F. Bertrandias

Propriétés arithmétiques des fonctions entières

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, nº 1 (1959-1960), exp. nº 4, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_1_A4_0>

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ENTIÈRES

par Mme F. BERTRANDIAS

1. Introduction et rappel de résultats.

1° Les fonctions entières, auxquelles nous attribuerons des propriétés arithmétiques, sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire :

les $\alpha(\varphi) = \limsup_{r\infty} \dfrac{\mathrm{Log}|f(re^{i\varphi})|}{r}$ sont finis pour tout φ.

L'intégrale $\int e^{-sx} f(x)\, dx$ (le long de la demi-droite issue de 0, d'angle polaire φ) converge alors pour $s = |s| e^{i\omega}$ dans le demi-plan : $|s| \cos(\omega + \varphi) > \alpha(\varphi)$ et définit une fonction $\ell_\varphi(s)$ holomorphe dans ce demi-plan. La réunion de ces demi-plans pour tout φ, est le complémentaire d'un domaine S borné convexe. Les fonctions $\ell_\varphi(s)$ définissent une seule et même fonction $\ell(s)$, holomorphe et uniforme à l'extérieur de S, appelée transformée de Laplace de $f(x)$.

Inversement $f(x)$ s'exprime en fonction de $\ell(s)$ par l'intégrale :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_L e^{sx} \ell(s)\, ds \tag{1.1}$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque entourant S.

Dans la suite, c'est par la connaissance du domaine S que nous caractériserons la croissance de la fonction $f(x)$.

2° A cette fonction $f(x)$ nous attacherons une suite de coefficients u_n (par exemple $u_n = f(n)$). Les conditions arithmétiques imposées à $f(x)$ seront alors : u_n entier $(n = 0 , 1 , 2 , \ldots)$. Il est intéressant de rassembler les propriétés des u_n en introduisant leur fonction génératrice

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}} \quad .$$

La connaissance de $F(z)$ détermine entièrement les u_n et inversement il est assez curieux de constater que les conditions " u_n entier" imposent des restrictions importantes à la fonction $F(z)$. Ces restrictions sont exprimées par le théorème de Polya et Carlson [4], sur lequel nous nous appuierons constamment.

THÉORÈME 1.1. - Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}}$ est le développement d'une fonction $F(z)$ prolongeable et uniforme à l'extérieur d'un ensemble compact T dont le diamètre transfini τ est inférieur à 1 , les conditions : u_n entier $(n = 0 , 1 , 2 , \ldots)$ entraînent que $F(z)$ est une fraction rationnelle.

Le cas trivial de ce théorème est celui où T est un cercle de rayon inférieur à 1 : $F(z)$ est alors un polynôme en $\frac{1}{z}$.

3° Nous imposerons donc à $f(x)$ des conditions telles que $F(z)$ vérifie les hypothèses du théorème 1.1. Il s'agira ensuite d'examiner les conséquences sur $f(x)$ du fait que $F(z)$ est une fraction rationnelle. D'où l'importance des relations entre $f(x)$ et $F(z)$.

2. Étude des fonctions $f(x)$ telles que $f(n)$ soit entier $(n = 0 , 1 , 2 , \ldots)$.

Nous pouvons alors choisir la suite $u_n = f(n)$.

1° Étude de la fonction génératrice $F(z)$. - D'après (1.1), $f(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \exp ns\ \ell(s)\, ds$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^{n+1}}$ a donc un rayon de convergence fini $R = \max_{s \in L} |\exp s|$, et elle coïncide, pour $|z| > R$, avec la fonction :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp (ns)}{z^{n+1}} \Big) \ell(s)\, ds = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ell(s)\, ds}{z - \exp s}$$

qui est holomorphe pour tout z extérieur à la courbe déduite de L par la transformation $z = \exp s$.

On en déduit d'une part l'expression de $F(z)$ en fonction de $\ell(s)$:

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ell(s)\, ds}{z - \exp s} \tag{2.1}$$

et d'autre part, l'ensemble de ses singularités.

THÉORÈME 2.1. - La fonction $F(z)$ est uniforme et holomorphe à l'extérieur du domaine T déduit de S par la transformation $z = \exp s$.

La courbe L en effet, peut être choisie arbitrairement voisine de S .

