equiv u_1'(\mathcal{P}_{U'})$ revient à montrer que $x \in D$, $u' \in U'$, $u'x \in S$ entraîne $u_1' x \in S$. U' est un sous-demi-groupe unitaire contenant S et U (théorème 2.2), donc $u'x \in S \subseteq U'$ entraîne $x \in U'$ et d'après $u' \equiv u_1'(\mathcal{R}_S)$, on a $u_1' x \in S$.

On peut alors énoncer, en utilisant les notations des équivalences principales ([1]) le théorème suivant :

THÉORÈME 4.4. (Second théorème d'isomorphisme). - Si U est un sous-demi-groupe de D vérifiant la condition (G_2), les demi-groupes quotients $U/S \cap U$ et U'/S sont des groupes isomorphes, U' est le plus petit sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et U : $U' = \overline{S \cup U}$

$$U/S \cap U \simeq \overline{S \cup U}/S \quad .$$

THÉORÈME 4.5. - Si W est un sous-demi-groupe de D dont la trace U sur $D - Z$ vérifie la condition (G_2) les demi-groupes quotients $W/S \cap W$ et W'/S sont des groupes avec zéro isomorphes, W' est la somme du plus petit sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et U $(U = W \cap (D - Z))$ et de l'idéal premier Z et on a l'isomorphisme de groupes avec zéro :

$$W/S \cap W \simeq W'/S = \overline{S \cup U} + Z/S \quad .$$

REMARQUE 4.2. - On retrouve immédiatement, à partir du théorème 4.4, le théorème classique pour les groupes.

5. Demi-groupes admettant un sous-demi-groupe normal unitaire minimum.

Le théorème 3.6 met en évidence une classe importante de demi-groupes : les demi-groupes possédant un sous-demi-groupe normal unitaire minimum. Pour ces demi-groupes les propriétés suivantes sont valables :

THÉORÈME 5.1. - Si un demi-groupe D possède un sous-demi-groupe normal unitaire minimum S,

1° il existe un groupe homomorphe à D maximum : D/S ;

2° les sous-demi-groupes normaux unitaires de D forment un treillis complet modulaire.

Notons d'ailleurs que :

PROPRIÉTÉ 5.1. - Pour qu'un demi-groupe admette un sous-demi-groupe normal unitaire minimum, il faut et il suffit que toute intersection de sous-demi-groupes normaux unitaires soit nette (ce qui entraîne qu'elle n'est pas vide).

Cette classe de demi-groupes comprend des demi-groupes très généraux et de types a priori très variés :

1° Demi-groupes simples sans zéro à idempotents. - Le résidu Z d'un sous-demi-groupe réflectif unitaire d'un demi-groupe D étant un idéal propre de D, tout sous-demi-groupe réflectif unitaire d'un demi-groupe simple sans zéro est net, c'est-à-dire normal unitaire.

Tout sous-demi-groupe réflectif unitaire d'un demi-groupe quelconque contenant les idempotents non contenus dans son résidu, et toute intersection de sous-demi-groupes réflectifs unitaires étant réflective unitaire, on voit finalement qu'un demi-groupe simple sans zéro à idempotents admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum : le sous-demi-groupe réflectif unitaire $\bar{\bar{E}}$ engendré par l'ensemble E des idempotents.

REMARQUE 5.1. - Ce résultat s'applique en particulier aux demi-groupes complètement simples sans zéro ([9] et [10]).

REMARQUE 5.2. - Un demi-groupe simple avec zéro admettant des diviseurs de zéro possède un seul sous-demi-groupe réflectif unitaire, D lui-même, c'est-à-dire un seul groupe homomorphe : le groupe d'ordre 1.

Ce résultat s'applique en particulier aux demi-groupes complètement simples avec zéro.

2° Demi-groupes inversés et rectangulaires ([14]). - Un demi-groupe inversé est un demi-groupe D dans lequel : $\forall x \in D$, $\exists x' \in D$ tel que xx' ou $x'x$ soit idempotent. Un demi-groupe rectangulaire est un demi-groupe dans lequel tous les éléments sont forts. On sait que :

THÉORÈME 5.2. - Un demi-groupe inversé et rectangulaire ne possède pas d'idéaux premiers propres ([14]).

Il résulte alors de ce théorème que le raisonnement et les conclusions de 1° sont valables. En particulier :

THÉORÈME 5.3. - Dans un demi-groupe D, inversé, rectangulaire et globalement idempotent $(D^2 = D)$ le sous-demi-groupe normal unitaire minimum est l'ensemble des idempotents

$$\bar{\bar{E}} = E \quad .$$

Il suffit de montrer que l'ensemble E des idempotents est un sous-demi-groupe réflectif unitaire.

