

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

PIERRE GABRIEL

## **La localisation dans les anneaux non commutatifs**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 13, n° 1 (1959-1960), exp. n° 2,  
p. 1-35

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1959-1960\\_\\_13\\_1\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_1_A2_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LA LOCALISATION DANS LES ANNEAUX NON COMMUTATIFS

par Pierre GABRIEL

Le rédacteur introduit ici un formalisme un peu nouveau. Son but est de trouver un langage qui remplace en algèbre non commutative la notion de faisceau qui a envahi récemment l'algèbre commutative [8], [17]. Le point de vue adopté n'est certainement pas définitif et le rédacteur n'a pas pu développer toutes les applications. En particulier, il n'a pas eu la place matérielle de parler des anneaux qui sont des modules noethériens sur leur centre, ni des théorèmes de dualité auxquels ces anneaux satisfont.

On peut cependant considérer comme encourageante l'explication qui est donnée au chapitre II du rôle des faisceaux en algèbre commutative : rôle qui est de donner une construction explicite de certaines catégories quotients de la catégorie de tous les modules sur un anneau commutatif noethérien.

Une dernière remarque concerne la bibliographie : le rédacteur a voulu déchiffrer un grand nombre d'articles qui traitent plus ou moins de la question. Il se croit donc obligé de citer tous les mémoires dont il a tiré quelque idée.

### CHAPITRE I : La localisation dans les catégories abéliennes.

#### 1. Catégories avec enveloppes injectives.

Dans tout l'exposé  $\mathcal{C}$  désignera une catégorie abélienne possédant une famille de générateurs [7].

Un morphisme injectif  $i : M \rightarrow I$  de  $\mathcal{C}$  est dit essentiel si tout sous-objet  $Q$  de  $I$  est nul dès que  $Q \cap M = 0$ . On appellera enveloppe injective de  $M$  tout morphisme injectif essentiel  $i$  de  $M$  dans un objet injectif  $I$  de  $\mathcal{C}$ . Si  $i : M \rightarrow I$  est une enveloppe injective de  $M$ , alors  $I$  est déterminé à un isomorphisme près et  $i$  à un automorphisme près de  $I$ . On dira que  $\mathcal{C}$  est une catégorie avec enveloppes injectives si tout objet de  $\mathcal{C}$  admet une enveloppe injective.

PROPOSITION 1. - Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{C}$  est une catégorie avec enveloppes injectives.
- Tout objet de  $\mathcal{C}$  peut se plonger dans un objet injectif, et si  $M \subset N$ ,

il existe un sous-objet  $Q$  de  $N$ , maximal pour l'égalité  $M \cap Q = 0$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b) : Car si  $M \subset N$ , le plongement de  $M$  dans son enveloppe injective  $I$  se prolonge en un morphisme  $\psi: N \rightarrow I$ . Il suffit alors de poser  $Q = \text{Ker } \psi$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) : Car si  $M \subset J$ ,  $J$  injectif, soit  $Q$  maximal pour l'égalité  $Q \cap M = 0$ . De même, soit  $I$  un sous-objet de  $J$  contenant  $M$  et maximal pour l'égalité  $I \cap Q = 0$ . Alors  $J/Q$  est extension essentielle de  $M$  et contient  $I$ . Le morphisme identique de  $I$  dans  $J$  se prolonge en un morphisme injectif  $\chi: J/Q \rightarrow J$ ;  $\chi(J/Q)$  est extension essentielle de  $M$  et contient  $I$ . Donc  $I = \chi(J/Q)$ ,  $I + Q = J$ ,  $I \cap Q = 0$  et  $I$  est enveloppe injective de  $M$ .

Voici quelques exemples bien connus de catégories avec enveloppes injectives :

-  $\underline{\underline{C}}$  est une catégorie abélienne où les limites inductives existent et sont exactes ; par exemple, la catégorie de tous les modules unitaires à gauche sur un anneau avec élément unité. Une telle catégorie possède des enveloppes injectives [5].

Si, en plus des conditions précitées,  $\underline{\underline{C}}$  possède une famille de générateurs formée d'objets noethériens, on dira que la catégorie  $\underline{\underline{C}}$  est localement noethérienne. Alors l'enveloppe injective  $E(M)$  de tout  $M$  est somme directe d'injectifs indécomposables et l'étude de  $E(M)$  équivaut "à l'étude de la décomposition primaire de  $M$ " [5].

- La notion d'enveloppe projective est duale de la notion d'enveloppe injective. Ainsi un morphisme surjectif  $p: P \rightarrow M \rightarrow 0$  est dit essentiel si pour  $Q \subset P$ , l'égalité  $Q + \text{Ker } p = P$  entraîne  $Q = P$ .

Si  $A$  est un anneau avec élément 1, les  $A$ -modules linéairement compacts [10] forment une catégorie abélienne avec limites projectives exactes. Si de plus  $A$  est commutatif et noethérien, la duale de cette catégorie est localement noethérienne.

- On trouvera dans [2], [4] d'autres exemples de catégories avec enveloppes projectives. Cette notion y est reliée à la notion de radical et au relèvement des idempotents. Bien entendu, toute théorie convenable démontre d'abord l'existence d'enveloppes projectives et en déduit le relèvement des idempotents.

## 2. Sous-catégories. Catégories quotients.

Ce paragraphe est consacré au déroulement de sorites bien connus en algèbre homologique ([7], [16]).

Si  $\underline{\underline{C}}$  est une catégorie abélienne, on rappelle qu'une sous-catégorie épaisse

$\underline{\underline{D}}$  de  $\underline{\underline{C}}$  est une catégorie abélienne dont la classe des objets est une sous-classe de la classe des objets de  $\underline{\underline{C}}$  et qui est telle que :

a. Si  $M, N$  sont des objets de  $\underline{\underline{D}}$ , alors  $\text{Hom}_{\underline{\underline{D}}}(M, N) = \text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(M, N)$ , l'addition et la composition des morphismes étant "la même" que dans  $\underline{\underline{C}}$ .

b. Tout objet de  $\underline{\underline{C}}$  isomorphe à un sous-objet ou un objet quotient de  $\underline{\underline{D}}$  appartient à  $\underline{\underline{D}}$ ; toute extension de deux objets de  $\underline{\underline{D}}$  est dans  $\underline{\underline{D}}$ .

La donnée de  $\underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{D}}$  permet de construire la catégorie abélienne quotient  $\underline{\underline{C/D}}$  :

Les objets de  $\underline{\underline{C/D}}$  coïncident avec les objets de  $\underline{\underline{C}}$ . Si  $M$  et  $N$  sont deux objets de  $\underline{\underline{C}}$ ,  $M'$  et  $N'$  deux sous-objets de  $M$  et  $N$ , on a une application canonique de  $\text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(M, N)$  dans  $\text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(M', N/N')$ . Quand  $M'$  et  $N'$  parcourent les sous-objets de  $M$  et  $N$  tels que  $M/M' \in \underline{\underline{D}}$  et  $N' \in \underline{\underline{D}}$ , alors les groupes  $\text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(M', N/N')$  forment un système inductif de groupes abéliens. On posera par définition :

$$\text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(M, N) = \varinjlim \text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(M', N/N')$$

Ainsi  $\text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(M, N)$  est muni d'une structure de groupe abélien et il reste à définir une loi de composition :

$$\text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(M, N) \times \text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(N, P) \longrightarrow \text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(M, P)$$

Nous renvoyons pour cela le lecteur au travail de GROTHENDIECK [7]. Nous nous contenterons de compléter le dictionnaire pour la commodité du lecteur :

Si  $M$  est un objet de  $\underline{\underline{C}}$ , on notera par  $D(M)$  l'objet de  $\underline{\underline{C/D}}$  défini par  $M$ .

- Si  $u : M \rightarrow N$  est un morphisme de  $\underline{\underline{C}}$ , alors le morphisme  $D(u) : D(M) \rightarrow D(N)$  est nul si et seulement si  $\text{Im } u \in \underline{\underline{D}}$ .
- Le morphisme  $D(u)$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker } u \in \underline{\underline{D}}$ .
- Le morphisme  $D(u)$  est surjectif si et seulement si  $\text{Coker } u \in \underline{\underline{D}}$ .
- On a les égalités :

$$D(\text{Ker } u) = \text{Fer } D(u), \quad D(\text{Coim } u) = \text{Coim } D(u) = \text{Im } D(u) = D(\text{Im } u),$$

$$D(\text{Coker } u) = \text{Coker } D(u)$$

- Si  $M$  et  $N$  sont deux objets de  $\underline{\underline{C}}$ , alors  $D(M)$  et  $D(N)$  sont isomorphes dans  $\underline{\underline{C/D}}$  si et seulement si  $M$  et  $N$  contiennent des sous-objets  $M_1, M_2$  et  $N_1, N_2$  qui satisfont aux conditions suivantes :

$$M_1 \subset M_2 \subset M, \quad N_1 \subset N_2 \subset N$$

$$M_1 \in \underline{\underline{D}}, \quad M/M_2 \in \underline{\underline{D}}, \quad N_1 \in \underline{\underline{D}}, \quad N/N_2 \in \underline{\underline{D}}$$

$M_2/M_1$  et  $N_2/N_1$  sont isomorphes (comme objets de  $\underline{\underline{C}}$ ).

### 3. Sous-catégories localisantes.

Les raisonnements du paragraphe précédent étaient "autoduaux" ; ils pouvaient s'appliquer aussi bien à  $\underline{\underline{C}}$  qu'à la catégorie duale. Nous allons maintenant imposer à  $\underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{D}}$  des conditions supplémentaires qui ne seront plus auto-duales. On pourra en déduire des résultats sur les objets injectifs, non sur les objets projectifs.

HYPOTHÈSE  $\mathcal{S}$  . - Si  $M$  est un objet de  $\underline{\underline{C}}$  et  $(N_i)_{i \in I}$  une famille de sous-objets de  $M$ , alors la famille  $(N_i)_{i \in I}$  admet une borne supérieure dans  $M$ , que l'on notera  $\sup_{i \in I} N_i$ .

HYPOTHÈSE  $\mathcal{L}$  . - Avec les notations de l'hypothèse  $\mathcal{S}$ , si  $N_i$  appartient à  $\underline{\underline{D}}$  pour tout  $i$ , alors  $\sup_{i \in I} N_i$  appartient à  $\underline{\underline{D}}$ .

Il va sans dire que  $(\mathcal{S})$  est satisfait pour toutes les catégories raisonnables et n'apporte aucune restriction "dans la pratique". La restriction imposée à  $\underline{\underline{D}}$  par  $(\mathcal{L})$  est par contre réelle. On dira que  $\underline{\underline{D}}$  est une sous-catégorie localisante de  $\underline{\underline{C}}$  si elle satisfait à  $(\mathcal{L})$ . On supposera à partir de maintenant que  $(\mathcal{S})$  et  $(\mathcal{L})$  sont satisfaits.

La première conséquence en est que la sous-catégorie localisante  $\underline{\underline{D}}$  satisfait aussi à l'hypothèse  $\mathcal{S}$ . De même si  $\underline{\underline{C}}$  possède une famille de générateurs, il en va de même de  $\underline{\underline{D}}$ . Si  $M$  appartient à  $\underline{\underline{D}}$  et possède une enveloppe injective  $I$  dans  $\underline{\underline{C}}$ , le plus gros sous-objet de  $I$  appartenant à  $\underline{\underline{D}}$  est l'enveloppe injective de  $M$  dans  $\underline{\underline{D}}$ . Ainsi si  $\underline{\underline{C}}$  est une catégorie avec enveloppes injectives, alors  $\underline{\underline{D}}$  est à enveloppes injectives ; si  $\underline{\underline{C}}$  est localement noethérien,  $\underline{\underline{D}}$  est localement noethérien...

Ces propriétés de transfert de  $\underline{\underline{C}}$  à  $\underline{\underline{D}}$  peuvent être répétées pour la catégorie quotient  $\underline{\underline{C/D}}$  :

Si  $M$  est un objet de  $\underline{\underline{C}}$ , il contient un sous-objet maximum  $M_1$  appartenant à  $\underline{\underline{D}}$  et  $M' = M/M_1$  ne contient pas de sous-objet de  $\underline{\underline{D}}$  autre que  $0$ . Le quotient  $M'$  est le plus petit quotient  $N$  de  $M$  tel que  $D(M) = D(N)$ .

En outre, tout morphisme  $u$  de  $\underline{\underline{C}}$ ,  $u : M \rightarrow N$ , induit des morphismes  $u'$  de  $\underline{\underline{C}}$  et  $D(u)$  de  $\underline{\underline{C/D}}$  :

$$u' : M' \longrightarrow N' , \quad D(u) : D(M) \longrightarrow D(N)$$

Dire que  $D(u)$  est injectif équivaut à dire que  $u'$  est injectif. Si  $I$  est un injectif de  $\underline{\underline{C}}$  qui ne contient pas de sous-objet de  $\underline{\underline{D}}$  autre que  $0$ , alors  $D(I)$  est un injectif de  $\underline{\underline{C/D}}$ . De même, dire que  $D(u)$  est essentiel, c'est dire que  $u'$  est essentiel. En particulier :

- Si  $\underline{\underline{C}}$  est une catégorie avec enveloppes injectives,  $\underline{\underline{C/D}}$  est une catégorie avec enveloppes injectives.