2° Formule d'inversion donnant $f(x)$ à partir de $F(z)$. - Traçons dans le plan des z une coupure γ rendant uniforme la fonction $\operatorname{Log} z$. La fonction de z $\frac{\exp(x \operatorname{Log} z)}{z - \exp s}$ est uniforme dans le plan coupé et a pour résidu, au point $z = \exp s$, $\exp(sx)$. Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée sans point double entourant le point $z = \exp s$, et ne rencontrant pas γ. On a :

$$\exp(sx) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\exp(x \operatorname{Log} z)}{z - \exp s} dz \qquad (2.2)$$

Supposons alors que le domaine T ne rencontre pas γ. On peut choisir une courbe $\mathcal{C}$ entourant T. En remplaçant dans (1.1) $\exp(sx)$ par son expression tirée de (2.2), et en intervertissant l'ordre des intégrations, on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\mathcal{L}(s)}{z - \exp s} ds\right] \exp(x \operatorname{Log} z) dz .$$

Comme la condition : " T ne rencontre pas γ " est équivalente à : " S et le domaine $S + 2i\pi$ déduit par la translation $2i\pi$ sont disjoints", on peut énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2. - Si les domaines S et $S + 2i\pi$ sont disjoints, $f(x)$ s'exprime en fonction de $F(z)$ par l'intégrale :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \exp(x \operatorname{Log} z) F(z) dz$$

($\mathcal{C}$ courbe fermée sans point double entourant T).

3° Résultats. - Utilisons maintenant les conditions arithmétiques " $f(n)$ entier". D'après le théorème (1.1), si le diamètre transfini de T vérifie : $\tau(T) < 1$, $F(z)$ est une fraction rationnelle. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ses pôles. Avec l'hypothèse du théorème 2.2 :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \exp(x \operatorname{Log} z) \sum_{i,k} \frac{\lambda_{ik}}{(z-\alpha_i)^k} dz = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^x P_i(x)$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME 2.3. - Soit $f(x)$ une fonction entière telle que les domaines S et $S + 2i\pi$ soient disjoints, et que le diamètre transfini de T vérifie $\tau(T) < 1$. Si $f(n)$ est entier (pour $n = 0, 1, 2, \dots$), $f(x)$ est nécessairement de la forme : $f(x) = \alpha_1^x P_1(x) + \dots + \alpha_k^x P_k(x)$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des entiers algébriques contenus, ainsi que tous leurs conjugués, dans T, et où $P_1, \dots, P_k$ sont des polynômes.

Nous énoncerons deux corollaires de ce théorème, obtenus, le premier en prenant pour S un cercle $|s| < \alpha$, le second en prenant pour T le cercle $|z - 1| < 1$.

COROLLAIRE 2.4. - Soit $f(x)$ une fonction entière de type exponentiel α, telle que $f(n)$ soit entier $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Si $\alpha < \alpha_0 = \operatorname{Log} 2$, $f(x)$ est un polynôme.

COROLLAIRE 2.5. - Soit $f(x)$ une fonction entière telle que le domaine S soit contenu dans le domaine D_0 défini par : $|\exp s - 1| < 1$, $-\pi < \mathcal{J}s < \pi$ (figure 1). Si $f(n)$ est entier $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $f(x)$ est un polynôme.

4° Intérêt de la méthode. - C'est POLYA [3], en 1915, qui s'est intéressé le premier aux fonctions $f(x)$ telles que $f(n)$ soit entier. Il déduisait du développement :

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{n=0}^{p} \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{z(z-1)\ldots(z-n)} + \frac{x(x-1)\ldots(x-p)}{z(z-1)\ldots(z-p)} \frac{1}{z-x} \tag{2.3}$$

une expression de $f(x)$ comme série de polynômes :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n f(0) \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$$

où

$$\Delta^n f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{n!f(z)dz}{z(z-1)\ldots(z-n)}$$

Γ_n étant le cercle $|z| = \lambda n$ avec $\lambda > 1$.

Ceci lui permettait d'arriver au résultat du corollaire (2.4), en montrant que, si $\alpha < \operatorname{Log} 2$, $\Delta^n f(0)$ est inférieur à 1, et donc nul, pour $n > n_0$. Cette majoration nécessitait l'emploi de la formule de Stirling, et la recherche de la valeur de λ donnant la plus petite majoration.

