Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Harold Davenport

Les inégalités diophantiennes à plusieurs variables

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, nº 2 (1958-1959), exp. nº 21, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_2_A6_0>

LES INÉGALITÉS DIOPHANTIENNES À PLUSIEURS VARIABLES

par Harold DAVENPORT

Les problèmes que je vais considérer aujourd'hui ont beaucoup en commun avec ceux dont j'ai parlé hier, mais maintenant il est question d'inégalités et non d'équations. Soit $\Phi(x_1 , \ldots , x_n)$ un polynôme homogène, de degré d , à coefficients réels. Sous quelles conditions de caractère général peut-on affirmer que l'inégalité

$$|\Phi(x_1 , \ldots , x_n)| < \varepsilon \tag{1}$$

admet des solutions, pour tout $\varepsilon > 0$, en entiers $x_1 , \ldots , x_n$, non tous nuls?

Les conditions seront de telle nature qu'elles ne changent pas si on multiplie Φ par une constante quelconque ; ainsi il suffit de donner à ε une valeur spéciale, par exemple 1 .

Si $d = 1$, de sorte que Φ soit une forme linéaire, il suffit que $n \geqslant 2$, et il ne reste rien à dire. Mais si $d = 2$, on a déjà un problème difficile. Il est évidemment nécessaire que Φ soit indéfini, et on suppose depuis longtemps que cette condition est aussi suffisante, pourvu que n soit suffisamment grand. Cette conjecture a été démontrée récemment par moi-même [6], [7], en partie en collaboration avec B. J. BIRCH [1] et D. RIDOUT [9]. Mais nous sommes encore loin d'arriver à la condition véritable sur n . C'est probablement la même condition que pour la résolubilité des équations quadratiques homogènes, à savoir : $n \geqslant 5$.

Les premiers résultats obtenus se rapportèrent à la forme diagonale

$$\Phi = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \quad , \tag{2}$$

où $\lambda_1 , \ldots , \lambda_n$ sont réels et ne sont ni tous positifs ni tous négatifs. En 1934, CHOWLA [5] a démontré qu'il suffit de supposer $n \geqslant 9$; sa démonstration se base sur les recherches très ingénieuses de JARNIK et WALFISZ [11] sur les points entiers à l'intérieur d'un grand ellipsoïde à n dimensions. En 1946, HEILBRONN et moi-même, nous avons démontré [8] qu'il suffit de supposer $n \geqslant 5$.

J'indiquerai seulement les grandes lignes de notre démonstration. On peut trouver, de plusieurs façons, une fonction élémentaire $K(\alpha)$ de la variable réelle α , telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \alpha \xi} K(\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad |\xi| \geqslant 1 , \\ \text{nombre compris entre} \quad 0 \quad \text{et} \quad 1 \quad \text{pour tout} \quad \xi . \end{cases}$$

On peut en outre imposer la condition que $K(\alpha) \to 0$ quand $\alpha \to \pm \infty$. La fonction que nous avons utilisée est

$$K(\alpha) = \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 ,$$

mais il y a d'autres exemples pour lesquels $K(\alpha) \to 0$ plus rapidement.

Supposons que l'inégalité

(3) $$|\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_5 x_5^2| < 1$$

n'admette pas de solutions en entiers $x_1 , \dots , x_n$, non tous nuls. Définissons les sommes exponentielles

(4) $$S_j(\alpha) = \sum_{x_j} e^{2\pi i \alpha \lambda_j x_j^2} \qquad (j = 1 , \dots , 5) ,$$

où chaque variable x_j parcourt les entiers d'un certain intervalle, qui ne contient pas 0 . Alors on a :

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\alpha) \dots S_5(\alpha)\, K(\alpha)\, d\alpha = 0$$

On peut choisir des intervalles convenables pour les variables $x_1 , \dots , x_5$ de la manière que j'ai expliquée hier : soit $\xi_1 , \dots , \xi_5$ une solution réelle de l'équation

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_5 \xi_5^2 = 0 ,$$

avec chaque $\xi_j \neq 0$, et définissons les intervalles par les inégalités

$$\frac{1}{2} P < \frac{x_j}{\xi_j} < 2P ,$$

où $P \to \infty$ à la fin.