De même :

- Si  $(U_i)_{i \in I}$  est une famille de générateurs de  $\underline{\underline{C}}$ ,  $(D(U_i))_{i \in I}$  est une famille de générateurs de  $\underline{\underline{C/D}}$ .

- La catégorie  $\underline{\underline{C/D}}$  satisfait à l'hypothèse  $(S')$  et le  $\sup$  commute avec le foncteur  $D$ , i. e.

$$D(\sup N_i) = \sup D(N_i)$$

Il ne semble pas pourtant que l'existence de limites inductives dans  $\underline{\underline{C}}$  entraîne cette existence dans  $\underline{\underline{C/D}}$ . Ce sera pourtant le cas pour les catégories du paragraphe 5.

#### 4. Le foncteur localisation.

Nous supposons toujours que  $\underline{\underline{C}}$  est une catégorie abélienne satisfaisant à  $(S)$  et que  $\underline{\underline{D}}$  est une sous-catégorie localisante de  $\underline{\underline{C}}$ .

On dira qu'un objet  $M$  de  $\underline{\underline{C}}$  est  $\underline{\underline{D}}$ -fermé, s'il satisfait aux conditions équivalentes :

a. Pour tout morphisme  $u$  de  $\underline{\underline{C}}$ ,  $u : P \longrightarrow Q$ , tel que  $\text{Ker } u$  et  $\text{Coker } u$  appartiennent à  $\underline{\underline{D}}$ , les morphismes  $\varphi : P \longrightarrow M$  se "prolongent" en des morphismes  $\psi : Q \longrightarrow M$ , i. e.  $\varphi = \psi \circ u$ .

b.  $M$  ne contient pas de sous-objets appartenant à  $\underline{\underline{D}}$  autres que  $0$ , et si  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$  est une suite exacte telle que  $P \in \underline{\underline{D}}$ , alors la suite exacte se scinde (i. e.  $M$  est facteur direct dans  $N$ ).

$(a) \implies (b)$  : Si  $L$  est un sous-objet de  $M$  appartenant à  $\underline{\underline{D}}$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{u} & M/L & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow i & & \swarrow & & \\ M & & & & \end{array}$$

où  $i$  est l'application identique. Danc  $L$  est nul.

De même, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N \\ & & \downarrow i & \searrow & \\ & & M' & & \end{array}$$

et donc  $M$  est facteur direct.

(b) $\implies$ (a) : Car si  $M_P Q$  désigne comme d'habitude le Coker de l'application

$$\psi \otimes (-u) : P \longrightarrow M \otimes Q ,$$

on vérifie que  $M$  se plonge dans  $M_P Q$  comme facteur direct. En composant le morphisme canonique de  $Q$  dans  $M_P Q$  avec la projection de  $M_P Q$  sur  $M$ , on obtient  $\psi$ .

Soit maintenant  $M$  un objet arbitraire de  $\underline{C}$ . On appelle  $D$ -enveloppe de  $M$  tout morphisme  $u$  de  $M$  dans un objet  $D$ -fermé  $M_D$ , qui soit un  $D$ -isomorphisme (i. e.  $\text{Ker } u \in \underline{D}$ ,  $\text{Coker } u \in \underline{D}$ ). Si  $M'$  est le quotient de  $M$  par le plus grand sous-objet de  $M$  appartenant à  $\underline{D}$ , le morphisme  $u$  induit un morphisme injectif de  $M'$  dans  $M_D$ , et  $M_D$  est évidemment extension essentielle de  $M' \simeq \text{Im } u$  : car si  $Q \subset M_D$  et  $Q \cap M' = 0$ , alors  $Q$  est un sous-objet de  $M_D/M'$  et appartient à  $\underline{D}$ ; ce qui n'est pas possible d'après (b). En outre, on vérifie aisément qu'avec les notations de (a) le "prolongement"  $\psi$  de  $\psi$  est unique. Il en résulte que  $M_D$  est défini à un isomorphisme près.

PROPOSITION 2. - Si  $M$  admet une  $D$ -enveloppe  $u : M \longrightarrow M_D$ , alors on a, pour tout objet  $N$  de  $\underline{C}$  :

$$\text{Hom}_{\underline{C}/\underline{D}}(D(N), D(M)) \simeq \text{Hom}_{\underline{C}}(N, M_D) .$$

On va définir l'application

$$\text{Hom}_{\underline{C}/\underline{D}}(D(N), D(M)) \longrightarrow \text{Hom}_{\underline{C}}(N, M_D)$$

et laisser au lecteur le soin de faire les vérifications. Si  $N_1$  est un sous-objet de  $N$  tel que  $N/N_1 \in \underline{D}$  et  $M_1$  un sous-objet de  $M$  appartenant à  $\underline{D}$ , alors  $u$  induit un morphisme  $u_1 : M/M_1 \longrightarrow M_D$  et on a une application canonique :

$$\text{Hom}_{\underline{C}}(N_1, M/M_1) \longrightarrow \text{Hom}(N_1, M_D) .$$

Mais tout morphisme de  $N_1$  dans  $M_D$  se prolonge de manière unique en un morphisme de  $N$  dans  $M_D$ . On obtient ainsi une application de  $\text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(N_1, M/M_1)$  dans  $\text{Hom}(N, M_D)$ . Faisant varier  $N_1$  et  $M_1$ , et passant à la limite inductive on aboutit à l'application cherchée :

$$\text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(D(N), D(M)) \longrightarrow \text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(N, M_D) \quad .$$

Soient maintenant  $M$  et  $N$  deux objets de  $\underline{\underline{C}}$  admettant des  $D$ -enveloppes  $u : M \longrightarrow M_D$  et  $v : N \longrightarrow N_D$ . Alors tout morphisme  $\psi : M \longrightarrow N$  induit un morphisme unique  $\psi_D$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & N \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ M_D & \xrightarrow{\psi_D} & N_D \end{array}$$

En effet  $\text{Ker } u \in D$  et  $\text{Coker } u \in D$  et le morphisme  $v \circ \psi$  admet donc un "prolongement" unique  $\psi_D : M_D \longrightarrow N_D$ .

PROPOSITION 3. - Si les objets  $M$ ,  $N$  et  $P$  de  $\underline{\underline{C}}$  admettent des  $D$ -enveloppes  $u : M \longrightarrow M_D$ ,  $v : N \longrightarrow N_D$  et  $w : P \longrightarrow P_D$ , alors pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0 \quad ,$$

la suite

$$0 \longrightarrow M_D \xrightarrow{\psi_D} N_D \xrightarrow{\psi_D} P_D$$

est exacte.

En effet, soit  $N_1$  le plus grand sous-objet de  $N$  appartenant à  $D$ . Alors  $N_1 \cap M$  est le plus grand sous-objet de  $M$  appartenant à  $D$ , et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow M/M \cap N_1 & \xrightarrow{\psi_1} & N/N_1 \\ u_1 \downarrow & & \downarrow v_1 \\ M_D & \xrightarrow{\psi_D} & N_D \end{array}$$

Comme  $v_1 \circ \psi_1$  est injectif et que  $u_1$  est essentiel,  $\psi_D$  est injectif.



En outre, soit  $\bar{M}$  le plus grand sous-objet de  $N$  contenant  $M$  et tel que  $\bar{M}/M$  appartienne à  $\underline{D}$ . L'application de  $N/M$  dans  $\underline{N_D}/\underline{M_D}$  induit un morphisme de  $N/\bar{M}$  dans  $\underline{N_D}/\underline{M_D}$ , car il est clair que  $\underline{N_D}/\underline{M_D}$  ne contient pas d'objets appartenant à  $\underline{D}$  autres que  $0$ . Comme de plus le morphisme de  $N/\bar{M}$  dans  $\underline{P_D}$  est injectif et que  $\underline{N_D}/\underline{M_D}$  est extension essentielle de  $N/\bar{M}$ , il en résulte que  $\Psi_D$  induit un morphisme injectif de  $\underline{N_D}/\underline{M_D}$  dans  $\underline{P_D}$ ,

C. G. F. D.

Il nous reste à déterminer sous quelles conditions un objet  $M$  admet une  $\underline{D}$ -enveloppe. Je dis que pour cela il suffit que le quotient  $M'$  de  $M$  se plonge dans un objet  $\underline{D}$ -fermé. En effet si  $i : M \rightarrow N$  est un morphisme de  $M$  dans un objet  $\underline{D}$ -fermé et est tel que  $\text{Ker } i \in \underline{D}$ , alors  $i$  se factorise par  $u : M \rightarrow \bar{M}$ , où  $\bar{M}$  est le plus grand sous-objet de  $N$  contenant  $i(M)$  et tel que  $\bar{M}/i(M) \in \underline{D}$ . On vérifie en outre aisément à l'aide de (a) que  $u$  est une  $\underline{D}$ -enveloppe.

Par exemple, tout objet injectif  $I$  de  $\underline{C}$  qui ne contient pas de sous-objets appartenant à  $\underline{D}$  autres que  $0$  est  $\underline{D}$ -fermé. Mais si  $M'$  admet une enveloppe injective  $I$ , cette enveloppe injective ne peut évidemment contenir d'objet non nul de  $\underline{D}$ ; d'où :

PROPOSITION. - Si  $\underline{C}$  est une catégorie abélienne avec enveloppes injectives satisfaisant à (S'), et si  $\underline{D}$  est une sous-catégorie localisante de  $\underline{C}$ , alors tout objet de  $\underline{C}$  possède une  $\underline{D}$ -enveloppe.

### 5. Le foncteur section.

Pour simplifier, nous supposerons à partir de maintenant que  $\underline{C}$  est une catégorie abélienne avec enveloppes injectives. Si  $\underline{D}$  est une sous-catégorie localisante de  $\underline{C}$ , on choisira pour chaque objet  $M$  de  $\underline{C}$  une  $\underline{D}$ -enveloppe  $u_M : M \rightarrow \underline{M_D}$ . Alors la correspondance  $M \mapsto \underline{M_D}$  définit un foncteur exact à gauche  $L$  de  $\underline{C}$  dans  $\underline{C}$  : on le nommera foncteur localisation relatif à  $\underline{D}$ . Quand " $M$  varie" les  $u_M$  définissent un morphisme du foncteur identité dans le foncteur localisation. En outre il est clair, d'après la proposition 2, que le foncteur localisation est composé d'un foncteur canonique  $\underline{D} : \underline{C} \rightarrow \underline{C/D}$  et d'un "foncteur section"  $\underline{S} : \underline{C/D} \rightarrow \underline{C}$  déterminé par la condition :

$$L(M) = \underline{M_D} = \underline{S(D(M))} .$$

On est donc en présence du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\underline{C}} & \xrightarrow{L} & \underline{\underline{C}} \\
 \searrow D & & \nearrow S \\
 & \underline{\underline{C/D}} &
 \end{array}$$

La proposition 2 s'énonce alors ainsi : les morphismes  $u_M : M \rightarrow M_D$  induisent dans  $\underline{\underline{C/D}}$  un isomorphisme du foncteur identité dans le foncteur  $D \circ S$ .

Nous allons maintenant tirer quelques conséquences de l'existence des foncteurs  $S$  et  $L$  :

-Supposons d'abord que  $(M_i)_{i \in I}$  soit un système inductif d'objets de  $\underline{\underline{C}}$  admettant une limite inductive dans  $\underline{\underline{C}}$ , soit  $\varinjlim M_i$ . Dès lors  $(D(M_i))_{i \in I}$  est un système inductif d'objets de  $\underline{\underline{C/D}}$  et  $D(\varinjlim M_i)$  est sa limite inductive :

Ceci résulte en effet immédiatement des égalités

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(D(\varinjlim M_i), D(N)) &= \text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(\varinjlim M_i, N_D) = \varprojlim_I \text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(M_i, N_D) = \\
 & \varprojlim_I \text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(D(M_i), D(N))
 \end{aligned}$$

-Comme conséquence de ce qui précède, si  $\underline{\underline{C}}$  est une catégorie où les limites inductives sont exactes, il en va de même de  $\underline{\underline{C/D}}$ . De plus si  $(U_i)_{i \in I}$  est une famille de générateurs noethériens de  $\underline{\underline{C}}$ , les  $(D(U_i))_{i \in I}$  forment une famille de générateurs noethériens de  $\underline{\underline{C/D}}$  :

PROPOSITION 4. - Si  $\underline{\underline{C}}$  est une catégorie localement noethérienne,  $\underline{\underline{D}}$  une sous-catégorie localisante, alors  $\underline{\underline{D}}$  et  $\underline{\underline{C/D}}$  sont des catégories localement noethériennes. De plus le foncteur localisation  $M \rightarrow M_D$  commute avec les limites inductives.