Des travaux de HARDY, IZUMI, CARLSON et SELBERG, utilisant aussi des méthodes d'interpolation, ne permirent ensuite que quelques généralisations des résultats de Polya.

C'est en 1946 que C. PISOT [2] a démontré les résultats généraux que nous avons énoncés dans le paragraphe précédent, en employant la transformation de Laplace. Cette méthode apporte une simplification considérable dans les calculs : par exemple $\Delta^n f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_L (e^s - 1)^n \ell(s)\, ds$ donne une majoration immédiate. Mais son intérêt est surtout de permettre l'emploi de la fonction génératrice des u_n, et du théorème de Polya et Carlson, ce qui la rend beaucoup plus puissante que les méthodes d'interpolation, ou le seul "outil" arithmétique employé était : " u_n entier inférieur à 1 entraîne $u_n = 0$ ".

Nous retiendrons cependant de ces méthodes le développement de $\frac{1}{z-x}$ (2.3) : il donne un procédé pour construire des combinaisons $\Delta^n f(0)$ des $f(n)$, et il permet d'exprimer $f(x)$ en fonction de ces $\Delta^n f(0)$.

3. Étude des fonctions $f(x)$ telles que $f(n)$ et $f'(n)$ soient entiers $(n = 0 , 1 , 2 , \ldots)$.

1° Recherche de combinaisons. - Formons un développement de $\frac{1}{z-x}$ analogue à (2.3) , en utilisant les polynômes $P_n(x)$ définis par :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} P_{2n}(x) = x^2(x-1)^2 \ldots (x-n)^2 \\ P_{2n+1}(x) = x^2(x-1)^2 \ldots (x-n)^2(x-n-1) \end{cases}$$

on a :

$$(3.2)\qquad \frac{1}{z-x} = \sum_{n=0}^{p} \frac{P_n(x)}{P_{n+1}(z)} + \frac{P_{p+1}(x)}{P_{p+1}(z)} \frac{1}{z-x}$$

les intégrales :

$$(3.3)\qquad \begin{cases} v_{2n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{2n}} \frac{(n!)^2 f(z)dz}{P_{2n}(z)} & (\Gamma_{2n} \text{ entourant les points } 0 , 1 , \ldots , n) \\ v_{2n+1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{2n+1}} \frac{n!(n+1)!\ f(z)}{P_{2n+1}(z)}\, dz & (\Gamma_{2n+1} \text{ entourant les points} \end{cases}$$

$0, 1 , \ldots , n + 1$), sont des combinaisons linéaires de quantités $f(p)$ et $f'(q)$. Nous pouvons maintenant revenir à la méthode de la transformée de Laplace.

Les fonctions $\frac{(n!)^2}{P_{2n}(z)}$ et $\frac{n!(n+1)!}{P_{2n+1}(z)}$ sont les transformées de Laplace des fonctions entières $\varphi_{2n}(s)$ et $\varphi_{2n+1}(s)$, qu'on obtient en employant des produits de convolution ($\frac{n!}{z(z-1)\ldots(z-n)}$ est en effet transformée de Laplace de $(\exp s - 1)^n$. On a :

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \varphi_{2n}(s) = \int_0^s (\exp t - 1)^n\ (\exp(s-t) - 1)^n\, dt \\ \varphi_{2n+1}(s) = \int_0^s (\exp t - 1)^n\ (\exp(s-t) - 1)^{n+1}\, dt \end{cases}$$

où le chemin d'intégration $\delta(0 , s)$ sera précisé ultérieurement.

Les combinaisons v_n définies par (3.3) s'écrivent :

$$(3.5)\qquad v_n = \frac{1}{2i\pi} \int_L \varphi_n(s)\, \ell(s)\, ds \quad .$$

Cette expression permet une étude facile de la forme des v_n : en effet, d'après (3.4), $\varphi_n(s)$ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels de quantités $\exp(ps)$ et $s\exp(qs)$ avec $p, q = 0, 1, \ldots, [n/2]+1$. Ces coefficients rationnels ont pour dénominateurs des nombres dont la valeur absolue ne dépasse pas $[n/2]+1$. Or, d'après (3.5) et d'après la formule d'inversion (1.1), v_n se déduit de $\varphi_n(s)$ en remplaçant $\exp(ps)$ par $f(p)$ et $s\exp(qs)$ par $f'(q)$. La forme des v_n est bien précisée : les conditions $f(p)$ et $f'(q)$ entiers entraîneront seulement v_n rationnel. Nous en déduirons plus loin un choix de combinaisons u_n prenant des valeurs entières.

