Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

von László Fuchs

Strukturfragen in der Theorie der Abeischen Gruppen

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, nº 2 (1958-1959), exp. nº 25, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_2_A8_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1958/59
-:-:-:-

4 mai 1959

STRUKTURFRAGEN IN DER THEORIE DER ABELSCHEN GRUPPEN

von László FUCHS.

Obwohl die Theorie der abelschen Gruppen in den letzten Jahrzehnten grosse Fortschritte gemacht hat und eine der entwickeltesten Disziplinen der modernen Algebra geworden ist, hat man in den allerwichtigsten Problemenkreis : in der Charakterisierung der untersuchten Gruppen mittels vernünftiger Invarianten, nur in wenigen Fällen vollständige Resultate erzielt. Zweck dieses Vortrags ist, eine kurze Übersicht des heutigen Standes der Strukturtheorie der abelschen Gruppen zu bieten und diejenigen Probleme hervorzuheben, deren Lösung als die nächsten Ziele der Theorie angesehen werden kann.

Das Muster aller Struktursätze ist der Hauptsatz der endlichen abelschen Gruppen (1): Jede endliche abelsche Gruppe lässt sich als direkte Summen von endlich vielen endlichen zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnungen darstellen, wobei die Ordnungen der Summanden eindeutig bestimmt sind (und beliebig vorgeschrieben werden können).

Ein jeder Struktursatz lässt sich prinzipiell in zwei verschiedenen Richtungen verallgemeinern :

1° die direkte Richtung ist das eigentliche Strukturproblem : zu je allgemeineren Klassen von Gruppen den dem ursprünglichen Struktursatze entsprechenden allgemeineren Satz zu finden [Zum Beispiel (z. B.) die p-Gruppen (2) mittels Invarianten zu charakterisieren] ;

2° die indirekte Richtung : zu einer passenden verallgemeinerten Form des ursprünglichen Struktursatzes diejenige Gruppenklasse zu bestimmen, deren Gruppen diese Struktur besitzen [z. B. die als direkte Summen zyklischer Gruppen darstellbaren Gruppen zu charakterisieren].

---

(1) Wir wählen die Addition als Gruppenoperation.

(2) Eine Gruppe heisst : p-Gruppe (p = Primzahl), wenn die Ordnung eines beliebigen Elements der Gruppe eine Potenz von p ist ; Torsionsgruppe, wenn sie nur Elemente von endlicher Ordnung enthält ; torsionsfreie Gruppe, wenn ausser dem neutralen Element 0 alle Elemente von unendlichen Ordnungen sind ; gemischte Gruppe, wenn sie weder eine Torsionsgruppe noch torsionsfrei ist.

Bei dem direkten Problem suchen wir also zu einer gegebenen Gruppenklasse den Struktursatz, während bei dem indirekten die Gruppen mit vorgeschriebener Struktur gesucht werden.

Vor allem ist es wünschenswert, klarzustellen, was unter einem befriedigenden Struktursatz zu verstehen ist. Man fordert drei Eigenschaften :

E_1. Jedem Mitglied der betrachteten Gruppenklasse soll ein bestimmtes Schema (das heisst (d. h.) ein Invariantensystem) zugeordnet werden, das aus Kardinal- und Ordinalzahlen (oder eventuell aus anderen, einfachen, wohlbekannten Grössen) besteht. [Z. B. eine Menge, wohlgeordnete Folge oder Matrix von solchen Grössen].

E_2. Isomorphen Gruppen soll dasselbe Schema entsprechen.

E_3. Es soll eine Methode vorgeschrieben sein, mittels deren aus dem Schema und aus bekannten Gruppen von einfacher und bekannter Struktur eine, bis auf Isomorphie eindeutig (3) bestimmte Gruppe konstruiert werden kann, deren zugeordnetes Schema das vorgeschriebene ist. [Z. B. : die bekannten Gruppen sind die zyklischen und quasizyklischen (4) und die Methode ist die Bildung der direkten Summe].

[Bei den endlichen abelschen Gruppen ist z. B. das Schema die Menge der (Primzahlpotenz)-Ordnungen der zyklischen Summanden, und die Methode ist die Bildung der direkten Summe von zyklischen Gruppen mit den in der Menge vorkommenden Primzahlpotenzen als Ordnungen].