Il reste à montrer que  $(\varinjlim M_i)_D = \varinjlim (M_i)_D$ , ou  $(M_i)_{i \in I}$  est un système inductif d'objet de  $\underline{\underline{C}}$ . Mais si  $u_i$  désigne le morphisme canonique de  $M_i$  dans  $(M_i)_D$ , on a des suites exactes :

$$0 \rightarrow \text{Ker } u_i \rightarrow M_i \rightarrow (M_i)_D \rightarrow \text{Coker } u_i \rightarrow 0$$

D'où

$$0 \rightarrow \varinjlim \text{Ker } u_i \rightarrow \varinjlim M_i \rightarrow \varinjlim (M_i)_D \rightarrow \varinjlim \text{Coker } u_i \rightarrow 0$$

et  $\varinjlim \text{Ker } u_i$  ainsi que  $\varinjlim \text{Coker } u_i$  appartiennent manifestement à  $\underline{\underline{D}}$ .

En particulier, l'application de  $\varinjlim (M_i)_D$  dans  $(\varinjlim M_i)_D$  est un  $D$ -isomorphisme et il suffit de montrer que  $\varinjlim (M_i)_D$  est  $D$ -fermé. Ceci signifie que pour tout  $D$ -isomorphisme  $v : P \rightarrow Q$ , l'application de  $\text{Hom}_D(Q, \varinjlim (M_i)_D)$  dans  $\text{Hom}_C(P, \varinjlim (M_i)_D)$  est un isomorphisme ; en outre, il suffit de faire la vérification quand  $P$  et  $Q$  sont noethériens ; ceci se déduit alors de l'égalité :

$$\text{Hom}_C(N, \varinjlim M_i) = \varinjlim \text{Hom}_C(N, M_i) \quad ,$$

où  $N$  est noethérien.

- Soit  $M$  un objet arbitraire de  $\underline{C}$ ,  $M_1$  le plus grand sous-objet de  $M$  appartenant à  $\underline{D}$ ,  $M'$  le quotient  $M/M_1$ , enfin  $E(M)$ ,  $E(M_1)$  et  $E(M')$  les enveloppes injectives de  $M$ ,  $M_1$  et  $M'$ . Alors  $E(M')$  ne peut contenir d'objets non nuls appartenant à  $\underline{D}$  (sinon  $M'$  en contiendrait). On en déduit que les enveloppes injectives de  $M_D$  et  $D(M)$  dans  $\underline{C}$  et  $\underline{C}/D$  ne sont autres que  $E(M')$  et  $D(E(M'))$ . Comme l'étude de la "décomposition primaire" de  $M$  "équivalait" à l'étude de l'enveloppe injective  $E(M)$  (voir [5]), on retrouve les propriétés de transfert de la décomposition primaire par localisation.

Il faut pourtant se garder de croire que  $E(M')$  est le quotient de  $E(M)$  par  $E(M_1)$  ; car si l'inclusion  $M_1 \subset M$  induit un plongement de  $E(M_1)$  comme facteur direct dans  $E(M)$ ,  $E(M_1) \cap M$  est en général différent de  $M_1$ . Il n'y a égalité pour tout  $M$  que si  $\underline{D}$  contient avec tout objet son enveloppe injective : ceci a toujours lieu en algèbre commutative, comme on le verra.

Il va de soi que le foncteur  $L$  est exact si et seulement si le foncteur  $S$  est exact. Voici d'autres propriétés équivalentes :

PROPOSITION 5. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- Le foncteur localisation  $M \rightarrow M_D$  est exact.
- Si on a une suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow N$ , où  $M$  et  $N$  sont  $D$ -fermés, alors  $N/M$  est  $D$ -fermé.
- Si on a une suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow I$ , où  $M$  est  $D$ -fermé et où  $I$  est un injectif ne contenant aucun objet non nul de  $\underline{D}$ , alors  $I/M$  est  $D$ -fermé.

(a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c) : clair.

(c)  $\implies$  (a) : On va montrer que le premier foncteur dérivé  $R^1 L$  de  $L$  est nul. Supposons d'abord que  $M$  appartient à  $\underline{D}$ , soient  $I$  son enveloppe injective

et  $N$  le quotient  $I/M$  ; de la suite exacte,

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad ,$$

on déduit alors

$$0 \longrightarrow \underline{M}_D = 0 \longrightarrow \underline{I}_D \longrightarrow \underline{N}_D \longrightarrow R^1 L(M) \longrightarrow 0 \quad .$$

Comme  $\underline{I}_D$  est évidemment isomorphe à  $\underline{N}_D$ , on en déduit que  $R^1 L(\underline{M}_D) = 0$ .

Supposons maintenant que  $M$  ne contienne pas d'objet non nul de  $\underline{D}$  et conservons les notations précédentes. On a alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underline{M}_D \longrightarrow \underline{I}_D \longrightarrow \underline{N}_D \longrightarrow R^1 L(M) \longrightarrow 0 \quad .$$

Mais (c) signifie que le morphisme  $\underline{I}_D \longrightarrow \underline{N}_D$  est surjectif : d'où  $R^1 L(\underline{M}_D) = 0$ .

Dans le cas général, soit  $M_1$  le plus grand sous-objet de  $\underline{D}$  contenu dans  $M$ , et soit  $M' = M/M_1$ . De la suite exacte

$$R^1 L(M_1) \longrightarrow R^1 L(M) \longrightarrow R^1 L(M')$$

on tire alors :  $R^1 L(M) = 0$ .

Supposons que le foncteur localisation  $L$  soit exact. Alors le morphisme fonctoriel de la proposition 2 se prolonge en un isomorphisme de foncteur cohomologique :

$$\text{Ext}_{\underline{C}/\underline{D}}^n(D(M), D(N)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\underline{C}}^n(M, \underline{N}_D)$$

Réciproquement cette propriété caractérise les foncteurs localisation exacts (montrer que la propriété entraîne l'assertion (c) de la proposition 5).

On remarquera enfin que l'assertion (b) de la proposition 5 signifie que les modules  $\underline{D}$ -fermés forment une sous-catégorie complète de  $\underline{C}$  au sens de GROTHENDIECK. Cette sous-catégorie est alors équivalente à la catégorie quotient.

## 6. Catégories de modules.

Soit  $A$  un anneau avec élément unité  $1 \neq 0$ , et soit  $\underline{C}$  la catégorie des  $A$ -modules unitaires à gauche. Nous allons préciser ce qui se passe dans ce cas.

Tout d'abord, si  $\underline{D}$  est une sous-catégorie localisante de  $A$ -modules, et  $M$  un  $A$ -module, alors on a une application bilinéaire

$$A \times \underline{M}_D \longrightarrow \underline{M}_D \quad .$$

Autrement dit tout  $m \in \underline{M}_D$  définit une application  $A$ -linéaire de  $A$  dans  $\underline{M}_D$ . Cette application se prolonge d'une seule manière en une application  $A$ -linéaire de  $\underline{A}_D$  dans  $\underline{M}_D$ , définissant une application bilinéaire :

$$\underline{A}_D \times \underline{M}_D \longrightarrow \underline{M}_D$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si  $M = A$ , cette application fait de  $\underline{A}_D$  un anneau. De même si  $M$  est arbitraire,  $\underline{M}_D$  est un  $\underline{A}_D$ -module. Par exemple, si  $\mathfrak{L}$  est un idéal à gauche de  $A$ ,  $\mathfrak{L}_D$  est un idéal à gauche de  $\underline{A}_D$ . Il ne faut cependant pas croire que si  $\mathfrak{L}$  est un idéal bilatère de  $A$ ,  $\mathfrak{L}_D$  est un idéal bilatère de  $\underline{A}_D$ ; d'une manière générale, il ne faut pas attacher trop d'importance aux idéaux bilatères dans l'étude des modules à gauche.

Soit  $\underline{C}'$  la catégorie des modules unitaires sur  $\underline{A}_D$ ,  $\underline{D}'$  la sous-catégorie localisante formée des  $\underline{A}_D$ -modules qui appartiennent à  $\underline{D}$  quand on les considère comme  $A$ -modules.

Alors  $\underline{C}'/\underline{D}'$  est une catégorie équivalente à  $\underline{C}/\underline{D}$ . Tout  $\underline{A}_D$ -module  $\underline{D}'$ -fermé est  $\underline{D}$ -fermé et réciproquement. Tout  $\underline{A}_D$ -module injectif  $\underline{D}'$ -fermé est  $\underline{D}$ -fermé et injectif comme  $A$ -module et réciproquement.

## 7. Catégories de modules (suite).

Nous allons donner une formule explicite pour la construction des  $\underline{D}$ -enveloppes. Soit pour cela  $F$  la famille des idéaux à gauche  $\mathfrak{L}$  de  $A$  tels que  $A/\mathfrak{L} \in \underline{D}$ . La famille  $F$  satisfait aux propriétés suivantes :

- Si  $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{L}$  et  $\mathfrak{L} \in F$ , alors  $\mathfrak{m} \in F$ .
- Si  $\mathfrak{m} \in F$  et  $\mathfrak{L} \in F$ , alors  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{L} \in F$ .
- Si  $\mathfrak{L} \in F$  et  $a \in A$ , alors  $(\mathfrak{L} : a) = \{x \mid xa \in \mathfrak{L}\}$  appartient à  $F$ .
- Si  $\mathfrak{L} \in F$  et  $\mathfrak{m} \in F$ , alors  $\mathfrak{L}.\mathfrak{m} \in F$ .

La démonstration de ces propriétés est immédiate. Les conditions (a), (b) et (c) signifient que  $F$  est une base de filtre pour une topologie qui fait de  $A$  un anneau topologique. Réciproquement  $\underline{D}$  s'identifie à la sous-catégorie localisante de  $\underline{C}$  qui est engendrée par les  $A/\mathfrak{L}$  ( $M \in \underline{D}$  si et seulement si l'annulateur de tout  $m \in M$  appartient à  $F$ ). En fait il est équivalent de se donner  $\underline{D}$  ou de

se donner la famille  $\underline{F}$ .

Il résulte maintenant de la proposition 2 que

$$M_{\underline{D}} = \text{Hom}_A(A, M_{\underline{D}}) = \varinjlim_{\underline{I} \in \underline{F}} \text{Hom}_A(\underline{I}, M'),$$

où  $M'$  est le quotient de  $M$  par le plus grand sous-objet  $M_1$  de  $M$  appartenant à  $\underline{D}$ .

PROPOSITION 6. - L'objet  $M_{\underline{D}}$  s'identifie canoniquement à  $\varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, M')$ . En outre l'application canonique de  $\varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, M)$  dans  $\varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, M')$  est injective. Elle est surjective pour tout  $M$  si et seulement si  $\varinjlim \text{Ext}_A^1(\underline{I}, M)$  est nul quand  $M$  appartient à  $\underline{D}$ . Dans ce dernier cas le  $n$ -ième foncteur dérivé du foncteur localisation  $L$  s'identifie à  $\varinjlim \text{Ext}_A^n(\underline{I}, M)$ .

En effet, de la suite exacte

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0,$$

on tire

$$0 \rightarrow \varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, M_1) \rightarrow \varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, M) \xrightarrow{\Psi} \varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, M') \rightarrow \varinjlim \text{Ext}_A^1(\underline{I}, M_1)$$

On vérifie tout de suite que  $\varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, M_1) = 0$ , et donc que  $\Psi$  est injectif. En outre  $M_1 \in \underline{D}$  et  $\Psi$  est surjectif si  $\varinjlim \text{Ext}_A^1(\underline{I}, M_1) = 0$ .

Réciproquement, supposons que  $\Psi$  soit surjectif pour tout  $M$ . Alors  $\varinjlim \text{Ext}_A^n(\underline{I}, M)$  qui est le  $n$ -ième foncteur dérivé de  $\varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, M)$  s'identifie au  $n$ -ième foncteur dérivé de  $L(M)$ . Mais comme  $R^1 L(M) = 0$  si  $M$  appartient à  $\underline{D}$ , on a le résultat général.

COROLLAIRE 1. -  $L(M) = M_{\underline{D}}$  s'identifie canoniquement à  $\varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, M)$ , si  $A$  est un anneau héréditaire, ou si  $\underline{D}$  contient avec tout objet l'enveloppe injective de cet objet.

La première possibilité est claire.

Pour la seconde, soient  $M$  un objet de  $\underline{D}$  et  $I$  l'enveloppe injective de  $M$ . L'injectif  $I$  appartient donc à  $\underline{D}$  de même que  $I/M$ . Ainsi  $\varinjlim \text{Ext}_A^1(\underline{I}, M)$  qui est isomorphe au conoyau de l'application de  $\varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, I) = 0$  dans  $\varinjlim \text{Hom}_A(\underline{I}, I/M) = 0$  est nul,

C. Q. F. D.

Nous verrons par la suite un exemple où " $\Psi$ " n'est pas surjectif.

**COROLLAIRE 2.** - Supposons que la famille d'idéaux  $F$  admette une "base de filtre" formée d'idéaux à gauche de type fini (i. e. engendrés par un nombre fini d'éléments). Alors le foncteur localisation  $M \Rightarrow \underline{M}_D$  commute avec les sommes directes.