2° <u>Etude de la fonction</u> $G(z)$ <u>génératrice des</u> v_n.

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{z^{n+1}} \quad .$$

Soit $M_\delta(s)$ le maximum, lorsque t décrit $\delta(0, s)$, de $|(\exp t-1)(\exp(s-t)-1)|^{1/2}$. D'après (3.5) et (3.4) la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{z^{n+1}}$ a un rayon de convergence fini $R = \max_{s\in L} M_\delta(s)$ et elle coïncide, pour $|z| > R$, avec la fonction :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_L \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)}{z^{n+1}}\Big)\, \ell(s)\, ds = \frac{1}{2i\pi}\int_L \Phi(z, s)\, \ell(s)\, ds \quad .$$

Nous obtenons ainsi un prolongement de la série génératrice des v_n :

$$G(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_L \Phi(z, s)\, \ell(s)\, ds \quad . \tag{3.6}$$

<u>La recherche des singularités de</u> $G(z)$ <u>nécessite l'étude de la fonction</u> $\Phi(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)}{z^{n+1}}$. En remplaçant les $\varphi_n(s)$ par leur expression (3.4) et en choisissant $|z| > M_\delta(s)$, on trouve :

$$\Phi(z, s) = \int_0^s \frac{z + \exp(s-t) - 1}{z^2 - (\exp t - 1)(\exp(s-t) - 1)}\, dt \tag{3.7}$$

L'intégrale du second membre définit une fonction de z holomorphe et uniforme pour z^2 extérieur à la courbe $\zeta(\delta)$ décrite par le point $\zeta(t) = (\exp t - 1)(\exp(s-t) - 1)$, lorsque t varie de 0 à s sur la courbe δ. Or la fonction $\zeta(t)$ est univalente dans tout domaine ne contenant pas à la fois un point t et les points $t + 2i\pi$ et $s - t$ ($\zeta(t) = \zeta(t')$ entraîne $t' \equiv t\,(2i\pi)$ ou $t' \equiv s - t\,(2i\pi)$). Comme nous n'aurons besoin, par la suite, que de points s tels que $|\mathcal{I} s| < 2\pi$, nous pouvons considérer la bande du plan des t définie par : $0 < \mathcal{I}(\frac{s}{2} - t) < \pi$. La fonction $\zeta(t)$ réalise une représentation conforme de cette bande sur le plan des ζ coupé par la courbe C_1, issue du point $(\exp(s/2)-1)^2$, transformée de la droite $\mathcal{I}(\frac{s}{2}-t)=0$, et par la courbe C_2, transformée de la droite $\mathcal{I}(\frac{s}{2}-t)=\pi$.

On peut alors remplacer la chemin $\delta(0, s)$ par deux courbes $(0, t_0)$ et $(0, s-t_0)$ situées dans la bande. Il en résulte que la courbe transformée $\zeta(\delta)$ rencontre C_1, et entoure le point $(\exp(s/2)-1)^2$.

Nous sommes maintenant en mesure de faire le choix du chemin d'intégration $\delta(0, s)$:

(3.8) Nous prendrons pour $\delta(0, s)$ la courbe ayant pour transformée $\zeta(\delta)$ le segment $[0, (\exp(s/2)-1)^2]$.

On en déduit immédiatement le **lemme suivant** :

LEMME 3.1. - La fonction de z $\Phi(z, s)$ définie par (3.7) et (3.8) est uniforme et holomorphe dans le plan des z coupé par le segment $[(\exp(s/2)-1), (-\exp(s/2)+1)]$, quel que soit s vérifiant $|\mathcal{I}\, s|<2\pi$.

A l'aide de ce lemme et de l'expression (3.6) de $G(z)$, on montre :

THÉORÈME 3.2. - Si le domaine S est situé dans la bande $|\mathcal{I} s|<2\pi$, la fonction $G(z)$ est uniforme et holomorphe à l'extérieur du domaine V déduit de S par les transformations : $z=\lambda(\exp(s/2)-1)$, où λ varie entre -1 et 1.