La partie $|\alpha| > 1$ de l'intégrale (5) n'a pas d'importance, parce que $K(\alpha) \to 0$ quand $|\alpha| \to \infty$. Il est clair que chaque somme $S_j(\alpha)$ prend sa valeur maxima (grandeur d'ordre P) dans un petit intervalle autour de $\alpha = 0$, de longueur P^{-2} (très approximatif). Il n'est pas difficile d'évaluer la contribution d'un intervalle autour de $\alpha = 0$, et on trouve que cette contribution est en effet de l'ordre $P^{5-2} = P^3$.

En comparaison avec la méthode de Hardy et Littlewood, il y a ici une différence importante. On sait que chaque somme $S_j(\alpha)$ satisfait à une bonne estimation si $\lambda_j \alpha$ n'est pas voisin d'un nombre rationnel $\frac{a}{q}$ avec q assez petit. Or, $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ sont des nombres réels donnés, et on peut supposer $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ irrationnel, car si tous les quotients $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ sont rationnels, le théorème est une conséquence du théorème de Meyer sur les équations quadratiques. On pourrait donc s'attendre à ce que, pour chaque α non voisin de 0, ou bien $|S_1(\alpha)|$, ou bien $|S_2(\alpha)|$ satisfasse à une bonne estimation. Cela peut se démontrer, quoiqu'il soit nécessaire de se servir de certains résultats très fins. On obtient ainsi une bonne estimation pour la contribution à l'intégrale (5) de tous les α pour lesquels $|\alpha|$ n'est ni grand ni petit.

Le théorème ne reste pas vrai avec 4 termes au lieu de 5, tant que les coefficients λ_j sont des nombres réels quelconques. Par exemple, l'inégalité

$$|x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2| < 1$$

n'admet pas de solution non nulle. Mais si l'on suppose, comme dans la démonstration précédente, que les quotients $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ ne soient pas tous rationnels, il est à conjecturer que la condition $n \geqslant 3$ suffise. Mais ceci est une question d'une extrême difficulté.

La méthode s'applique aussi aux formes diagonales de degré supérieur au deuxième. En collaboration avec K. F. ROTH, j'ai démontré [10] que pour le troisième degré il suffit de prendre $n \geqslant 8$, et pour chaque degré $d > 3$ il suffit de prendre $n > C \log d$, où C est une constante absolue. Si d est pair, il y a naturellement la même condition sur les signes des coefficients comme dans le cas $d = 2$.

La forme quadratique générale présente beaucoup plus de difficulté que la forme diagonale. Il n'y a pas de possibilité de simplification par une transformation linéaire, car il est question maintenant de formes à coefficients réels, et non à coefficients rationnels.

Afin d'aborder ce problème par la même méthode, il faut étudier la somme exponentielle

$$(6) \qquad S(\alpha) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} e^{2\pi i \alpha \Phi(x_1, \ldots, x_n)} \quad .$$

Comme auparavant, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha)\, K(\alpha)\, d\alpha = 0 \quad ,$$

sous l'hypothèse que l'inégalité $|\Phi| < 1$ n'a pas de solutions non banales. La vraie difficulté consiste toujours à démontrer que $|S(\alpha)|$ est d'ordre inférieur à P^{n-2} pour tout α qui n'est ni grand ni petit. Il faut remarquer qu'une telle estimation ne peut être vraie en l'absence de toute hypothèse ; car si, par exemple, la forme Φ est une forme à coefficients entiers, la somme $S(\alpha)$ aura un ordre de grandeur P^n pour les valeurs de α de la forme $\frac{a}{q}$, si q est petit. On ne peut s'attendre à ce que, en sens inverse, tous les coefficients de $\alpha\Phi$ soient presque rationnels quand $|S(\alpha)| > P^{n-2}$. Mais j'ai pu démontrer, en utilisant quelques méthodes de la géométrie des nombres, que la forme $\alpha\Phi$ représente une autre forme, à un nombre plus petit de variables, dont les coefficients sont très voisins d'entiers. En particulier, si n est suffisamment grand, $\alpha\Phi$ représente une forme à 5 variables, soit

$$\sum_{\mu=1}^{5} \sum_{\nu=1}^{5} \Psi_{\mu\nu} y_\mu y_\nu \quad ,$$

où

$$|\Psi_{\mu\nu}| \ll P^{\delta} \quad , \qquad \|\Psi_{\mu\nu}\| \ll P^{-2+\delta} \quad ,$$

δ une constante positive, arbitrairement petite. (Je désigne par $\|\theta\|$ la différence entre θ et l'entier le plus proche de ϑ).