In dem erklärten starken Sinne gibt es nur sehr wenige Struktursätze in der Theorie der abelschen Gruppen. In einigen Fällen konnte man bisher nur solche Sätze beweisen, die diesen drei Bedingungen nur zum Teil genügen. Das schwerste ist, die Eindeutigkeit des zugeordneten Schemas zu sichern, i. a. kann bloss eine Äquivalenzrelation zwischen Schemas eingeführt werden, so dass zwei Gruppen genau dann isomorph sind, wenn die zugeordneten Schemas äquivalent sind. Ist diese Äquivalenz der Schemas leicht zu entscheiden [siehe z. B. unten (7°)], so sind diese Schemas als befriedigend anzusehen. I. a. ist aber diese Äquivalenzrelation so kompliziert, dass die Äquivalenz von zwei Schemas zu entscheiden keineswegs leichter ist, als die Isomorphie der Gruppen selbst nachzuprüfen. Dann bieten die Schemas selbstverständlich keinen Struktursatz.

---

(3) Diese Eindeutigkeitsforderung sichert die Vollständigkeit des Invariantensystems.

(4) Unter einer quasizyklischen (oder Prüferschen) Gruppe versteht man eine p-Gruppe, die der Gruppe aller p-ten, p^2-ten , ... komplexen Einheitswurzeln isomorph ist.

Für die folgenden Klassen von abelschen Gruppen ist ein vernünftiger Struktursatz bekannt.

1. Die endlich erzeugbaren Gruppen (oder Gruppen mit Maximalbedingung für Untergruppen). Diese sind zerlegbar in direkte Summen endlich vieler unendlicher und endlicher zyklischer Gruppen (von Primzahlpotenzordnungen), wobei die Ordnungen eindeutig bestimmt sind. Das zugeordnete Schema ist die Menge

$$(n \; ; \; p_1^{\mathfrak{k}_1} \; , \; \ldots \; , \; p_k^{\mathfrak{k}_k}) \; ,$$

wo n (= nichtnegative ganze Zahl) die Anzahl der unendlichen und die $p_i^{\mathfrak{k}_i}$ die Ordnungen der endlichen zyklischen Komponenten bedeuten.

2. Freie abelsche Gruppen sind direkte Summen unendlicher zyklischer Gruppen, wo die Anzahl $\mathfrak{m}$ der Komponenten (= der Rang der Gruppe) nur von der Gruppe abhängt. Das Schema besteht aus einer einzigen Kardinalzahl : $\mathfrak{m}$.

3. Beschränkte Gruppen (wo also die Ordnungen der Elemente unterhalb einer festen endlichen Schranke bleiben) können als direkte Summen zyklischer Gruppen von beschränkter Ordnung dargestellt werden. Das zugeordnete Schema ist eine endliche Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{m}_{11} & \mathfrak{m}_{12} & \cdots & \mathfrak{m}_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{m}_{n1} & \mathfrak{m}_{n2} & \cdots & \mathfrak{m}_{nk} \end{pmatrix}$$

wo die Kardinalzahl $\mathfrak{m}_{ij}$ die Anzahl der zyklischen direkten Summanden von der Ordnung p_i^j bedeutet (p_i = die i-te Primzahl).

4. Vollständige (oder teilbare) Gruppen (wo für jede natürliche Zahl n und für jedes Gruppenelement a die Gleichung $nx = a$ eine Lösung x in der Gruppe besitzt). Diese können in direkte Summen von quasizyklischen und vollen rationalen Gruppen ([5]) zerlegt werden, wo die Anzahl $\mathfrak{m}_0$ der vollen rationalen Komponenten un die Anzahl $\mathfrak{m}_i$ der quasizyklischen p_i-Gruppen ($i = 1 , 2 , \ldots$) eindeutig bestimmt sind. Das zugeordnete Schema ist also die geordnete Folge von Kardinalzahlen :

([5]) Die additive Gruppe aller rationalen Zahlen nennen wir volle rationale Gruppe, ihre Untergruppen rationale Gruppen schlechthin.

$$\mathfrak{m}_0 , \mathfrak{m}_1 , \mathfrak{m}_2 , \ldots , \mathfrak{m}_i , \ldots$$

In den Fällen 1-4 war die zugeordnete Methode die Bildung einer direkten Summe.