Soit  $(M_i)_{i \in I}$  une famille de  $A$ -modules. Il s'agit de montrer que la  $D$ -enveloppe de la somme directe  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  n'est autre que la somme directe des  $D$ -enveloppes. Ceci résulte directement des deux faits suivants : d'abord le plus grand sous-module  $M_1$  appartenant à  $D$  de  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  est la somme directe  $\bigoplus_{i \in I} (M_i)_1$  des plus grands sous-objets appartenant à  $D$  des  $M_i$  ; ensuite si  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $F$  de type fini  $\text{Hom}_A(\mathcal{I}, \bigoplus_{i \in I} (M_i)/(M_i)_1)$  s'identifie à la somme directe  $\bigoplus_i \text{Hom}_A(\mathcal{I}, M_i/(M_i)_1)$ .

**COROLLAIRE 3.** - Si, en plus des hypothèses du corollaire 2, le foncteur localisation est exact, alors  $\underline{M}_D$  s'identifie avec  $A_D \otimes_A M$  pour tout  $A$ -module  $M$ .

La démonstration est standard : la structure de  $A_D$ -module de  $\underline{M}_D$  fournit d'abord un morphisme du foncteur  $M \Rightarrow A_D \otimes_A M$  dans le foncteur  $M \Rightarrow \underline{M}_D$ . Ce morphisme définit un isomorphisme de  $A_D \otimes_A M$  sur  $\underline{M}_D$  quand  $M = A$  et donc quand  $M$  est un module libre quelconque, d'après le corollaire 2. Dans le cas général, il existe une suite exacte  $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  où  $L_1$  et  $L_0$  sont des  $A$ -modules libres. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{A}_D \otimes_A L_1 & \longrightarrow & \underline{A}_D \otimes_A L_0 & \longrightarrow & \underline{A}_D \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ (\underline{L}_1)_D & \longrightarrow & (\underline{L}_0)_D & \longrightarrow & \underline{M}_D & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où  $u$  et  $v$  sont des isomorphismes ; il en va donc de même pour  $w$ .

**REMARQUE.** - La donnée de la sous-catégorie localisante  $\underline{D}$  est "équivalente" à la donnée d'une famille  $F$  d'idéaux à gauche de  $A$  qui satisfait aux conditions (a), (b), (c) et (d). On peut aussi adopter un point de vue légèrement différent :

Soit en effet  $u$  l'application canonique de  $A$  dans  $\underline{A}_D$ . On posera alors

$$\mathcal{I}^* = u^{-1}(\mathcal{I}_D)$$

L'opération ("de fermeture")  $\mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I}^*$  dans l'ensemble des idéaux à gauche satisfait à :

- a'.  $\{ \in \{^* , \{^{**} = \{^* : \text{Si } m \in \{ \text{ alors } m^* \in \{^* .$   
 b'.  $\{^* \cap m^* = (\{ \cap m)^* .$   
 c'.  $(\{^* : a) = (\{ : a)^* \quad ((\{ : a) = \{x | xa \in \{ \})$   
 d'.  $\{^* . a \in (\{ . a)^*$

Réciproquement, si l'on se donne une opération  $\{ \Rightarrow \{^*$  satisfaisant aux axiomes (a'), (b'), (c') et (d'), cette opération peut être définie à l'aide d'une localisation. (Prendre pour  $\{$  la famille des idéaux  $\{$  tels que  $\{^* = A$ ).

### 8. Anneaux de fractions.

Soit  $S$  un système multiplicativement stable de  $A$  (sous-ensemble de  $A$  stable par multiplication). Le système  $S$  permet de définir une sous-catégorie localisante  $\underline{D}_S$  :

$M$  appartient à  $\underline{D}_S$  si tout élément  $m$  de  $M$  est annulé par au moins un  $s$  de  $S$ .

La famille  $F_S$  des idéaux à gauche  $\{$  tels que  $A/\{ \in \underline{D}_S$  est déterminée par la propriété :

$$\forall a \in A, \exists s \in S \text{ tels que } s.a \in \{ .$$

Tout idéal de  $F_S$  rencontre évidemment  $S$ , mais la réciproque est inexacte. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que (1) soit satisfait :

(1) Quels que soient  $s \in S$  et  $a \in A$ , il existe  $t \in S$  et  $b \in A$  tels que  $ta = bs$ .

Nous allons tout de suite retrouver cette condition. Pour cela nous noterons  $\underline{M}_S$  au lieu de  $\underline{M}_{\underline{D}_S}$ .

DÉFINITION. - Si  $\varphi : A \rightarrow B$  est un homomorphisme d'anneaux avec élément unité, et  $S$  un système multiplicativement stable de  $A$ , on dira que  $(B, \varphi)$  est un anneau de fractions à gauche de  $A$  pour  $S$  si :

- Ker  $\varphi$  est formé d'annulateurs à droite de  $S$  ; autrement dit si  $\varphi(a) = 0$ , il existe  $s \in S$  tel que  $sa = 0$ .
- L'image par  $\varphi$  de tout  $s \in S$  est inversible dans  $B$  (à gauche et à droite).
- Tout  $b \in B$  est de la forme  $b = \varphi(s)^{-1} \varphi(a)$ ,  $a \in A$ ,  $s \in S$ .

PROPOSITION 7. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A$  possède un anneau de fractions à gauche pour  $S$ , soit  $(B, \varphi)$ .



b. S satisfait aux conditions :

$$(1) \quad \forall s \in S, \forall a \in A, \exists t \in S \text{ et } b \in A \text{ tels que } ta = bs$$

(2) Si  $as = 0$  avec  $a \in A$  et  $s \in S$ , il existe  $t \in S$  avec  $ta = 0$ .

c. Les images dans  $A_S$  des éléments de S sont inversibles dans  $A_S$ .

En outre, si ces conditions sont remplies, tout anneau de fractions s'identifie à  $A_S$  pour l'application canonique de A dans  $A_S$ ; le foncteur  $M \Rightarrow M_S$  est alors exact et commute avec les limites inductives.

(a)  $\Rightarrow$  (b) : L'assertion (2) est claire, car si  $as = 0$  on a  $\varphi(a) = 0$ .

D'autre part, comme  $\varphi(a) \cdot \varphi(s)^{-1} \in B$ , cet élément est de la forme :

$$\varphi(a) \cdot \varphi(s)^{-1} = \varphi(r)^{-1} \cdot \varphi(c), \quad r \in S, \quad c \in A,$$

ou

$$\varphi(r) \cdot \varphi(a) = \varphi(c) \cdot \varphi(s).$$

autrement dit  $ra - cs \in \text{Ker } \varphi$  et il existe  $u \in S$  tel que  $ura = ucs$ .

On posera donc  $ur = t$ ,  $uc = b$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c) : On va d'abord montrer que (1) et (2) entraînent l'exactitude du foncteur  $M \Rightarrow M_S$ .

En effet, donnons-nous un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ & \downarrow u & \\ M \xrightarrow{p} N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où  $\downarrow$  est un idéal à gauche de  $F_S$ , et où  $M$  et  $\text{Ker } p$  sont  $\underline{D}$ -fermés. Il suffit de montrer que  $\downarrow$  contient un idéal  $\mathfrak{m}$  de  $F_S$  pour lequel  $u$  "se relève" en un morphisme  $v : \mathfrak{m} \rightarrow M$  (i. e. la restriction de  $u$  à  $\mathfrak{m}$  est de la forme  $p \circ v$ ).

Mais si  $s \in \downarrow \cap S$ ,  $u(s)$  est de la forme  $p(m)$  et  $as = 0$  entraîne  $am = 0$ . On posera donc  $\mathfrak{m} = As$  et  $v(as) = am$  : le foncteur  $M \Rightarrow M_S$  est bien exact.

L'exactitude entraîne que dans  $A_S$  tout  $s$  est inversible à gauche (l'idéal à gauche engendré par  $s$  est  $\underline{D}$ -fermé). D'où  $s^{-1} \cdot s = 1$  et  $(ss^{-1} - 1)s = 0$ . Comme  $s$  est simplifiable à gauche et à droite dans  $A_S$ , on a  $ss^{-1} = 1$  et le résultat.

(3)  $\Rightarrow$  (1) : C'est clair, de même que l'unicité de l'anneau de fractions.

REMARQUES.

1° Si  $A$  est un anneau noethérien à droite, l'assertion (1) entraîne l'assertion (2) : car si  $\mathfrak{a}$  désigne le plus grand idéal à gauche de  $A$  appartenant à  $\underline{D}_S$ ,  $\mathfrak{a}$  est bilatère et (2) signifie que l'image  $\bar{s}$  dans  $A/\mathfrak{a}$  de tout  $s$  de  $S$  est régulier à droite (i. e.  $\bar{a}.\bar{s} = 0$  entraîne  $\bar{a} = 0$ ). Mais  $\bar{s}$  est évidemment régulier à gauche et si  $A/\mathfrak{a}$  est noethérien à droite, la régularité à gauche entraîne la régularité à droite.

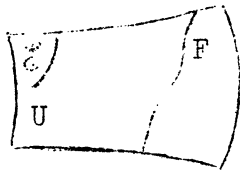
2° Si les conditions (a), (b), (c) de la proposition précédente sont satisfaites, on peut définir  $M_S$  à l'aide d'un "calcul de fractions" comme lorsque  $A$  est commutatif (voir [3]).

3° Si  $S$  est contenu dans le centre de  $A$  les conditions (1) et (2) sont vérifiées automatiquement.

CHAPITRE II : La localisation en algèbre commutative.

1. Faisceaux de modules.

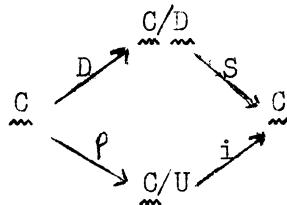
Soit  $\mathcal{E}$  un espace topologique,  $\mathcal{A}$  un faisceau d'anneaux sur  $\mathcal{E}$  et  $\underline{C}$  la catégorie des  $\mathcal{A}$ -modules (ou faisceaux de  $\mathcal{A}$ -modules). Si  $F$  est un fermé de  $\mathcal{E}$ ,  $U$  l'ouvert complémentaire de  $F$  dans  $\mathcal{E}$ , nous utiliserons les notations suivantes :



- Si  $M$  est un  $\mathcal{A}$ -module,  $M/U = \rho(M)$  désignera sa restriction à  $U$ .

- $\rho$  désigne donc le foncteur  $M \mapsto M/U$ .
- $\underline{C}/U$  désigne la catégorie des  $\mathcal{A}/U$ -modules.
- $i$  sera le foncteur qui, à tout  $\mathcal{A}/U$ -module, associe son image directe dans  $\mathcal{E}$ .
- Enfin  $\underline{D}$  désignera la sous-catégorie localisante de  $\underline{C}$  formée des  $\mathcal{A}$ -modules dont la restriction à  $U$  est nulle.

On est alors en présence du diagramme suivant :



ou les foncteurs  $i$  et  $S$  sont caractérisés par les propriétés :

$$\text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(M, i(N)) = \text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(f(M), N)$$

$$\text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(M, S(N)) = \text{Hom}_{\underline{\underline{C/D}}}(D(M), N)$$

Autrement dit, les foncteurs  $f$  et  $i$ ,  $D$  et  $S$  sont "adjoints" au sens de SHIH Weishu-CARTAN [20]. En outre, il est clair que les foncteurs  $S \circ D$  et  $i \circ f$  sont isomorphes et que les foncteurs  $D \circ i$  et  $f \circ S$  permettent de définir une équivalence des catégories  $\underline{\underline{C/D}}$  et  $\underline{\underline{C/U}}$ .

La "théorie de la localisation dans les catégories abéliennes" généralise donc une situation bien connue pour les faisceaux. On remarquera à ce propos que si  $f(M) = 0$ , alors il en va de même de l'enveloppe injective  $E(M)$  de  $M$  : car si  $E_U$  désigne le sous-faisceau de  $E(M)$  dont les fibres sont nulles sur  $F$  et égales à celles de  $E(M)$  sur  $F$ , alors  $E_U \cap M = 0$  et donc  $E_U = 0$ .

On peut refaire les mêmes raisonnements lorsque  $\mathcal{E}$  est un schéma arithmétique au sens de GROTHENDIECK [8] et que  $\underline{\underline{C}}$  est la catégorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents sur  $\mathcal{E}$ . On explicite alors facilement les sous-catégories localisantes de  $\underline{\underline{C}}$  à l'aide de [5]. Le fait que toute sous-catégorie localisante de  $\underline{\underline{C}}$  contient avec un faisceau  $M$ , l'enveloppe injective de ce faisceau peut se voir à l'aide des théorèmes de structure de [5]. Nous allons nous contenter de voir ce qui se passe quand  $\mathcal{E}$  est le spectre premier d'un anneau commutatif noethérien ([8], [15]).

## 2. Le cas d'un anneau commutatif noethérien.

Nous supposerons connus [8], [15], [18]. Soit  $A$  un anneau commutatif noethérien, et soit  $\underline{\underline{C}}$  la catégorie de tous les  $A$ -modules. Toute sous-catégorie localisante  $\underline{\underline{D}}$  de  $\underline{\underline{C}}$  est alors déterminée par les modules noethériens qu'elle contient, et donc aussi par les modules de la forme  $A/\mathfrak{p}$  qu'elle contient, où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$ . Ceci va nous permettre de tout interpréter à l'aide du spectre premier  $V(A)$  de  $A$ .