3° Formule d'inversion donnant $f(x)$ à partir de $G(z)$. - Dans le développement de $\frac{1}{z-x}$ (3.2), on peut considérer les fonctions de z comme des transformées de Laplace. On en déduit une expression de $\exp s$:

$$(3.9)\quad \exp(sx)=\sum_{n=0}^{p}\frac{P_n(x)}{[\frac{n+1}{2}]!\,[\frac{n+2}{2}]!}\varphi_{n+1}(s)+\frac{P_{p+1}(x)}{[\frac{p+1}{2}]!\,[\frac{p+2}{2}]!}\int_0^s \exp[(s-t)x]\,\varphi_{p+1}(t)\,dt.$$

Cette série est convergente pourvu que $|\exp(s/2)-1|<1$. En effet $\lim_{n\,\infty}|\varphi_n(s)|^{1/n}=M_\delta(s)=|\exp(s/2)-1|$ (d'après le choix de $\delta(0, s)$), et d'autre part

$$\lim_{n\,\infty}\left|\frac{P_n(x)}{[\frac{n}{2}]!\,[\frac{n+1}{2}]!}\right|^{1/n}=1 .$$

Posons alors :

$$(3.10)\qquad H(x, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{[\frac{n+1}{2}]!\,[\frac{n+2}{2}]!}z^n .$$

Cette série en z est convergente pour $|z| < 1$. En comparant son développement à celui d'une fonction hypergéométrique $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, z)$, on remarque que :

$$H(x, z) = \mathcal{F}'_{z^2}{}_2(-x, -x, 1, z^2) + xz\mathcal{F}(-x, 1-x, 1, z^2)$$

$H(x, z)$ est donc une fonction uniforme et holomorphe de z dans le plan des z coupé le long des demi-droites $\{|z| > 1, z \text{ réel}\}$.

Dans le cas où la série (3.9) converge (c'est-à-dire si $|\exp(s/2) - 1| < 1$) elle peut se mettre sous la forme d'une intégrale :

$$\exp(sx) = \frac{1}{2i\pi} \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{[\frac{n+1}{2}]!\,[\frac{n+2}{2}]!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{n+1}(s)}{z^{n+1}}\right) dz$$

prise le long d'un cercle de rayon ρ vérifiant : $|\exp(s/2) - 1| < \rho < 1$.

On en déduit, dans des conditions plus générales, le lemme suivant:

LEMME 3.3. - Si le point $z = \exp(s/2) - 1$ n'est pas situé sur la coupure $\{z \text{ réel}, |z| > 1\}$, on a l'intégrale :

$$\exp(sx) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} H(x, z)\, \Phi(z, s)\, ds$$

où $\mathcal{C}$ est une courbe fermée sans point double entourant le segment $[(\exp(s/2) - 1), (-\exp(s/2) + 1)]$ et ne rencontrant pas la coupure $\{z \text{ réel}, |z| > 1\}$.

Revenons maintenant à la formule d'inversion (1.1). Dans le cas où le domaine V des singularités de $G(z)$ ne rencontre pas la coupure du plan des z, on peut choisir une courbe $\mathcal{C}$ entourant V, et l'on peut remplacer dans (1.1) $\exp(sx)$ par l'expression ci-dessus. En intervertissant l'ordre des intégrations, on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} H(x, z)\left(\frac{1}{2i\pi}\int_L \Phi(z, s)\, \ell(s)\, ds\right) dz \quad .$$

D'où :

THÉORÈME 3.4. - Si le domaine V des singularités de $G(z)$ ne rencontre pas la coupure $\{z \text{ réel}, |z| > 1\}$, $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} H(x, z)\, G(z)\, dz$$

$\mathcal{C}$ étant une courbe convenable entourant V.

On en déduit, d'après la définition de $H(x, z)$ le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.5. - Si $G(z)$ est un polynôme en $\frac{1}{z}$, $f(x)$ est un polynôme.

4° Choix des coefficients u_n entiers. - D'après l'étude faite dans le 1° des combinaisons v_n, nous prendrons :

$$u_n = \omega_{[n/2]+1}\, v_n \tag{3.11}$$

où l'on désigne par ω_n le plus petit commun multiple de $1, 2, \ldots, n$.