5. Abzählbare p-Gruppen. - Nach der Theorie von Prüfer-Ulm-Zippin lässt sich jeder abzählbaren p-Gruppe G eine Matrix

$$\begin{pmatrix} n_{01} & n_{02} & \ldots & n_{0k} & \ldots \\ n_{11} & n_{12} & \ldots & n_{1k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n_{\alpha 1} & n_{\alpha 2} & \ldots & n_{\alpha k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

mit (höchstens) abzählbar vielen Zeilen und Spalten zuordnen, wo die Elemente der Spalten nach einem (höchstens) abzählbaren Typus τ (= Ordinalzahl) und die Elemente der Zeilen nach dem Typus der natürlichen Zahlen geordnet sind. In der α -ten Zeile ist das k-te Element $n_{\alpha k}$ eine nicht-negative ganze Zahl oder $\aleph_0$ und zeigt die Anzahl der zyklischen direkten Summanden der Ordnung p^k in einer direkten Zerlegung des α -schen Ulmschen Faktors (6) von G . In jeder Zeile (eventuell mit Ausnahme der letzten, falls diese vorhanden ist) gibt es unendlich viele $n_{\alpha k} \neq 0$. Nach den Sätzen von Prüfer-Ulm-Zippin, auf die wir hier nicht näher eingehen werden, sind diese Matrizen die gesuchten Schemas.

6. Geschlossene p-Gruppen. - Diese entstehen folgendermassen : für jedes i (= 1 , 2 , ...) nehmen wir eine beliebige Kardinalzahl $\mathfrak{m}_i$ und die direkte Summe B_i von $\mathfrak{m}_i$ zyklischen Gruppen der Ordnung p^i ; die maximale Torsionsuntergruppe der vollständigen direkten Summe (7) der B_i ist eine geschlossene p-Gruppe (8). Das zugeordnete Schema ist die geordnete Folge $\mathfrak{m}_1 , \ldots , \mathfrak{m}_i , \ldots$ (die $\mathfrak{m}_i$ sind durch die Gruppe eindeutig bestimmt).

---

(6) Für die Einzelheiten, sei z. B. : KAPLANSKY (Irving). - Infinite abelian groups. - Ann Arbor, University of Michigan Press, 1954 ; oder KUROSH (A. G.). - Theory of groups, t. 1-2. - New York, Chelsea Publishing Company, 1955-1956 ; oder FUCHS (László) . - Abelian groups.

(7) Die (diskrete) direkte Summe von unendlich vielen Gruppen besteht aus Vektoren mit einer Komponente aus jeder Gruppe, so dass nur endlich viele Komponenten eines Vektors von 0 verschieden sind, während bei der vollständigen direkten Summe alle Vektoren zugelassen sind.

(8) Diese Gruppen können auch mittels Konvergenz von Fundamentalfolgen definiert werden.

7. Torsionsfreie Gruppen vom Range 1, d. h. rationale Gruppen. Jedem Element a ($\neq 0$) ordnen wir eine Folge $(k_1, \ldots, k_i, \ldots)$ zu ($k_i = 0, 1, \ldots$ oder ∞) so dass k_i die grösste Zahl k bedeutet, für die die Gleichung $p_i^k x = a$ mit der i-ten Primzahl p_i lösbar ist ; gibt es kein grösstes k, so setzt man $k_i = \infty$. Die Folge hängt noch von der Wahl von a ab ; betrachtet man aber zwei Folgen äquivalent, wenn sie nur in endlich vielen Stellen, die nicht ∞ sind, voneinander verschieden sind, so können wir die Äquivalenzklassen als Schemas betrachten.

Wenn man versucht, diese Struktursätze auf beliebige abelsche Gruppen zu verallgemeinern, so stösst man auf riesige Schwierigkeiten. Bei dem heutigen Stand der Theorie kann nicht gehofft werden, dass die zur Verfügung stehenden Methoden hinreichen, einen allgemeinen Struktursatz zu gewinnen. In gewissen einfacheren Fällen können wir aber hoffen, einen vernünftigen Struktursatz zu finden. Einige solche Fälle seien im folgenden erwähnt.