Pour cela associons d'abord à toute sous-catégorie localisante  $\underline{\underline{D}}$  de  $\underline{\underline{C}}$  l'ensemble  $F_{\underline{\underline{D}}}$  des points  $\mathfrak{p}$  de  $V(A)$  tels que  $A/\mathfrak{p} \in \underline{\underline{D}}$ . Alors  $F_{\underline{\underline{D}}}$  contient avec tout point  $\mathfrak{p}$  tous les points de l'adhérence de  $\mathfrak{p}$  (i. e. tous les  $\mathfrak{q}$  tels que  $A/\mathfrak{q}$  soit un quotient de  $A/\mathfrak{p}$ ). Autrement dit, l'ensemble  $F_{\underline{\underline{D}}}$  est une réunion d'ensembles fermés de  $V(A)$  et il est clair que la correspondance  $\underline{\underline{D}} \rightarrow F_{\underline{\underline{D}}}$  entre sous-catégories localisantes de  $\underline{\underline{C}}$  et sous-ensembles de  $V(A)$  qui sont

réunion de fermés est biunivoque.

Ceci dit, examinons d'abord le cas où  $\underline{D}$  est engendré, comme sous-catégorie localisante de  $\underline{C}$  par un nombre fini de modules  $A/\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p}$  premier. Alors  $\underline{F}_D$  est un sous-ensemble fermé de  $V(A)$  et nous noterons  $\underline{U}_D$  le complémentaire de  $\underline{F}_D$  dans  $V(A)$ . Comme la catégorie  $\underline{C}$  s'identifie à la catégorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents sur  $V(A)$ , on voit, d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, que  $\underline{C}/\underline{D}$  n'est autre que la catégorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents sur  $\underline{U}_D$ . De la même façon, le foncteur localisation  $M \mapsto \underline{M}_D$  s'identifie au foncteur section  $M \mapsto \Gamma(\underline{U}_D, \mathcal{M})$ , où  $\mathcal{M}$  désigne le faisceau sur  $V(A)$  associé au module  $M$ .

Dans le cas général, où  $\underline{D}$  n'est pas engendré par un nombre fini de  $A/\mathfrak{p}$ ,  $\underline{D}$  est la "borne supérieure" des sous-catégories localisantes "de type fini" qu'elle contient. Si  $\underline{D}_i$  est une telle sous-catégorie, on a évidemment pour tout module  $M$  une application canonique de  $\underline{M}_{D_i} = \Gamma(\underline{U}_{D_i}, \mathcal{M})$  dans  $\underline{M}_D$ . Faisant varier  $\underline{D}_i$ , on aboutit à un morphisme de foncteurs

$$\psi: \varinjlim_i (\underline{U}_{D_i}, \mathcal{M}) \longrightarrow \underline{M}_D,$$

où  $\underline{D}_i$  parcourt les sous-catégories localisantes de type fini contenues dans  $\underline{D}$ .

**PROPOSITION 8.** - Si  $\underline{F}_D$  est l'ensemble des points du spectre qui correspond à  $\underline{D}$ , on a un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{L} & \underline{M}_D \\ & \searrow & \nearrow \psi \\ & \varinjlim_U & \Gamma(U, \mathcal{M}) \end{array}$$

où  $U$  parcourt le filtre des ouverts contenant  $V(A) - \underline{F}_D$ , et où  $\psi$  est un isomorphisme.

Il reste à montrer que  $\psi$  est un isomorphisme pour tout  $M$ . Mais ceci est évident quand  $M$  est un module injectif (à cause des théorèmes de structure). Le résultat général s'en déduit à l'aide de la méthode standard bien connue (on choisit une résolution injective de  $M$ , et on remarque que les foncteurs " $\varinjlim_U \Gamma(U, \mathcal{M})$  et  $\underline{M}_D$ " sont exacts à gauche).

Dans le cas où  $\underline{D}$  n'est pas de type fini, le spectre  $V(A)$  ne semble pas donner

une interprétation de la catégorie quotient  $\underline{\underline{C/D}}$ . L'utilité de la théorie des faisceaux en algèbre commutative est de donner une construction des catégories quotients  $\underline{\underline{C/D}}$  et des foncteurs localisation  $\underline{\underline{M}} \xrightarrow{\underline{\underline{\quad}}} \underline{\underline{M_D}}$  quand  $\underline{\underline{D}}$  est une sous-catégorie localisante de type fini.

### 3. Application à une formule de SERRE [17].

PROPOSITION 9. - Soient  $A$  un anneau commutatif noethérien,  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $A$ ,  $U$  l'ouvert de  $V(A)$  formé des idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  de  $A$  qui ne contiennent pas  $\mathfrak{a}$ . Si alors  $M$  est un  $A$ -module,  $\underline{\underline{M}}$  le faisceau sur  $V(A)$  associé à  $M$ , on a un isomorphisme :

$$H^n(U, \underline{\underline{M}}) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_i \text{Ext}_A^n(\mathfrak{a}^i, M)$$

Il suffit évidemment de montrer qu'il y a un isomorphisme quand  $n = 0$  ; mais  $H^0(U, \underline{\underline{M}}) = \Gamma(U, \underline{\underline{M}})$  s'identifie au foncteur  $\underline{\underline{M_D}}$ , où  $\underline{\underline{D}}$  est la sous-catégorie localisante engendrée par les  $A$ -modules  $A/\mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{p} \in U$ . Cette sous-catégorie  $\underline{\underline{D}}$  contient évidemment les enveloppes injectives des modules de  $\underline{\underline{D}}$ . Il résulte donc du chapitre I que  $\underline{\underline{M_D}}$  s'identifie à  $\varinjlim_{\mathfrak{l}} \text{Hom}_A(\mathfrak{l}, M)$  où  $\mathfrak{l}$  parcourt les idéaux tels que  $A/\mathfrak{l}$  appartienne à  $\underline{\underline{D}}$ . Comme les  $\mathfrak{a}^i$ ,  $i$  entier positif, forment une base de filtre pour ces idéaux, le résultat est démontré.

Nous allons appliquer ceci aux faisceaux algébriques cohérents sur l'espace projectif  $P_n(k)$ , où  $k$  est un corps algébriquement clos. On rappelle à ce propos que le groupe des classes de diviseurs de l'espace projectif est isomorphe à  $\underline{\underline{Z}}$ . Pour tout entier algébrique  $n$  il existe donc un faisceau cohérent  $\mathcal{O}(n)$  localement isomorphe au faisceau d'anneaux locaux  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(0)$  de  $P_n(k)$ . En outre, on a les formules

$$\mathcal{O}(m) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n) \cong \mathcal{O}(m+n)$$

$$\underline{\underline{\text{Hom}}}(\mathcal{O}(m), \mathcal{O}(n)) \cong \mathcal{O}(n-m)$$

bien connues en géométrie algébrique.

D'autre part, on a une application canonique de  $k^{n+1} - \{0\}$  dans  $P_n(k)$ . Cette application  $\psi$  est en fait un morphisme algébrique, et l'image réciproque d'une hypersurface de  $P_n(k)$  est une hypersurface conique de  $k^{n+1} - \{0\}$ . En particulier, l'image réciproque d'un ouvert affine de  $P_n(k)$  est un ouvert affine de  $k^{n+1} - \{0\}$  ; si  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$  est une suite exacte de faisceaux

quasi-cohérents de  $k^{n+1} - \{0\}$ , la suite des images directes par  $\Psi$  est exacte [15] :  $0 \rightarrow \Psi_*(M) \rightarrow \Psi_*(N) \rightarrow \Psi_*(P) \rightarrow 0$ . De plus on a la formule :

$$H^i(k^{n+1} - \{0\}, M) \simeq H^i(P_n(k), \Psi_*(M))$$

En particulier si  $M$  est un module gradué sur l'anneau gradué  $k[X_0, \dots, X_n]$ , nous noterons toujours par  $\Psi_*(M)$  l'image directe dans  $P_n(k)$  de la restriction à  $k^{n+1} - \{0\}$  de  $\mathcal{M}$  (faisceau associé à  $M$ ). Si  $\mathfrak{m}$  désigne l'idéal  $(X_0, \dots, X_n)$  de  $A = k[X_0, \dots, X_n]$ , on a donc la jolie formule

$$H^j(P_n(k), \Psi_*(M)) = \varinjlim_i \text{Ext}_A^j(\mathfrak{m}^i, M)$$

Ceci est l'un des résultats centraux de [17], du moins si l'on tient compte de ce que pour tout faisceau algébrique cohérent  $F$  sur  $P_n(k)$ , il existe un module gradué  $M$  sur  $A$  tel que

$$\Psi_*(M) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} (\mathcal{O}(r) \otimes_{\mathcal{O}} F)$$

#### 4. La théorie des anneaux normaux commutatifs.

L'anneau  $A$  est toujours supposé commutatif ; pour simplifier, nous supposerons en outre qu'il est noethérien et intègre.

Le corps des fractions  $K$  de  $A$  coïncide alors avec l'enveloppe injective de  $A$ . On va s'intéresser aux sous-catégories localisantes  $\underline{D}$  de la catégorie  $\underline{C}$  de tous les  $A$ -modules pour lesquelles  $A$  s'identifie à son localisé  $A_{\underline{D}}$ .

Pour cela, il faut évidemment que  $\underline{D}$  soit différent de  $\underline{C}$ , autrement dit que  $K$  soit un  $A$ -module  $\underline{D}$ -fermé. Alors  $A_{\underline{D}}$  est contenu dans  $K$  et s'identifie à  $\varinjlim_{\underline{I}} \text{Hom}_A(\underline{I}, A)$ , où  $\underline{I}$  parcourt la famille  $F$  des idéaux tels que  $A/\underline{I} \in \underline{D}$ .

Mais  $K$  est injectif et toute application de  $\underline{I}$  dans  $A$  se prolonge en un endomorphisme de  $K$  et est de la forme :

$$\underline{I} \rightarrow \underline{I}.x, \text{ ou } \underline{I} \in F \text{ et } x \in K.$$

En particulier  $\text{Hom}_A(\underline{I}, A)$  s'identifie à l'idéal fractionnaire  $\underline{I}^{-1}$  de l'équivalence d'Artin ( $\underline{I}^{-1} = \{x | \underline{I}.x \subset A\}$ ).

Finalement l'égalité  $A_{\underline{D}} = A$  a lieu si et seulement si  $\underline{I}^{-1}$  est contenu dans

$\mathcal{L}$  pour tout  $\mathcal{L}$  de  $F$  ; en outre les idéaux  $\mathcal{L}$  tels que  $\mathcal{L}^{-1} = A$  satisfont manifestement aux conditions (a), (b), (c) et (d) du paragraphe 7 du chapitre I. D'où le résultat suivant : les sous-catégories localisantes  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  pour lesquelles  $A$  s'identifie à  $A_{\mathcal{D}}$  sont contenues dans une sous-catégorie localisante maxima  $\mathcal{E}$  pour laquelle  $A \xrightarrow{\sim} A_{\mathcal{E}}$ . Cette sous-catégorie localisante  $\mathcal{E}$  est engendrée par les modules  $A/\mathfrak{p}$  tels que  $\mathfrak{p}^{-1} = A$ .

Nous allons préciser la condition  $\mathfrak{p}^{-1} = A$  :

PROPOSITION 10. - Les propositions suivantes sont équivalentes ( $\mathcal{L}$  est un idéal de  $A$ ) :

- a.  $\text{Hom}_A(\mathcal{L}, A) = \mathcal{L}^{-1} \neq A$ .
- b.  $\mathcal{L}$  est contenu dans un idéal premier  $\mathfrak{q}$  tel que  $\text{codh } A_{\mathfrak{q}} = 1$ . ( $\text{codh } A_{\mathfrak{q}}$  désigne la codimension homologique de l'anneau local  $A_{\mathfrak{q}}$  au sens de SERRE [19], [18], [13]).
- c. ou bien  $\mathcal{L}$  est contenu dans un idéal premier  $\mathfrak{p}$  tel que  $A_{\mathfrak{p}}$  soit un anneau de valuation discrète, ou bien l'annulateur de  $\mathcal{L}$  dans  $B/A$  n'est pas nul,  $B$  désignant la clôture intégrale de  $A$  dans  $K$ .

(a) $\iff$ (b) : en effet, dire que  $\mathcal{L}^{-1} \neq A$ , c'est dire que  $K$  contient un  $\frac{x}{y}$ , non dans  $A$ , tel que  $\frac{x}{y} \cdot \mathcal{L} \subset A$ . Autrement dit,  $x$  n'appartient pas à  $Ay$ , mais  $x \cdot \mathcal{L} \subset Ay$  ; ce qui signifie que  $\mathcal{L}$  est contenu dans un idéal premier  $\mathfrak{q}$  associé à l'idéal principal  $Ay$ . Cette dernière propriété signifie, d'après SERRE, que la codimension homologique de  $A_{\mathfrak{q}}$  vaut 1.