De l'égalité $\omega_n = 2^{\left[\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} 2}\right]} \ldots p^{\left[\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} p}\right]}$ $(2, \ldots, p$ nombres premiers inférieurs à $n)$ on déduit : $\omega_n = \exp[n + o(n)]$.

La fonction génératrice des u_n s'écrit :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_{[n/2]+1}\, v_n}{z^{n+1}} .$$

D'après l'étude de $G(z)$, on sait que : $\overline{\lim_{n\to\infty}} |v_n|^{1/n} = \max_{s\in L} |\exp(s/2) - 1|$.

D'où :

THÉORÈME 3.6. - La fonction $F(z)$ est holomorphe à l'extérieur du cercle

$$|z| \leq \sqrt{e} \max_{s\in L} |\exp(s/2) - 1) .$$

Comme on ne connaît pas la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_{[n/2]+1}}{z^{n+1}}$, on ne peut préciser davantage l'ensemble des singularités de $F(z)$.

5° Résultats. - Utilisons maintenant les conditions arithmétiques : " $f(n)$ et $f'(n)$ entiers", qui entraînent : u_n entier $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Le théorème (1.1) appliqué sous sa forme triviale au cercle de convergence de la série $F(z)$, montre que si : $\sqrt{e} \max_{s\in L} |\exp(s/2) - 1)| < 1$, $F(z)$ est un polynôme. Il en résulte que $G(z)$ est un polynôme, d'après la définition (3.11) des u_n. Le corollaire (3.5) montre ensuite que $f(x)$ est un polynôme.

Ceci peut s'énoncer :

THÉORÈME 3.7. - Soit $f(x)$ une fonction entière telle que le domaine S soit contenu dans le domaine D_1 défini par :

$$|\exp(s/2) - 1| < \frac{1}{\sqrt{e}} \quad -2\pi < \Im s < 2\pi \qquad \text{(figure 2)} .$$

Les conditions $f(n)$ et $f'(n)$ entiers $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ entraînent que $f(x)$ est un polynôme.

La frontière du domaine D_1 rencontre l'axe réel aux points :

$$\alpha_1 = \mathrm{Log}(1 + \frac{1}{\sqrt{e}})^2 = 0{,}947 ,$$

$$\beta_1 = \mathrm{Log}(1 + \frac{1}{\sqrt{e}})^2 = -1{,}8$$

et l'axe imaginaire aux points $\begin{matrix}\gamma_1\\ \delta_1\end{matrix} = \pm 1{,}23 \quad (\sin \frac{\gamma_1}{4} = \frac{1}{2\sqrt{e}})$.

En comparant ce résultat à celui du corollaire (2.5), on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.8. - Soit $f(x)$ une fonction entière telle que le domaine S soit contenu dans le domaine $D_0 \cup D_1$. Si $f(n)$ et $f'(n)$ sont entiers, $f(x)$ est un polynôme.

Étant donnée la forme du domaine D_1 , on déduit du théorème 3.7 :

COROLLAIRE 3.9. - Si $f(x)$ est une fonction entière de type exponentiel α inférieur à $\alpha_1 = \mathrm{Log}(1 + \frac{1}{\sqrt{e}})^2$, et si $f(n)$ et $f'(n)$ sont entiers, $f(x)$ est un polynôme.

Ce résultat a été démontré en 1929 par GELFOND [1] en employant les mêmes combinaisons v_n , mais en utilisant uniquement la méthode d'interpolation.

En 1941, SELBERG [5] a montré que la limite α_1 pouvait être dépassée, et qu'on pouvait atteindre $\alpha_1' = \mathrm{Log}(1 + \frac{1}{e} + \sqrt{\frac{u}{e} + \frac{1}{e^2}}) = 0{,}97 \ldots$ Il utilise lui aussi une méthode d'interpolation, mais il emploie des combinaisons différentes des v_n , qui semblent difficiles à utiliser par la méthode de transformation de Laplace utilisée ici.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] GELFOND (A.). - Sur un théorème de G. Pólya, Atti r. Accad. naz. Lincei, Rend., t. 10, 1929, p. 569-574.

[2] PISOT (Charles). - Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 222, 1946, p. 988-990.