A. p-Gruppen ohne Elemente $\neq 0$ von unendlicher Höhe (9). Es sei G eine solche Gruppe, B eine ihrer Basisuntergruppen und $\overline{B}$ die zugehörige geschlossene p-Gruppe. Dann kann G als eine reine Untergruppe von $\overline{B}$ aufgefasst werden, die B enthält :

$$(*) \qquad B \subseteq G \subseteq \overline{B}, \quad G \text{ ist rein in } \overline{B}.$$

Das Problem besteht in der Aufsuchung der nichtisomorphen G mit der Eigenschaft (*) bei festem B. Neulich hat H. LEPTIN bewiesen, dass zwei, der Bedingung (*) genügende Gruppen G_1, G_2 mit derselben Basisuntergruppe B genau dann isomorph sind, wenn es einen Automorphismus von $\overline{B}$ gibt, der G_1 auf G_2 abbildet. Obwohl die Automorphismen einer geschlossenen p-Gruppe leicht zu charakterisieren sind, gestattet dieser interassante Satz auch nur eine schwer entscheidbare Äquivalenzrelation zwischen den G mit (*).

---

(9) Ein Element a der p-Gruppe G heisst von unendlicher Höhe, wenn für jedes natürliche k die Gleichung $p^k x = a$ eine Lösung in G besitzt. Eine Untergruppe B einer beliebigen p-Gruppe G heisst Basisuntergruppe, wenn : 1. sie ist direkte Summe von zyklischen Gruppen ; 2. sie ist rein in dem Sinne, dass aus der Lösbarkeit einer Gleichung $p^k x = a$ $(a \in B)$ in G die Lösbarkeit in B folgt ; 3. die Faktorgruppe G/B ist vollständig. Nach einem bekannten Satz von Kulikov besitzt jede p-Gruppe Basisuntergruppen und diese sind einander isomorph. Schreibt man B als direkte Summe von Untergruppen B_i, wo B_i direkte Summen von m_i zyklischen Gruppen derselben Ordnung p^i sind, so sind m_i Invarianten von G.

B. p-Gruppen vom Typ 2 mit Ulmschen Faktoren, die direkte Summen zyklischer Gruppen sind [10]. - Es sei G eine p-Gruppe vom Typ 2 und G_0, G_1 ihre Ulmschen Faktoren, die Zyklensummen seien. Sind G_0 und G_1 beide abzählbar, so ist G durch G_0 und G_1 eindeutig bestimmt (nach dem Satz von Ulm). Sind sie aber nicht beide abzählbar, so weiss man gar nichts von den Gruppen mit denselben Ulmschen Faktoren G_0 und G_1. Es ist wahrscheinlich, dass diese nicht alle isomorph sind, doch kenne ich kein Gegenbeispiel. Das Problem ist also : für p-Gruppen vom Typ 2 mit gegebenen Zyklensummen G_0, G_1 als Ulmschen Faktoren das zugehörige Schema zu finden.

C. Tordionsfreie Gruppen vom Range 2 [11]. - Für torsionsfreie Gruppen endlichen Ranges wurde eine Theorie durch KUROSCH, MAL'CEV und DERRY aufgestellt, diese bietet aber keinen Struktursatz im obigen scharfen Sinne, da es sich um eine komplizierte Äquivalenzrelation von Matrizenfolgen handelt. Neulich hat M. O. CAMPBELL eine Klassifikation der abzählbaren torsionsfreien Gruppen ausgearbeitet, ich kenne aber seine Methode nicht. Die subdirekten Summen scheinen ein geeignetes Hilfsmittel zur Untersuchung der torsionsfreien Gruppen vom Range 2 darzubieten.

Ist G eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, so ist sie eine subdirekte Summe von zwei Gruppen A, B vom Range 1. G entsteht also aus A und B so, dass man alle Paare (a , b) $(a \in A , b \in B)$ nimmt mit der Eigenschaft, dass a und b bei zwei festen Homomorphismen von A beziehungsweise (bzw.) B auf dieselbe Gruppe F dasselbe Bild besitzen. Bezeichnen A_0 und B_0 die Kerne dieser Homomorphismen, so gilt [12] :

$$A \dotplus B \supseteq G \supseteq A_0 \dotplus B_0 , \quad A/A_0 \cong B/B_0 \cong F \cong (A + B)/G \cong G/(A_0 + B_0) .$$

Die Gruppe G bestimmt aber nicht eindeutig die Gruppen A, B, A_0, B_0, F, auch nicht bis auf Isomorphie. Wir zeigen nun, wie man eine (i. a. keine subdirekte) Darstellung mit eindeutigen Komponenten definieren kann.