(a) $\implies$ (c) : soit  $F$  la famille des idéaux  $\mathfrak{m}$  tels que  $\mathfrak{m}^{-1} = A$ , donc tels que  $A/\mathfrak{m} \in \mathcal{E}$ . Il est clair que  $\mathfrak{m}$  appartient à  $F$  si et seulement si les idéaux premiers minimaux de  $\mathfrak{m}$  appartiennent à  $F$ . L'inégalité  $\mathcal{L}^{-1} \neq A$  signifie donc que  $\mathcal{L}$  est contenu dans un idéal premier  $\mathfrak{p}$  tel que  $\mathfrak{p}^{-1} \neq A$ .

On a alors :

Soit  $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^{-1} \not\subset \mathfrak{p}$ . La même relation est alors valable dans l'anneau local  $A_{\mathfrak{p}}$  et il est classique que ceci signifie que  $A_{\mathfrak{p}}$  est de valuation discrète.

Soit  $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^{-1} \subset \mathfrak{p}$  ; il en résulte que  $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^{-1} \cdot \mathfrak{p}^{-1}$  est contenu dans  $\mathfrak{p}$ . Autrement dit,  $\mathfrak{p}^{-1}$  est un anneau contenant  $A$  et c'est manifestement un module de type fini sur  $A$ . L'idéal  $\mathfrak{p}^{-1}$  est donc contenu dans  $B$  et (c) est ainsi démontré.

(c) $\implies$ (a) : c'est limpide.

Soit maintenant  $M$  un  $A$ -module sans torsion. Le module  $M$  est donc contenu dans  $N = K \otimes_A M$  qui est somme directe des  $A$ -modules isomorphes à  $K$ . La  $\mathcal{E}$ -enveloppe  $M_{\mathcal{E}}$  de  $M$  s'identifie évidemment avec l'ensemble des  $x$  de  $N$  tels que  $(M : x) = \{y \mid y \in A, y \cdot x \in M\}$  ne soit contenu dans aucun idéal premier  $\mathfrak{p}$  tel que  $\mathfrak{p}^{-1} \neq A$ . Autrement dit :

$$M_{\mathcal{E}} = \bigcap_{\mathfrak{p}^{-1} \neq A} M_{\mathfrak{p}}$$

Appliquant ceci au cas particulier  $M = A$ , on voit que  $A = A_{\mathcal{E}} = \bigcap_{\mathfrak{p}^{-1} \neq A} A_{\mathfrak{p}}$ . En particulier  $A$  est intégralement clos si et seulement si  $\mathfrak{p}^{-1} \neq A$  entraîne que  $A_{\mathfrak{p}}$  est de valuation discrète ; donc si et seulement si  $A$  est intersection des  $A_{\mathfrak{p}}$  qui sont des anneaux de valuation discrète.

PROPOSITION 11. - Si  $A$  est intégralement clos et si  $M$  est un  $A$ -module de type fini et sans torsion, alors  $M_{\mathcal{E}}$  s'identifie canoniquement au bidual de  $M$ ,

$$M_{\mathcal{E}} \simeq M^{**} = \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), A)$$

En effet, d'une part  $M_{\mathcal{E}} = \bigcap_{\mathfrak{p}^{-1} \neq A} M_{\mathfrak{p}}$ , les  $M_{\mathfrak{p}}$  étant considérés comme plongés dans  $N = K \otimes_A M$ .

D'autre part  $M^{**}$  est manifestement contenu dans le bidual de  $N$  considéré comme espace vectoriel sur  $K$ . Identifiant ce bidual à  $N$ , on pourra considérer  $M^{**}$  comme plongé canoniquement dans  $N$ . On en déduit que :

$$\begin{aligned} M^{**} &= \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), A) = \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), \bigcap_{\mathfrak{p}^{-1} \neq A} A_{\mathfrak{p}}) \\ &= \bigcap_{\mathfrak{p}^{-1} \neq A} \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), A_{\mathfrak{p}}) = \bigcap_{\mathfrak{p}^{-1} \neq A} \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}((\text{Hom}_A(M, A))_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \\ &= \bigcap_{\mathfrak{p}^{-1} \neq A} \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(\text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}), A_{\mathfrak{p}}) \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que  $M_{\mathfrak{p}} \simeq \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(\text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}), A_{\mathfrak{p}})$ . Autrement dit on est ramené à faire la preuve quand  $A$  est un anneau de valuation discrète, ce qui ne fatiguerait personne.

Ainsi le foncteur bidual  $M \Rightarrow M^{**}$  est lié de façon simple au foncteur localisation  $M \Rightarrow M_{\mathcal{E}}$ , du moins quand  $M$  est un module de type fini. Ceci explique les propriétés du foncteur bidual que certains auteurs découvrent avec étonnement [14].



On remarquera aussi que la catégorie quotient  $\underline{C}/\underline{\mathcal{E}}$  a des propriétés bien agréables : sa "dimension de Krull" vaut 1, et on explicite aisément les objets injectifs et les sous-catégories localisantes de  $\underline{C}/\underline{\mathcal{E}}$ . L'étude de la structure des objets noethériens de  $\underline{C}/\underline{\mathcal{E}}$  devrait être aussi utile que difficile, car elle "équivalait" à l'étude des  $A$ -modules  $\underline{\mathcal{E}}$ -fermés et les  $A$ -modules projectifs sont  $\underline{\mathcal{E}}$ -fermés...

### CHAPITRE III : Anneaux non commutatifs.

Ce chapitre n'est qu'une ébauche et il ne saurait en être autrement pour une branche qui n'a pas encore dépassé le stade de l'observation.

#### 1. L'anneau des endomorphismes d'un module injectif.

Soient  $A$  un anneau avec élément unité, commutatif ou non,  $M$  un  $A$ -module à droite et  $I$  son enveloppe injective. Nous noterons par  $B$  (resp.  $C$ ) l'anneau des endomorphismes du  $A$ -module  $M$  (resp.  $I$ ), par  $\mathcal{I}$  (resp.  $\mathcal{S}$ ) l'ensemble des endomorphismes  $\varphi$  de  $M$  (resp.  $I$ ) tels que  $M$  (resp.  $I$ ) soit extension essentielle de  $\text{Ker } \varphi$ . Alors  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{S}$  sont des idéaux bilatères de  $B$  et  $C$ . En outre tout endomorphisme de  $M$  se prolonge en un endomorphisme de  $C$  et deux tels prolongements diffèrent par un élément de  $\mathcal{S}$ . On obtient ainsi un homomorphisme injectif d'anneaux :

$$0 \longrightarrow B/\mathcal{I} \xrightarrow{u} C/\mathcal{S}$$

L'anneau  $C/\mathcal{S}$  est ce que JOHNSON appelle le centralisateur du module  $M$  [9]. Nous allons d'abord expliciter quelques propriétés de  $C$  et  $C/\mathcal{S}$  :

- Si  $\varphi \in \mathcal{I}$ , l'idéal  $C\varphi$  de  $C$  contient un idempotent non nul si et seulement si  $I$  n'est pas extension essentielle de  $\text{Ker } \varphi$  :

En effet si  $I$  n'est pas extension essentielle de  $\text{Ker } \varphi$ , alors  $\text{Ker } \varphi$  est contenu dans un injectif  $J$  différent de  $I$ . Le projecteur de  $I$  sur un supplémentaire de  $J$  est un idempotent de  $C$ .

La réciproque est claire.

Ainsi l'idéal bilatère  $\mathcal{S}$  de  $C$  est l'ensemble des  $\varphi$  tels que  $C\varphi$  ne contient pas d'idempotent. Cet idéal est donc lié de manière intrinsèque à  $C$ . En outre, les idempotents de  $C$  et de  $C/\mathcal{S}$  se correspondent ; de façon précise : tout idempotent de  $C/\mathcal{S}$  se relève en un idempotent de  $C$ .

En effet, dire que l'image  $\bar{\varphi}$  de  $\varphi$  dans  $C/\mathcal{S}$  est idempotente, c'est dire que  $I$  est extension essentielle de  $\text{Ker}(\varphi - \varphi^2)$ . Mais  $\text{Ker}(\varphi - \varphi^2)$  est stable

par  $\psi$  et la restriction  $\psi'$  de  $\psi$  à  $\text{Ker}(\psi - \psi^2)$  est un projecteur. Si donc  $J_1$  et  $J_2$  sont des extensions essentielles maxima de  $\text{Ker} \psi'$  et  $\text{Im} \psi'$  dans  $I$ ,  $I$  est somme directe de  $J_1$  et  $J_2$  et  $\psi$  a même image dans  $C/\mathfrak{A}$  que la projection  $p$  de  $I$  sur  $J_2$  parallèlement à  $J_1$ ; d'où l'assertion.

De la même manière, on voit que si  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  sont des idempotents orthogonaux deux à deux de  $C/\mathfrak{A}$ , il existe des idempotents deux à deux orthogonaux de  $B$ , soit  $e_1, \dots, e_n$ , dont les images canoniques sont  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ .

Enfin si  $e$  et  $f$  sont des idempotents de  $C$ ,  $\bar{e}$  et  $\bar{f}$  leurs images dans  $\bar{C} = C/\mathfrak{A}$ , on voit facilement que les idéaux à gauche  $\bar{C}.\bar{e}$  et  $\bar{C}.\bar{f}$  sont isomorphes comme  $\bar{C}$ -modules si et seulement si les  $A$ -modules  $e.I$  et  $f.I$  sont isomorphes, donc si et seulement si les  $C$ -modules  $Ce$  et  $Cf$  sont isomorphes.

Dans l'anneau  $C/\mathfrak{A}$  tout idéal à gauche non nul contient un idempotent non nul. En fait  $C/\mathfrak{A}$  est un anneau régulier au sens de von NEUMANN (i. e. tout idéal à gauche monogène est facteur direct; ou encore  $C/\mathfrak{A}$  est un anneau semi-héréditaire et tout idéal à gauche de type fini est facteur direct). En effet si  $\psi$  est un élément de  $C$ ,  $J$  une extension essentielle maxima de  $\text{Ker} \psi$  dans  $I$  et  $p$  un projecteur de  $I$  sur un supplémentaire de  $J$  parallèlement à  $I$ , alors les images de  $\psi$  et  $p$  dans  $C/\mathfrak{A}$  engendrent le même idéal à gauche.

Telles sont les propriétés de factorisation en sommes directes de  $C$ . En fait  $C$  a aussi d'intéressantes propriétés de nature topologique:

Soit  $F$  un ensemble d'idéaux à gauche de  $C$ . On dira que  $C$  est linéairement compact pour  $F$  si  $C$  est tel que: pour toute famille  $\psi_\alpha + L_\alpha$ ,  $L_\alpha \in F$ , de classes d'équivalences de  $C$  modulo des idéaux de  $F$ , possédant la propriété d'intersection finie (i. e. toute sous-famille finie a une intersection non vide), il existe un  $\psi$  de  $B$  appartenant à chaque classe  $\psi_\alpha + L_\alpha$ .

**PROPOSITION 12.** - L'anneau  $C$  est linéairement compact pour la famille des annulateurs de  $A$ -sous-modules de  $I$ .

En effet, soit  $M_\alpha$  une famille de  $A$ -sous-modules de  $I$ ,  $L_\alpha$  l'ensemble des  $\psi$  de  $C$  tels que  $\psi(M_\alpha) = 0$ , et  $\psi_\alpha + L_\alpha$  une famille de classes d'équivalences ayant la propriété d'intersection finie. Si  $m_\alpha \in M_\alpha$  est nul sauf pour un nombre fini de  $\alpha$ , alors

$$\sum_{\alpha} \psi_\alpha(m_\alpha) = \sum_{\alpha} \psi(m_\alpha) = \psi\left(\sum_{\alpha} m_\alpha\right) = 0,$$

où  $\psi$  appartient à l'intersection des  $\psi_\alpha + L_\alpha$  tels que  $m_\alpha \neq 0$ . Ainsi la correspondance  $\sum_{\alpha} n_\alpha \rightarrow \sum_{\alpha} \psi_\alpha(n_\alpha)$  définit une application  $A$ -linéaire

de  $M = \sum_{\alpha} M_{\alpha}$  dans  $I$ . Cette application se prolonge en un endomorphisme  $\psi$  de  $I$  et  $\psi$  est congru à  $\psi_{\alpha}$  mod  $L_{\alpha}$  pour tout  $\alpha$ ,

C. Q. F. D.

En particulier, si l'on munit  $B$  de la topologie de la convergence simple,  $B$  est un anneau topologique complet.

De même  $B$  est linéairement compact pour la famille des idéaux à gauche engendrés par un idempotent et cette propriété ne fait intervenir que  $B$  et non pas  $I$ .

## 2. Anneaux réguliers injectifs.

Dans le paragraphe précédent peu de propriétés de  $I$  interviennent effectivement et l'on pourrait étudier sous quelles conditions ce qui a été dit reste valable quand on remplace  $I$  par  $M$ ,  $C$  par  $B$  et  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{A}'$  (comparer avec [1]); nous nous contenterons de remarquer que "tout reste vrai" si par exemple  $M$  est l'ensemble des éléments de  $I$  annulés par un idéal bilatère de  $B$ .