[3] PÓLYA (Georg). - Ueber ganzwertige ganze Funktionen, Rend. Circ. mat. Palermo, t. 40, 1915, p. 1-16.

[4] PÓLYA (Georg). - Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Forsetzbarkeit einer Potenzreihe, Math. Annalen, t. 99, 1928, p. 687-706.

[5] SELBERG (Atle). - Über einen Satz von A. Gelfond, Arch. for Math. og Naturvid., t. 44, 1941, p. 159-170.

FIGURE 1 :
Domaine D_0

$\alpha_0 = 0{,}6 \ldots$

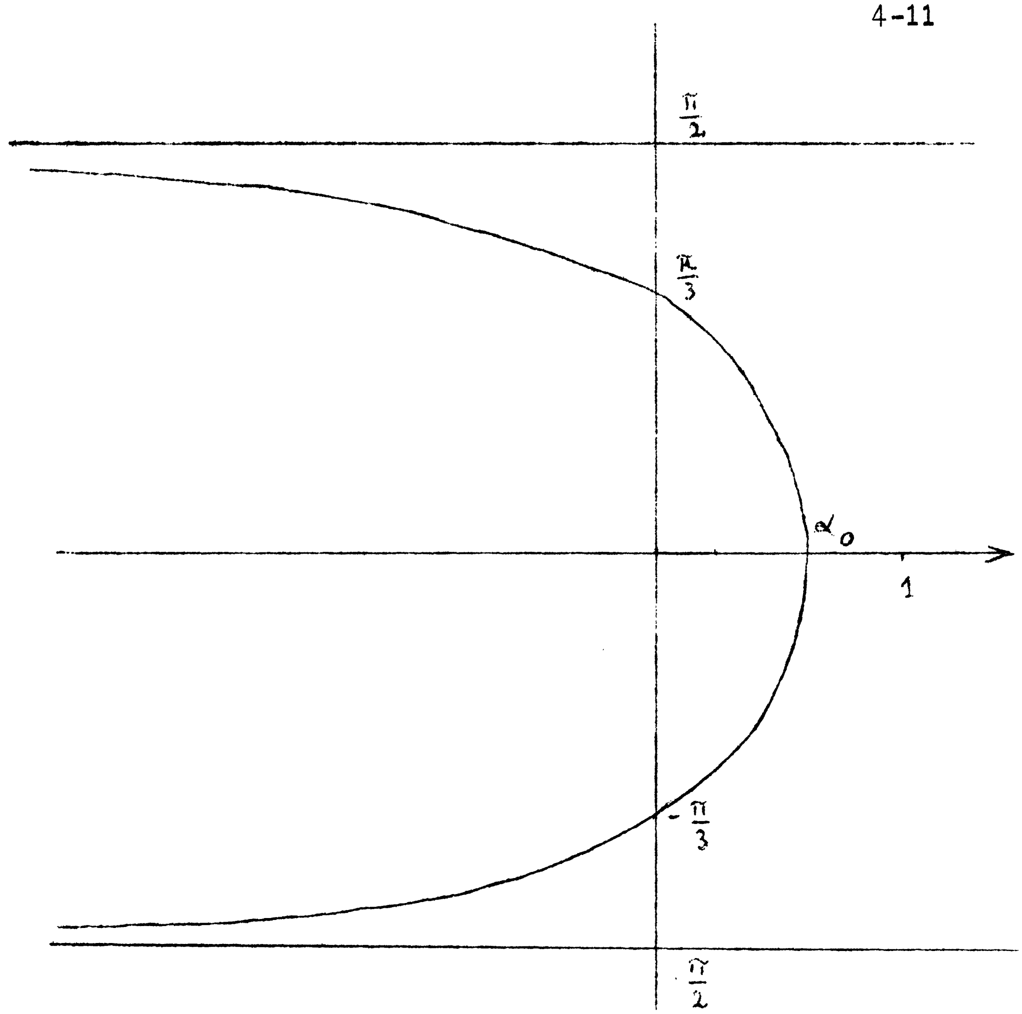

FIGURE 2 :
Domaine D_1

$\alpha_1 = 0{,}94 \ldots$

$\beta_1 = -\ 1{,}8 \ldots$

$\gamma_1 = 1{,}23 \ldots$