---

(10) Die Elemente von unendlicher Höhe bilden in einer p-Gruppe G eine Untergruppe G_1, und G ist vom Typ 2, wenn G_1 ausser 0 kein Element besitzt, das auch in G_1 von unendlicher Höhe ist. $G_0 = G/G_1$.

(11) Die Anzahl der linear unabhängigen Elemente heisst der Rang.

(12) $A \dotplus B$ bedeutet die direkte Summe der Gruppen A und B. Wir werden mit $\sum^{*} A_\lambda$ die vollständige direkte Summe der Gruppen A_λ bezeichnen.

Zuerst betten wir G in die direkte Summe D von zwei vollen rationalen Gruppen ein ; dann können wir A und B als Untergruppen von D auffassen. Nehmen wir nun alle möglichen Darstellungen von G als subdirekte Summen von Gruppen A, B von Range 1, so sind die Vereinigung V aller $A + B$ und der Durchschnitt U aller $A_0 + B_0$ Untergruppen von D. V und U sind homogen in dem Sinne, dass sie direkte Summen von zwei isomorphen Gruppen des Ranges 1 sind, und es gelten wie oben :

$$V = V_1 + V_2 \supseteq G \supseteq U_1 + U_2 = U \quad ,$$

$$V_1/U_1 \cong V_2/U_2 \cong F' \cong V/G \cong G/U \quad \text{mit} \quad V_1 \cong V_2 \, , \quad U_1 \cong U_2 \quad .$$

U, V, und F' sind nun durch G eindeutig bestimmt (13). Umgekehrt entsteht G aus diesen Gruppen so, dass wir eine Zwischengruppe $V \supseteq G \supseteq U$ mit $V/G \cong G/U \cong F'$ auswählen. Zwei solche Zwischengruppen G_1 und G_2 sind genau dann isomorph, wenn ein Automorphismus von V existiert, der G_1 auf G_2 und U auf sich selbst abbildet. Diese Automorphismen können mittels 2×2-Matrizen mit rationalen Elementen dargestellt werden, und dann ergibt sich das Isomorphieproblem als Äquivalenzproblem. Diese Äquivalenz lässt sich nicht so sehr schwer entscheiden, doch wäre es wünschenswert, eine noch einfachere Klassifikation anzugeben.

D. <u>Abzählbare gemischte Gruppen von torsionsfreiem Rang</u> 1 (14). – Ist G eine solche Gruppe und T ihre maximale Torsionsuntergruppe, so ist die Struktur sowohl von T (nach PRÜFER-ÜLM-ZIPPIN) als auch von G/T (torsionsfrei vom Range 1) bekannt. Das Problem besteht also darin, wie man die verschiedenen Arten der Zusammensetzungen von T und G/T zu nicht-isomorphen Gruppen G charakterisieren kann. [Bekanntlich gibt es unter den Erweiterungen von T durch G/T kontinuierlich viele, im Sinne der Schreierschen Erweiterungstheorie nichtäquivalente Gruppen G]. Die Resultate von KAPLANSKY und MACKEY, bzw. KULIKOV beziehen sich nur auf einen Spezialfall, i. a. ist das Problem noch offen.

---

(13) Man beachte, dass F' eine Torsionsgruppe ist, deren jede p-Komponente entweder eine zyklische oder eine quasizyklische Gruppe ist. Offenbar gilt $V/U \cong F' + F'$.

(14) D. h. : die torsionsfreie Faktorgruppe nach der maximalen Torsionsuntergruppe hat den Rang 1.

II

Nun legen wir die Gruppenstruktur fest und suchen Bedingungen, unter denen Gruppen diese Struktur aufweisen. Natürlich muss der festgelegte Struktursatz unseren geforderten Bedingungen E_1-E_3 genügen, insbesondere dürfen aus zwei verschiedenen Schemas konstruierte Gruppen nicht isomorph sein. Es gibt natürlich viele Möglichkeiten, eine Struktur vorzuschreiben, aber es scheinen die folgenden die wichtigsten zu sein.