En particulier, supposons que  $M$  soit égal à l'ensemble  $\text{Hom}_C(C/\mathcal{A}', I)$  des éléments annulés par  $\mathcal{A}'$ ,  $I$  étant toujours extension essentielle de  $M$ . Alors  $B = B/\mathcal{A}' = C/\mathcal{A}'$  et  $B$  est donc linéairement compact pour la famille des idéaux à gauche engendrés par un idempotent. L'importance de ceci est due à la

PROPOSITION 13 (UTUMI [21]). - Si  $B$  est un anneau régulier au sens de von NEUMANN, les assertions suivantes sont équivalentes :

a.  $B$  est linéairement compact pour la famille des idéaux à gauche engendrés par un idempotent (qui sont facteurs directs dans  $B$ ).

b.  $B$  est un  $B$ -module à droite injectif.

(b)  $\implies$  (a) : Car alors  $B$  est l'anneau des endomorphismes d'un module injectif.

(a)  $\implies$  (b) : En effet, soit  $\mathcal{U}$  un idéal à droite de  $B$  et soit  $\psi$  une application  $B$ -linéaire de  $\mathcal{U}$  dans  $B$ . On veut montrer que  $\psi$  est de la forme  $x \rightarrow bx$ ,  $x \in \mathcal{U}$ ,  $b \in B$ .

Mais l'idéal  $\mathcal{U}$  est déterminé par les idempotents  $e_{\alpha}$  qu'il contient. De même l'application  $\psi$  est déterminée quand on se donne la famille des  $\psi(e_{\alpha})$ . Mais  $\psi(e_{\alpha})$  est de la forme  $b_{\alpha} e_{\alpha}$  ou  $b_{\alpha}$  est déterminé à un élément de  $B(1 - e_{\alpha})$  près. Si  $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n}$  sont  $r$  idempotents de  $\mathcal{U}$ , l'idéal  $e_{\alpha_1} \cdot B + \dots + e_{\alpha_n} \cdot B$  est engendré par un idempotent  $e$  et  $\psi(e)$  est de la forme  $c \cdot e$ . Autrement dit  $c$  appartient à toutes les classes d'équivalences  $B(1 - e_{\alpha_i}) + b_{\alpha_i}$  et

la famille  $B(1 - e_\alpha) + b_\alpha$  a la propriété d'intersection finie. Il existe donc  $b$  appartenant à tous les  $B(1 - e_\alpha) + b_\alpha$  et  $\psi(x) = bx$  si  $x \in u$ ,

C. Q. F. D.

Comme exemple d'anneau régulier injectif, on pourra prendre les produits infinis d'anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension infinie sur des corps gauches.

### 3. Retour à la localisation.

Nous allons donner une formule qui (avec les notations du paragraphe 1) permet de construire l'anneau  $C/S'$  sans avoir recours à l'enveloppe injective  $I$  de  $M$ . Pour cela désignons par  $E$  la famille des sous-modules  $M'$  de  $M$  tels que  $M$  soit extension essentielle de  $M'$ . Cette famille  $E$  satisfait manifestement aux conditions suivantes

a". Si  $N \supset M'$  et  $M' \in E$ , alors  $N \in E$ .

b". Si  $M' \in E$  et  $M'' \in E$ , alors  $M' \cap M'' \in E$ .

c". Si  $M' \in E$  et  $M'' \in E$  et si  $\psi: M' \rightarrow M$  est un morphisme de  $M'$  dans  $M$ , alors  $\psi^{-1}(M'') \in E$ .

Les conditions (a") et (b") font de  $E$  un filtre, et permettent de définir le groupe  $\varinjlim_{M' \in E} \text{Hom}_A(M', M)$ . La condition (c") permet manifestement de définir sur  $\varinjlim_{M' \in E} \text{Hom}_A(M', M)$  une structure d'anneau. Nous noterons par  $v$  l'application canonique de  $B = \text{Hom}_A(M, M)$  dans  $\varinjlim_{M' \in E} \text{Hom}_A(M', M)$ .

PROPOSITION 14. - Il y a un isomorphisme canonique  $w$  de l'anneau  $\varinjlim_{M' \in E} \text{Hom}_A(M', M)$  sur l'anneau  $C/S'$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \varinjlim_{M' \in E} \text{Hom}_A(M', M) \\
 & \nearrow v & \downarrow w \\
 B & & C/S' \\
 & \searrow u & 
 \end{array}$$

Nous allons exhiber l'application  $w$  et laisser le reste de la preuve pour le lecteur. Si  $\psi$  appartient à  $\text{Hom}_A(M', M)$ , alors  $\psi$  se prolonge en un endomorphisme de  $I$  qui est défini à un élément de  $S'$  près. On obtient ainsi une application de  $\text{Hom}_A(M', M)$  dans  $C/S'$ . Quand  $M'$  varie dans  $E$ , cette application induit l'application  $w$  de  $\varinjlim_{M' \in E} \text{Hom}_A(M', M)$  dans  $C/S'$ .

En particulier, si  $M = A$  comme  $A$ -module à droite,  $E$  s'identifie à la famille des idéaux à droite dont  $A$  est extension essentielle ; en outre les conditions (a"), (b"), (c") entraînent les conditions (a), (b), (c) du chapitre I, paragraphe 7.

Enfin la proposition 14 rappelle fortement la proposition 6. Pour que la ressemblance soit complète, nous ferons pour la fin de ce paragraphe l'hypothèse  $\mathcal{C}$  :

( $\mathcal{C}$ ) Si  $A$  est extension essentielle de l'idéal à droite  $\mathfrak{a}$  et si  $x \cdot \mathfrak{a} = 0$ ,  $x \in A$ , alors  $x = 0$ .

Si ( $\mathcal{C}$ ) est satisfait, je dis d'abord que la famille  $E$  satisfait à la condition (d) du chapitre I, paragraphe 7, en effet, si  $\mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{m}$  appartiennent à  $E$  et si  $\mathfrak{n}$  est un idéal à droite non nul de  $A$ , alors  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n} \neq 0$  et donc

$$(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{m} \subset (\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m}) \cap \mathfrak{n} \neq 0.$$

Autrement dit  $A$  est extension essentielle de  $\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m}$ , où  $\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m} \in E$ .

La famille d'idéaux  $E$  définit donc une localisation et l'on notera par  $A_E$  le localisé d'un  $A$ -module à droite  $M$ . Mais l'hypothèse ( $\mathcal{C}$ ) signifie que l'application canonique de  $A$  dans  $A_E$  est injective et donc que  $A_E$  s'identifie à  $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathfrak{l} \in E}} \text{Hom}_A(\mathfrak{l}, A)$  (proposition 6). Autrement dit  $A_E$  est canoniquement isomorphe au centralisateur de Johnson  $C/A^*$  de  $A$ , et est donc un anneau régulier. Enfin  $A_E$  est aussi l'ensemble des éléments  $x$  de l'enveloppe injective  $I$  de  $A$  tels que  $(A : x) \in E$ , ensemble qui n'est autre que  $I$  tout entier. On a ainsi démontré le

THÉOREME 1. - Si l'anneau  $A$  satisfait à la condition ( $\mathcal{C}$ ), la famille  $E$  des idéaux à droite dont  $A$  est extension essentielle définit une localisation ; le localisé  $A_E$  de  $A$  est un anneau régulier injectif à droite. Comme  $A$ -module à droite,  $A_E$  s'identifie à l'enveloppe injective de  $A$ .

#### 4. Exemples [9], [21], [6], [11].

Voici une liste d'exemples bizarres et moins bizarres.

a.  $A$  est un anneau tel que tout idéal à droite non nul de  $A$  contient un idempotent non nul. Il revient au même de dire que si  $a \in A$  et  $a \neq 0$ , alors il existe  $x \in A$ ,  $x \neq 0$ , tel que  $xax = x$ ; ou encore que tout idéal à gauche non nul de  $A$  contient un idempotent non nul. Ceci a lieu si  $A$  est un anneau régulier au sens de von NEUMANN.

Alors la condition ( $\mathcal{C}$ ) est satisfaite, car si  $x \cdot \mathfrak{a} = 0$ ,  $\mathfrak{a}$  annule l'idéal à gauche  $Ax$  et donc l'idéal à gauche  $Ae$ , où  $e$  est un idempotent contenu dans  $Ax$ . Autrement dit  $\mathfrak{a}$  est contenu dans  $(1 - e)A$  ce qui n'est possible que si  $e = 0$  ou si  $A$  n'est pas extension essentielle de  $\mathfrak{a}$ .

On voit en particulier que tout anneau régulier au sens de von NEUMANN se plonge dans un anneau régulier injectif.

b. Soit  $A$  un anneau primitif avec socle (autrement dit  $A$  contient un idéal à droite minimal et fidèle ; ceci est le cas si  $A$  est l'anneau des endomorphismes continus d'un espace vectoriel topologique). Les idéaux à droite minimaux de  $A$  engendrent alors un idéal bilatère  $S$  de  $A$ , le socle de  $A$ . Si  $\mathfrak{I}$  est un idéal à droite arbitraire de  $A$ , alors  $\mathfrak{I} \cdot S$  est contenu dans  $\mathfrak{I} \cap S$  et n'est pas nul si  $\mathfrak{I}$  n'est pas nul. Autrement dit  $A$  est extension essentielle d'un idéal à droite  $\mathfrak{m}$  de  $A$  si et seulement si  $\mathfrak{m}$  contient  $S$ . En outre la condition  $(\mathcal{C})$  est satisfaite et la proposition 6 montre que le localisé  $A_E$  de  $A$  n'est autre que  $\text{Hom}_A(S, A) = \text{Hom}_A(S, S)$ .

Ainsi  $A_E$  est l'anneau des endomorphismes du socle de  $A$  qui n'est autre que le bicommutant d'un module simple.

c. Tout anneau intègre ou quasi-simple (il n'y a pas d'idéal bilatère différent de  $0$  et de l'anneau) se plonge dans un anneau régulier injectif. Nous allons voir que si  $A$  est soumis à des conditions noethériennes l'anneau régulier injectif est en fait un corps gauche ou un anneau simple.

d. L'exemple de GOLDIE [6], [11].

THÉORÈME 2. (GOLDIE-LESIEUR-CROISOT). - Soit  $A$  un anneau avec élément unité satisfaisant aux conditions suivantes.

a.  $(0)$  est un idéal bilatère premier de  $A$  (si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux idéaux bilatères non nuls, alors  $\alpha \cdot \beta$  n'est pas nul).

b. Les idéaux à droite de la forme  $(0 : a) = \{x \mid x \in A, ax = 0\}$  satisfont à la condition des chaînes ascendantes.

c.  $A$  ne contient pas de sommes directes infinies d'idéaux à droite.

Alors l'anneau  $A$  satisfait à la condition  $(\mathcal{C})$  et le localisé  $A_E$  de  $A$  est un anneau simple. En outre si  $S$  désigne le système multiplicativement stable des éléments réguliers de  $A$ , alors  $A$  admet un anneau de fractions à droite pour  $S$  qui s'identifie à  $A_E$ .

Montrons d'abord que  $A$  satisfait à la condition  $(\mathcal{C})$ . Il s'agit de montrer que si  $a \neq 0$ , il existe un  $b$  non nul dans  $A$  tel que  $bA \cap (0 : a) = 0$ .

Autrement dit  $abx = 0$  doit entraîner  $bx = 0$  ou encore  $(0 : ab) \subset (0 : b)$ .

Prenant  $c$  tel que  $(0 : c)$  soit maximal, il existe  $d$  tel que  $adc \neq 0$ , car  $(0)$  est un idéal bilatère premier. Il suffit alors de choisir  $b = dc$ ,

C. Q. F. D.

La condition  $(\mathcal{C})$  est donc satisfaite et  $A_E$  est un anneau régulier injectif.

Si  $A_E$  contenait des familles infinies d'idempotents orthogonaux deux à deux,  $A$  contiendrait des sommes infinies d'idéaux à droite : donc  $A_E$  est semi-simple ; enfin les idéaux bilatères de  $A_E$  coupent  $A$  suivant des idéaux bilatères et (0) ne peut être premier dans  $A$  que s'il l'est aussi dans  $A_E$  ; l'anneau  $A_E$  est donc simple.

Il reste à démontrer la dernière assertion. Si  $s \in A$  est régulier à gauche (i. e.  $sx = 0 \implies x = 0$ ), l'homothétie  $x \rightarrow sx$  est un endomorphisme injectif de  $A$  et donc aussi de  $A_E$  (qui est extension essentielle de  $A$ ). Cette homothétie est par conséquent un automorphisme de  $A_E$  et est inversible dans  $A_E$  ; en particulier  $s$  est régulier à droite dans  $A$  (i. e.  $xs = 0 \implies x = 0$ ). Ainsi  $S$  est formé des éléments réguliers à gauche de  $A$ .

Pour que la démonstration soit complète, il suffit de montrer, d'après le chapitre I, que :

$\Omega \in E \iff \Omega$  contient un  $s \in S$  (ou  $\Omega$  est un idéal à droite de  $A$ ).

$\Leftarrow$ : C'est immédiat, car l'idéal à droite de  $A_E$  engendré par  $s$  est  $A_E$ .