Cette dernière forme est voisine d'une forme à coefficients entiers. Si cette dernière forme est indéfinie, il existe des valeurs de y_1, ... , y_5, pour lesquelles elle représente 0 . Si l'on a une borne supérieure pour ces entiers

$y_1, \ldots, y_5$, on peut s'attendre à ce que, pour les valeurs correspondantes de $x_1, \ldots, x_n$, la forme $\alpha\Phi$ prenne une valeur petite, ce qui donnerait une contradiction.

Une borne supérieure pour une solution d'une équation quadratique à 5 variables est fournie par un théorème élégant de CASSELS [2], [4]. Soit

$$(7) \qquad Q(y_1, \ldots, y_5) = \sum_{\mu=1}^{5} \sum_{\nu=1}^{5} q_{\mu\nu}\, y_\mu\, y_\nu$$

une forme quadratique à coefficients entiers. Alors il existe une solution entière non banale de $Q = 0$ qui satisfait à

$$(8) \qquad |y_\nu| \ll (\max |q_{\mu\nu}|)^2 \quad .$$

La démonstration est élémentaire, c'est-à-dire qu'elle n'emploie aucune méthode analytique, mais elle est ingénieuse.

Ce théorème est applicable au problème indiqué ci-dessus, toujours sous la condition que la forme à coefficients entiers soit indéfinie, et elle entraîne la contradiction voulue.

Et maintenant, comment s'assurer que la forme à 5 variables soit indéfinie ? Il apparaît nécessaire d'imposer une condition sur le type de la forme donnée Φ. Je dis qu'une forme quadratique Φ est du type $(r\,;\, n-r)$ quand elle s'exprime comme

$$X_1^2 + \ldots + X_r^2 - X_{r+1}^2 - \ldots - X_n^2 \quad ,$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des formes linéaires à coefficients réels. On fait l'hypothèse que $r \geqslant 6$ et $n - r \geqslant 6$, et alors il est possible de démontrer le résultat voulu pourvu que $n \geqslant 21$ ([6], [7] et [9]). Mais les détails sont assez compliqués. Il serait possible, en y introduisant d'autres complications, d'éviter les conditions sur r, mais alors il serait nécessaire de prendre n très grand.

Une autre méthode pour l'étude du problème a été trouvée par B. J. BIRCH et moi-même [1], [3]. Cette méthode est semblable à celle de BIRCH pour les équations, déjà expliquée. On montre qu'une forme quadratique Φ quelconque représente une forme à 5 variables qui est presque diagonale, c'est-à-dire une forme

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_5 y_5^2 + 2\,\varepsilon_{12}\, y_1\, y_2 + \ldots \quad ,$$

où les $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ sont bornés par des puissances positives d'un paramètre

P et où les ε_{12} , ... sont bornés par des puissances négatives de P . Comme λ_1 , ... , λ_5 sont des valeurs de Φ , on peut supposer que $|\lambda_\nu| \geqslant 1$ $(\nu = 1 , \ldots , 5)$.

La démonstration d'un tel résultat ne présente pas de grande difficulté. On a besoin seulement d'employer des théorèmes classiques sur les inégalités diophantiennes linéaires. Il faut choisir 5 points successifs dans l'espace des variables x_1 , ... , x_n ; le premier point est arbitraire, le deuxième point satisfait à une inégalité, le troisième à deux inégalités, etc. On trouve

$$(9) \qquad |\lambda_\nu| \ll P^{2(\nu -1)} \quad ,$$

$$(10) \qquad |\varepsilon_{\mu\nu}| \ll P^{-n+(\mu -1)+(\nu -1)}$$

pour $\mu , \nu = 1 , \ldots , 5$.

Il faut maintenant s'assurer que la nouvelle forme est indéfinie. Il suffit de supposer que la forme donnée Φ soit du type $(r , n - r)$ où $\min (r , n - r) \leqslant 4$. Car si $r \leqslant 4$, par exemple, on peut choisir le premier des 5 points tel que $\Phi > 0$ en ce point, et il suffit de remarquer qu'une forme Φ avec $r \leq 4$ ne peut pas représenter une forme positive définie à 5 variables.