Rappelons qu'on a $\forall a, b \in D$ et $\forall e \in E$ $aeb = ab$ ([14]). On en déduit immédiatement que E est un sous-demi-groupe. E est réflectif : soit $xy = e \in E$. On a $yxyx = yex = yx$ donc $yx \in E$. E est unitaire : soit $x \in D = D^2$ et $e, e' \in E$ tels que $ex = e'$. Posons $x = ab$, $a, b \in D$. De $eab = e'$ on déduit $beab = bab = be'$ puis $baba = be'a = ba$ d'où $ba \in E$ et $ab \in E$ puisque E est réflectif.

REMARQUE 5.3. - On sait ([14]) qu'un demi-groupe inversé rectangulaire globalement idempotent est isomorphe au produit de E par un groupe G : $D \simeq D' = G \times E$ avec $G \simeq eDe$ $\forall e \in E$. On démontre facilement que G est isomorphe au groupe quotient de D par E. C'est, à un isomorphisme près, le groupe maximum holomorphe à D.

3° Demi-groupes de VAGNER ([15]) ou "inverse semigroups" de PRESTON ([8]). - Un tel demi-groupe D est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

a. $\forall a \in E$, $\exists e, x \in D$ tels que $ea = a$ $ax = e$;

b. Les idempotents de D sont permutables.

On démontre alors qu'à tout élément $a \in D$ sont associés, de manière unique, deux idempotents e et f, respectivement éléments neutres à gauche et à droite pour a, et un élément a^{-1} (inverse de a) tels que :

$$ea = a = af \quad aa^{-1} = e \quad a^{-1}a = f \quad fa^{-1} = a^{-1} = a^{-1}f$$

On démontre encore que l'inverse de a^{-1} est a, son élément neutre à gauche f, son élément neutre à droite e et que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

On remarque que, dans un tel demi-groupe, l'ensemble E des idempotents est net. Donc ce demi-groupe admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum, qui est le sous-demi-groupe réflectif unitaire engendré par E, ensemble des idempotents.

4° Demi-groupes admettant à la fois des complexes nets à gauche minimaux et des complexes nets à droite minimaux. - Nous appliquons ici un résultat dont une partie a été publiée aux Comptes Rendus ([5]), et qui avait été signalé par ailleurs sous une autre forme dans une note antérieure de P. SCHÜTZENBERGER ([11]).

THÉORÈME 5.4. - Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-demi-groupes réflectifs unitaires d'un demi-groupe D dont le résidu ne contient pas un idéal I de D et les sous-demi-groupes réflectifs unitaires de cet idéal.

En particulier, les ensembles des sous-demi-groupes normaux unitaires de I et de D sont des ensembles ordonnés isomorphes.

Les demi-groupes que nous avons introduits comme généralisation des homogroupes ([3]) sont aussi les demi-groupes possédant un idéal complètement simple. L'application du théorème 5.4 et du résultat obtenu au 1° pour les demi-groupes simples à idempotents conduit alors au théorème suivant :

THÉORÈME 5.5. - Tout demi-groupe possédant à la fois des complexes nets à gauche minimaux et des complexes nets à droite minimaux admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum.

REMARQUE 5.4. - Ce théorème s'applique en particulier aux demi-groupes finis.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1 : Equivalences, opérations, groupes, anneaux, corps, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[2] DUBREIL (Paul). - Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 215, 1942, p. 239-244.

[3] LEFEBVRE (Pierre). - Demi-groupes admettant des complexes nets à droite minimaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 393-396.

[4] LEFEBVRE (Pierre). - Sur les sous-demi-groupes nets d'un côté, minimaux, d'un demi-groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 173-175.

[5] LEFEBVRE (Pierre). - Sur les groupes homomorphes à un demi-groupe, demi-groupes admettant un groupe homomorphe maximumn C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 2277-2279.

[6] LEFEBVRE (Pierre) - Sur certains théorèmes d'isomorphisme pour les demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 249, 1959, p. 1995-1997.

[7] LÉVI (F. W.). - On semigroups, Bull. Calcutta math. Soc., t. 36, 1944, p. 141-146 ; t. 38, 1946, p. 123-124.

[8] PRESTON (G. P.). - Inverse semigroups, J. London math. Soc., t. 29, 1954, p. 396-403.

[9] REES (D.). - On semigroups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400.

[10] REES (D.). - Note on semigroups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 37, 1941, p. 434-435.

[11] SCHÜTZENBERGER (Marcel Paul). - Sur les homomorphismes d'un demi-groupe sur un groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 2442-2444.

[12] STOLL (R. R.). - Homomorphisms of a semigroup onto a group, Amer. math. J., t. 73, 1951, p. 475-481.

[13] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159.

[14] THIERRIN (Gabriel). - Demi-groupes inversés et rectangulaires, Bull. Acad. royale Belgique, Cl. Sc., 5e série, t. 41, 1955, p. 83-92.

[15] VAGNER (V. V.). - Obobščennye Gruppy, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 84, 1952, p. 1119-1122.