a. Direkte Summen zyklischer Gruppen. - Eine Darstellung als direkte Summe zyklischer Gruppen kann als Struktursatz angesehen werden, da die Mächtigkeit der zyklischen Komponenten von fester Ordnung ∞ oder p^r allein von der Gruppe abhängt. Es sind mehrere Bedingungen bekannt [PRÜFER, PONTRJAGIN, KULIKOV, KERTESZ, SZELE und meine], die hinreichend oder notwendig und hinreichend sind für die Zyklensummendarstellbarkeit einer beliebigen oder einer gewissen Einschränkung unterworfenen Gruppe. Nur für abzählbare Gruppen und für p-Gruppen sind aber solche notwendige und hinreichende Bedingungen bekannt, in denen kein ausgezeichnetes Elementensystem (nämlich die Basis) vorkommt. Es wäre nützlich, auch im allgemeinsten Falle eine solche Bedingung aufzustellen.

b. Vollständig zerlegbare torsionsfreie Gruppen. - Eine torsionsfreie Gruppe heisst vollständig zerlegbar, wenn sie als direkte Summe rationaler Gruppen darstellbar ist. Da die Anzahl einer jeden festen rationalen Gruppe isomorpher Summanden nur von der Gruppe selbst abhängt, kann eine Zerlegung in die direkte Summe rationaler Gruppen als Struktursatz angesehen werden. Nach einem bekannten Satz von R. Baer ist eine abzählbare torsionsfreie Gruppe genau dann vollständig zerlegbar, wenn jedes endliche Elementensystem der Gruppe in einen solchen direkten Summanden eingebettet werden kann, der die direkte Summe endlich vieler rationaler Gruppen ist. Im überabzählbaren Fall gibt es aber keine brauchbare allgemeine notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Zerlegbarkeit, somit ist es noch ein offenes Problem, eine solche zu finden. Eine vernünftige Bedingung darf natürlich kein ausgezeichnetes Elementsystem enthalten.

c. Vollständige direkte Summen von rationalen Gruppen. - Dass eine solche Darstellung einer Gruppe als eine Strukturaussage betrachtet werden kann, ist keineswegs trivial, es ist sogar noch nicht vollständig entschieden. Erst neulich bewies E. SASIADA, dass in einer Darstellung von G als vollständige direkte Summe : $G = \sum^{*} G_{\alpha}$ (wo G_{α} die vollständige direkte Summe einander isomorpher rationaler Gruppen ist und für verschiedene α diese rationalen Gruppen nicht-isomorph sind) die Gruppen G_α allein durch G bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Was nun die Zerlegungen $G_\alpha = \sum^* A_\lambda$ mit einander isomorphen rationalen A_λ betrifft, zeigte er mittels eines Satzes von J. Łoś, dass die Anzahl der A_λ eindeutig bestimmt ist, falls die A_λ von der vollen rationalen Gruppe verschieden sind und die Mächtigkeit der Indexmenge kleiner als das kleinste nicht-erreichbare Aleph ist.

Das Hauptproblem besteht nun darin, eine Bedingung für die Zerlegbarkeit in die vollständige direkte Summe rationaler Gruppen anzugeben. Dies scheint ein ziemlich schwieriges Problem zu sein. Es ist noch keine Bedingung vorhanden dafür, dass eine Gruppe die vollständige direkte Summe unendlicher zyklischer Gruppen sei.

d. Zerfällungsproblem gemischter Gruppen. - Es handelt sich um keinen vollständigen Struktursatz, bloss um einen Reduktionssatz, nämlich um den Fall, wenn die gemischte Gruppe in die direkte Summe ihrer maximalen Torsionsuntergruppe T und einer torsionsfreien Gruppe J zerfällt. R. BAER suchte notwendige und hinreichende Bedingungen

α. für eine Torsionsgruppe T, dass jede sie als maximale Torsionsuntergruppe enthaltende gemischte Gruppe zerfalle ;

β. für eine torsionsfreie Gruppe J, dass jede gemischte Gruppe G mit $G/T \cong J$ zerfalle ;

γ. für eine Torsionsgruppe T und eine torsionsfreie Gruppe J, damit jede Gruppe G mit $G \geq T$ und $G/T \cong J$ zerfalle. Er konnte nur im Fall (α) eine vollständige Lösung geben, für die Fälle (β) und (γ) hat er bloss notwendige bzw. hinreichende Bedingungen aufgestellt. Den Fall (γ) hat er für abzählbare J vollständig gelöst, i. a. ist aber dieses wichtige Problem noch offen.

In diesem kurzen Überblick konnten wir natürlich die Probleme nur flüchtig berühren. Für die Einzelheiten sei auf mein Buch "Abelian Groups" hingewiesen.