Pour compléter le travail, on a besoin d'une extension du théorème de Davenport et Heilbronn ; extension qui affirme que l'inégalité

$$(11) \qquad |\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_5 y_5^2| < 1$$

admet une solution non banale qui satisfait à une estimation de grandeur. Nous avons démontré un tel résultat [3], avec l'estimation

$$(12) \qquad |\lambda_\nu y_\nu^2| \ll |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_5|^{1+\delta} \quad ,$$

pour toute constante positive δ .

En appliquant ce résultat au problème actuel, on trouve (après un petit calcul) que

$$|\sum \sum \varepsilon_{\mu\nu} y_\mu y_\nu| \ll P^{-n+(1+\delta)(0+2+4+6+8)} \quad ,$$

ce qui est petit si $n \geqslant 21$.

On a ainsi deux méthodes, l'une qui réussit quand

$$n \geqslant 21 \quad \text{et} \quad \min (r , n - r) \geqslant 6 \quad ,$$

l'autre qui réussit quand

$$n \geq 21 \quad \text{et} \quad \min(r , n - r) \leq 4 \quad .$$

La lacune a été comblée par D. RIDOUT [13], par une modification de la deuxième méthode. Nous avons ainsi démontré que : pour chaque forme quadratique indéfinie Φ à $n \geq 21$ variables, existent des entiers $x_1 , \ldots , x_n$ non tous nuls, tels que $|\Phi(x_1 , \ldots , x_n)| < 1$.

On peut déduire, en suivant quelques raisonnements de A. OPPENHEIM [12], que les formes quadratiques à $n \geq 21$ variables se divisent en deux classes :

(1) les formes qui sont rationnelles, à un facteur constant près,

(2) les autres formes, pour lesquelles les valeurs forment un ensemble de nombres réels qui est partout dense.

Quant aux formes réelles de degré supérieur au deuxième, nous pouvons en principe démontrer un théorème analogue pour les formes cubiques générales. Mais les détails seront compliqués, et je ne sais pas quelle condition sur n en résultera. Jusqu'ici nous ne pouvons pas traiter les formes réelles de degré impair > 3 ; il y a là une difficulté essentielle. Quant aux formes de degré pair > 2 , la question doit attendre la résolution du problème analogue pour les équations.

Pour faire des progrès significatifs dans les problèmes des équations et des inégalités, on a besoin d'une étude approfondie des variétés algébriques dans l'espace à plusieurs dimensions. Les théories de géométrie algébrique développées jusqu'à présent n'ont pas de valeur immédiate pour notre but, parce qu'elles introduisent toujours des extensions algébriques du corps de coefficients.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRCH (B. J.) and DAVENPORT (H.). - Indefinite quadratic forms in many variables, Mathematika, t. 5, 1958, p. 8-12.

[2] BIRCH (B. J.) and DAVENPORT (H.). - Quadratic equations in several variables, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 54, 1958, p. 135-138.

[3] BIRCH (B. J.) and DAVENPORT (H.). - On a theorem of Davenport and Heilbronn, Acta Math., t. 100, 1958, p. 259-279.

[4] CASSELS (J. W. S.). - Bounds for the least solutions of homogeneous quadratic equations, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 51, 1955, p. 262-264 ; t. 52, 1956, p. 604.

[5] CHOWLA (S.). - A theorem on irrational quadratic forms, J. London math. Soc., t. 9, 1934, p. 162-163.

[6] DAVENPORT (H.). - Indefinite quadratic forms in many variables, Mathematika, t. 3, 1956, p. 81-101.

[7] DAVENPORT (H.). - Indefinite quadratic forms in many variables II, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 8, 1958, p. 109-126.

[8] DAVENPORT (H.) and HEILBRONN (H.). - On indefinite quadratic forms in five variables, J. London math. Soc., t. 21, 1946, p. 185-193.

[9] DAVENPORT (H.) and RIDOUT (D.). - Indefinite quadratic forms, Proc. London math. Soc. (à paraître).

[10] DAVENPORT (H.) and ROTH (K. F.). - The solubility of certain Diophantine inequalities, Mathematika, t. 2, 1955, p. 81-96.

[11] JARNIK (V.) und WALFISZ (A.). - Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Z., t. 32, 1930, p. 152-160.

[12] OPPENHEIM (A.). - Values of quadratic forms, Quart. J. of Math., Oxford 2nd Series, t. 4, 1953, p. 53-59 et 60-66.

[13] RIDOUT (D.). - Indefinite quadratic forms, Mathematika, t. 5, 1958, p. 122-124.