$\Rightarrow$ : Soit  $n$  la longueur de  $A_E$  comme  $A_E$ -module. Si  $a$  appartient à  $A_E$  et si  $\varphi_a$  désigne l'homothétie  $x \rightarrow ax$ , on remarque d'abord que  $\text{Ker } \varphi_a$  et  $\text{Im } \varphi_a$  sont facteurs directs dans  $B$  et satisfont à l'égalité sur les longueurs :

$$\ell(\text{Ker } \varphi_a) + \ell(\text{Im } \varphi_a) = n.$$

Soit maintenant  $\Omega$  un idéal à droite tel que  $A$  soit extension essentielle de  $\Omega$  et soit

$$A_E = e_1 A_E \oplus \dots \oplus e_n A_E$$

une décomposition de  $A$  en idéaux simples ( $e_i$  idempotent). Il suffit de construire un  $s \in \Omega$  tel que  $\text{Im } \varphi_s$  rencontre  $e_1 A_E, \dots, e_n A_E$ .

Or il existe  $a_1$  tel que  $e_1 a_1$  soit différent de 0 et  $e_1 a_1 \in \Omega$ . Alors  $\Omega_1 = e_1 A_E \cap \Omega \neq 0$  et  $\ell(\text{Ker } \varphi_{e_1 a_1}) = n - 1$ .

De même  $\Omega_2 = e_2 A_E \cap \Omega \neq 0$  et  $\Omega_2 \cdot \text{Ker } \varphi_{e_1 a_1} \cap \Omega_2 \cdot (\text{Ker } \varphi_{e_1 a_1} \cap A) \neq 0$ , car (0) est premier. Il existe donc  $a_2$  tel que  $e_2 a_2 \in \Omega_2$  et que  $\text{Ker } \varphi_{e_2 a_2} \not\subset \text{Ker } \varphi_{e_1 a_1}$ . D'où  $\ell(\text{Ker } \varphi_{e_1 a_1} \cap \text{Ker } \varphi_{e_2 a_2}) = n - 2$ .

Et ainsi de suite on construit  $a_1, \dots, a_n$ , tels que  $e_i a_i \in \Omega$  et que

$$\text{Im } \varphi_{e_i a_i} = e_i A, \quad \text{Ker } \varphi_{e_1 a_1} \cap \dots \cap \text{Ker } \varphi_{e_n a_n} = 0$$

Alors  $s = e_1 a_1 + \dots + e_n a_n$  est manifestement régulier.

### 5. Quelques conséquences du théorème de Goldie-Lesieur-Croisot.

Nous supposerons à partir de maintenant que  $A$  est un anneau noethérien à droite et que  $\mathfrak{p}$  est un idéal bilatère premier de  $A$ . Alors l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  satisfait aux conditions du théorème 2, et est donc contenu dans un anneau simple  $A^*$  qui est extension essentielle de  $A/\mathfrak{p}$  comme module à droite. En outre l'enveloppe injective  $I$  de  $A/\mathfrak{p}$  comme  $A$ -module à droite contient  $A^*$  et  $A^*$  s'identifie à l'ensemble des éléments de  $I$  annulés par  $\mathfrak{p}$ . Si l'on emploie les notations du paragraphe 1 et si  $M = A/\mathfrak{p}$ , alors  $B = E/\mathfrak{p}' = A/\mathfrak{p}$  et  $C/\mathfrak{p}'' = A^*$ .

Les idéaux à droite de  $A/\mathfrak{p}$  qui sont des annulateurs correspondent biunivoquement aux idéaux à droite de  $A^*$ . On en déduit que tout  $A$ -sous-module à droite non nul de  $A^*$  engendre la même sous-catégorie localisante de  $A$ -modules que  $A/\mathfrak{p}$  (car  $\mathfrak{p}$  est intersection finie d'annulateurs d'éléments d'un tel sous-module). En particulier si les injectifs indécomposables correspondent biunivoquement aux idéaux bilatères premiers de  $A$ , toute sous-catégorie localisante  $\underline{D}$  de  $A$ -modules à droite est caractérisée par les  $A$ -modules du type  $A/\mathfrak{p}$  qu'elle contient. On peut alors définir le spectre premier de  $A$  comme l'ensemble de ses idéaux bilatères premiers et munir ce spectre de la topologie de Zariski. De cette manière, on retrouve la correspondance entre les sous-catégories localisantes et les sous-ensembles du spectre qui sont réunion de fermés.

Tout cela se simplifie beaucoup quand  $A$  est un module noethérien sur son centre. Les phénomènes nouveaux qui apparaissent dans ce cas sont liés à la structure des injectifs et à un théorème de dualité qui généralise la dualité de MACAULAY-MATLIS [12], [5]. Nous n'avons pas le temps d'exposer cela ici, et nous nous contenterons de donner un exemple frappant d'anneau artinien. En particulier, on verra que si  $\mathfrak{p}$  est un idéal bilatère non nul de  $A$ , il n'existe pas toujours de foncteur localisation qui fasse de  $\mathfrak{p}$  un idéal bilatère maximum du localisé de  $A$ .

### 6. Exemple : modules sur l'anneau des matrices triangulaires.

Soient  $k$  un corps et  $T = T_n(k)$  le sous-anneau de  $M_n(k)$  formé des matrices triangulaires. Nous allons nous intéresser aux modules à gauche sur  $T$ .

L'anneau  $T$  est formé de matrices  $A$  de la forme :



$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_1 \end{pmatrix}$$

Le radical  $\mathfrak{r}$  est formé des matrices "dont la diagonale est nulle" :

$$a_1 = b_1 = \dots = t_1 = 0 .$$

L'anneau  $T/\mathfrak{r}$  est un produit de  $n$  corps isomorphes à  $k$  et les matrices diagonales forment un sous-anneau qui s'identifie à  $T/\mathfrak{r}$  par l'application canonique de  $T$  sur  $T/\mathfrak{r}$  ("sous-anneau de Cohen").

Les idéaux maximaux de  $T$  sont en évidence sur la représentation matricielle ; les modules simples sont isomorphes à  $k$  comme groupes abéliens, la multiplication par  $A$  se réduisant respectivement à celle par  $a_1, b_1, \dots, t_1$  : on notera les modules simples par  $S_1, \dots, S_n$ .

Soit  $E_i$  la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la case  $(i, i)$  qui vaut 1. La matrice  $E_i$  est idempotente, et  $TE_i$  est facteur direct dans  $T$ . C'est l'idéal à gauche fermé des matrices triangulaires dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la  $i$ -ième colonne :

-  $TE_1 = P_1$  est simple et isomorphe à  $S_1$ .

- ...

-  $TE_i = P_i$  est un module à gauche projectif de longueur  $i$  ; il ne possède qu'un seul sous-module de longueur  $i - 1$  et ce sous-module est isomorphe à  $TE_{i-1} = P_{i-1}$ .

- ...

-  $TE_n = P_n$  a pour longueur  $n$  et possède une seule suite de Jordan-Hölder. Les sous-modules de  $P_n$  sont isomorphes aux  $P_i$ . En particulier, comme les  $P_i$  sont les seuls projectifs indécomposables et que tout sous-module d'un projectif indécomposable est projectif, l'anneau  $T = T_n(k)$  est héréditaire. On considérera que  $P_n$  est un drapeau de  $k$ -espaces vectoriels et que  $T$  est l'anneau des endomorphismes de ce drapeau. Le commutant du  $T$ -module  $P_n$  est  $k$  et le bicommutant est  $M_n(k)$ .

En fait  $P_n$  est aussi un  $T$ -module injectif et tous les quotients de  $P_n$

sont injectifs car  $T$  est héréditaire : on obtient de cette manière tous les injectifs indécomposables, et on notera par  $I_k$  l'injectif indécomposable dont le socle est  $S_k$ .

Soit maintenant  $M$  un  $T$ -module arbitraire : si deux sous-modules  $M'$  et  $M''$  de  $M$  sont injectifs, la somme  $M' + M''$  qui est un quotient de  $M' \oplus M''$  est un module injectif ; le module  $M$  contient donc un sous-module injectif maximum  $I$ , et  $M = I \oplus N$ , où  $N$  ne contient aucun sous-module injectif.

Je dis qu'alors aucune suite de composition de  $N$  ne possède de quotient isomorphe à  $S_n$ . Car si  $N_1 \subset N_2 \subset N$ , avec  $N_2/N_1 = S_n$ , alors  $N_2/rN_2$  contient un facteur isomorphe à  $S_n$ , et l'enveloppe projective de  $N_2$  a  $P_n$  en facteur direct. Autrement dit  $N_2$  contient un quotient de  $P_n$ , donc un injectif : contradiction.

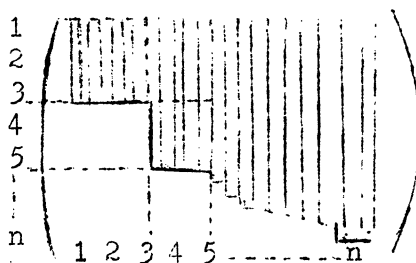
Autrement dit  $N$  appartient à la catégorie des  $T$ -modules dont aucune suite de composition n'a de quotient isomorphe à  $S_n$ . L'étude de cette catégorie  $\mathcal{C}$  peut se faire directement, ou bien à l'aide de la remarque suivante :

Le module  $N$  appartient à  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $E_n N = 0$ , donc si c'est un module sur l'anneau quotient  $T_n/T_n E_n \approx T_{n-1}$ . D'où par récurrence sur  $n$  le résultat que voici :

Tout  $T_n(k)$ -module à gauche est somme directe de modules indécomposables. Tout indécomposable est déterminé par la donnée de son enveloppe injective et projective. C'est le quotient d'un sous-module de  $P_n$ .

On connaît donc tous les objets de la catégorie  $\mathcal{C}$  des  $T$ -modules. Aussi la localisation est-elle particulièrement agréable.

Soit  $\mathcal{D}$  une sous-catégorie localisante de  $\mathcal{C}$ . Elle est engendrée par des modules simples (par exemple  $S_2, S_3, S_5$ ). Alors le plus petit idéal à gauche  $\mathcal{A}$  tel que  $T/\mathcal{A} \in \mathcal{D}$  est un idéal bilatère. En outre comme l'anneau  $T$  est héréditaire, le foncteur localisation n'est autre que  $M \mapsto \text{Hom}_T(\mathcal{A}, M)$  (corollaire 1 de la proposition 6). Tous les foncteurs localisation sont donc exacts. Dans l'exemple choisi,  $T_{\mathcal{D}}$  n'est autre que l'anneau des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la zone hachurée :



En outre  $T$  se plonge dans  $T_D$  de la façon naturelle, c'est-à-dire en associant à toute matrice de  $T$  la "même" matrice de  $T_D$ .

L'exemple de  $T_n(k)$  a le "désavantage" de toujours fournir des foncteurs localisation exacts. De même les conditions du corollaire 1 de la proposition 6 sont toujours satisfaites. Pour un contre-exemple à ce corollaire, on peut choisir la catégorie des modules sur l'anneau des endomorphismes du groupe abélien  $\mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(p^2)$ . Nous ne détaillons pas les calculs...

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] AZUMAYA (Gorô). - On generalized semi-primary rings and Krull-Remak-Schmidt's theorem, Jap. J. Math., t. 19, 1944-48, p. 525-547.
- [2] CARTAN (Henri). - Homologie et cohomologie d'une algèbre graduée, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 15.
- [3] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1, 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1954.
- [4] EILENBERG (Samuel). - Homological dimension and syzygies, Annals of Math., Series 2, t. 64, 1956, p. 328-336.
- [5] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 12, 1958/59 : Algèbre et Théorie des nombres, n° 17.
- [6] GOLDIE (A. W.). - The structure of prime rings, under ascending chain conditions, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 8, 1958, p. 589-608.
- [7] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.
- [8] GROTHENDIECK (Alexander). - Cohomology theory of abstract algebraic varieties, Congrès international des Mathématiciens [1958. Edimbourg].
- [9] JOHNSON (R. E.). - The extended centralizer of a ring over a module, Proc. Amer. math. Soc., t. 2, 1951, p. 891-896.
- [10] LEPTIN (Horst). - Linear kompakte Moduln und Ringe, Math. Z., t. 62, 1955, p. 241-267.
- [11] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Structure des anneaux premiers noethériens à gauche, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 2545-2547.
- [12] MATLIS (Eben). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., t. 8, 1958, p. 511-528.
- [13] REES (D.). - A theorem of homological algebra, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 52, 1956, p. 605-610.
- [14] REES (D.). - Polar modules, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 53, 1957, p. 554-567.
- [15] Séminaire CHEVALLEY, t. 3, 1958/59 : Variétés abéliennes et variétés de Picard.
- [16] SERRE (Jean-Pierre). - Sur l'homologie des espaces fibrés et les groupes d'homotopie, Cours professé à Princeton, 1952, multigr.
- [17] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

- [18] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale, Multiplicités, Cours professé au Collège de France, 1957/58, multigr.
- [19] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proc. Intern. Symp. on algebraic number theory [1955. Tokyo and Nikko], p. 175-189. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956.
- [20] SHIH Weishu. - Ensembles simpliciaux et opérations cohomologiques, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires secondaires, n° 7.
- [21] UTUMI (Yuzo). - On quotient rings, Osaka math. J., t. 8, 1956, p. 1-18.
-