Pierre Gabriel

Objets injectifs dans les catégories abéliennes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, nº 2 (1958-1959), exp. nº 17, p. 1-32
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_2_A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL,
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1958/59
-:-:-:-

2 mars 1959

OBJETS INJECTIFS DANS LES CATÉGORIES ABÉLIENNES

par Pierre GABRIEL

1. Introduction.

Cet exposé est un rapport sur le travail de MATLIS [7] . Cependant le langage a été modifié et les méthodes employées ici pour la dualité sont différentes. Le rédacteur s'est en outre complu à donner de nombreux exemples et à en déduire des résultats sur les anneaux non commutatifs et les faisceaux quasi-cohérents.

2. Enveloppes injectives dans les catégories abéliennes.

Nous nous excusons pour les sorites qui suivent.

Nous ne considérerons que des catégories abéliennes satisfaisant aux axiomes (A) , (B) et (C) :

A. Si I est un ensemble préordonné filtrant croissant, et ρ un système inductif sur I , à valeur dans C , alors la limite inductive $\varinjlim \rho$ existe.

B. Avec les notations de l'axiome A) , le foncteur additif $\varinjlim \rho$ de ρ est exact.

C. Il existe un générateur U de C , i.e. un objet U tel que tout objet de C est isomorphe à un quotient d'une somme directe $U^{(I)}$ d'objets identiques à U .

On rappelle que l'axiome A. équivaut à l'axiome A'. : A' : Pour toute famille $(P_i)_{i \in I}$ d'objets de C , la somme directe des P_i existe.

En outre pour une catégorie abélienne satisfaisant à l'axiome (A), l'axiome (B) équivaut à (B') et à (B") :

B' : Si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante croissante de sous-objets de P , alors l'application canonique de $\varinjlim P_i$ dans P est un monomorphisme.

B" : Si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante croissante de sous-objets de P , et si Q est un sous-objet de A , alors

$$(\sup P_i) \cap Q = \sup(P_i \cap Q)$$

($\sup P_i$ désigne l'image de $\varinjlim P_i$ dans P)

Les axiomes (A) , (B) et (C) entraînent que pour tout objet M de C il existe un monomorphisme $i : M \to I$, où I est un objet injectif de C (GROTHENDIECK [5]) . Nous nous proposons de montrer qu'il existe $i : M \to I$ tel que I soit le seul injectif contenant M et contenu dans I . On utilise à cette fin la notion d'extension essentielle :

Si M est contenu dans un objet P , on dit que l'extension P de M est essentielle (ECKMANN-SCHOPF) si tout sous-objet Q de P est nul dès que $Q \cap M = 0$. Il revient au même de dire que tout morphisme de P qui induit un monomorphisme sur M est un monomorphisme. Lorsque C est la catégorie des modules unitaires à gauche sur un anneau A non commutatif, à l'élément unité, le module P est une extension essentielle de module M si tout élément non nul de P a un homothétique non nul dans M .

Les assertions suivantes résultent directement des hypothèses :

- Dans la situation $M \subset P \subset Q$, Q est extension essentielle de M si et seulement si P est extension essentielle de M et Q extension essentielle de P .
- Si $M \subset P$ et si P est le sup d'une famille filtrante croissante $(P_i)_{i \in I}$ d'extensions essentielles de M alors P est une extension essentielle de P .

En effet si $Q \subset P$ et si $Q \cap M = 0$, alors $(Q \cap P_i) \cap M = 0$, et donc $Q \cap P_i = 0$. Mais $Q = Q \cap \sup P_i = \sup(Q \cap P_i) = 0$,

C.Q.F.D.

- Si $M \subset P$, alors il existe un sous-objet Q de P tel que $Q \cap M = 0$ et que P/Q soit extension essentielle de l'image de M dans Q/M : il suffit de prendre pour Q un sous-objet maximal parmi ceux qui satisfont à l'égalité $Q \cap M = 0$ (les derniers forment un ensemble inductif d'après (C) et (B")) .
- Si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille d'objets de C admettant des extensions essentielles $(P_i)_{i \in I}$, alors $\bigoplus_{i \in I} P_i$ est une extension essentielle de $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

Démontrons d'abord l'assertion dans le cas où I est réduit à deux éléments, $I = \{1 , 2\}$: soient alors p_1 et p_2 les projections de $P_1 \oplus P_2$ sur P_1 et P_2 et soit Q un sous-objet de $P_1 \oplus P_2$. Si $Q \neq 0$, on peut supposer que $p_1(Q) \neq 0$ et alors $p_1(Q) \cap M_1 \neq 0$, c'est-à-dire $p_1^{-1}(M_1) \cap Q = Q_1 \neq 0$. Dès lors ou bien $Q_1 \subset p_2^{-1}(M_2)$ et le résultat est démontré, ou bien $p_2(Q_1) \neq 0$ et $p_2(Q_1) \cap M_2 \neq 0$, c'est-à-dire $p_2^{-1}(M_2) \cap Q_1 \neq 0$. Or ce dernier objet est contenu dans $M_1 \oplus M_2$.

On en déduit le resultat par récurrence dans le cas où la famille est finie. Dans le cas général enfin, si $Q \subset \bigoplus_{i \in I} P_i$, $Q \neq 0$, alors $Q = \sup_J (Q \cap \bigoplus_{i \in J} P_i)$, où J parcourt les sous-ensembles finis de I. Donc $Q \cap (\bigoplus_{i \in J} P_i) \neq 0$ pour un certain J, i.e. $Q \cap (\bigoplus_{i \in J} M_i) \neq 0$,

C.Q.F.D.

- Si M est un objet de C, M est extension essentielle de tout sous-objet non nul si et seulement si 0 est irréductible dans M, i.e. si $P \cap Q = 0$ dans M entraîne $P = 0$ ou $Q = 0$.

- Plus généralement si $(N_i)_{i \in I}$ est une famille finie de sous-objets de M tels que chaque N_i soit irréductible dans M, que $0 = \bigcap_{i \in I} N_i$, et que 0 ne soit pas intersection d'une sous-famille de $(N_i)_{i \in I}$; alors le monomorphisme canonique de M dans $\bigoplus_{i \in I} (M/N_i)$ est une extension essentielle de M.

Par hypothèse $\bigcap_{i \neq j} N_j \neq 0$ et son image P_i dans M/N_i n'est donc pas nulle. L'image de M contient $\bigoplus_{i \in I} P_i$ et il suffit donc de montrer que chaque M/N_i est extension essentielle de P_i ; mais ceci résulte de l'irréductibilité de N_i.

PROPOSITION (ECKMANN-SCHOPF). - Si M est un objet de C, il existe un objet I, défini à un isomorphisme près, et un monomorphisme $i : M \longrightarrow I$, défini à un automorphisme près de I tels que l'une des propriétés caractéristiques suivantes soient satisfaites :

a. l'extension I de M est essentielle et I est injectif.

b. l'extension I de M est essentielle et I n'admet pas d'extension essentielle propre.

c. I <u>est injectif et pour tout monomorphisme</u> $j : M \dashrightarrow J$ <u>de</u> M <u>dans un objet injectif, il existe un monomorphisme</u> $u : I \dashrightarrow J$ <u>tel que</u> $j = u \circ i$.

d. I <u>est injectif et</u> M <u>n'admet pas d'autres extensions injectives contenues dans</u> I .

e. <u>L'extension</u> I <u>de</u> M <u>est essentielle et pour toute extension essentielle</u> $u : M \longrightarrow P$ <u>il existe un monomorphisme</u> $j : P \dashrightarrow J$ <u>tel que</u> $i = j \circ u$

On va d'abord construire i et I satisfaisant à la condition (a) : Pour cela spit $j : M \dashrightarrow J$ un monomorphisme de M dans un objet injectif et soit Q un sous-objet de J maximal pour la relation $Q \cap M = 0$. Soit enfin I une extension essentielle maximale de M dans J . Alors $Q \cap I = 0$. Je dis qu'en outre $J = Q + I$: car sinon le morphisme canonique de I dans J/Q ne serait pas surjectif. J/Q aurait donc un sous-objet isomorphe à I et cet isomorphisme se prolongerait en un morphisme k de J/Q dans J . Comme J/Q est extension essentielle de I , k serait une injection, ce qui est contraire au caractère maximal de I . L'objet I est donc facteur direct dans J et est injectif.

a. $\Longrightarrow$ b. : car si $I \subset K$, alors I est facteur direct dans K et l'extension n'est essentielle que si $I = K$.

b. $\Longrightarrow$ c. : Montrons que I est injectif : supposons donné le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{g} & Q \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\ & & I & & \end{array}$$

et soit $I_\rho Q$ le conoyau du morphisme $(f , - g) : P \longrightarrow I \oplus Q$. Les injections de I et Q dans $I \oplus Q$ se prolongent en un monomorphisme $\varphi : 0 \longrightarrow I \longrightarrow I_\rho Q$ et un morphisme $\psi : Q \longrightarrow I_\rho Q$. En outre $\varphi \circ f = \psi \circ g$. Soit donc R un sous-objet de $I_\rho Q$ maximal pour la relation $R \cap I = 0$. Alors $I_\rho Q/R$ est extension essentielle de I et lui est donc égal. Le morphisme de Q dans $I_\rho Q/R$ prolonge f .

Le reste de l'assertion résulte du caractère injectif de I .

c. $\Longrightarrow$ d. : Sinon soit J un objet injectif tel que $M \subset J \subset I$ et $J \neq I$. On sait que J contient une extension injective essentielle de M et on peut donc supposer que J est extension essentielle de M . Alors u applique I et J sur un facteur direct de J , ce qui n'est possible que si $I = J$ et si u est un isomorphisme.

d. $\Rightarrow$ e. : Clair.

e. $\Rightarrow$ a. : En effet si P est une extension injective essentielle de M, alors P se plonge dans I, et est donc facteur direct de I : d'où $P = I$.

DÉFINITION. - Tout objet I satisfaisant à la proposition précédente sera dit "l'"enveloppe injective de M (avec abus de langage).

COROLLAIRE 1. - Si $M_1, \ldots, M_n$ ont pour enveloppe injective $I_1, \ldots, I_n$, alors $I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ est enveloppe injective de $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$.

COROLLAIRE 2. - Si $N_1, \ldots, N_n$ sont des sous-objets de M, irréductibles dans M, si $0 = N_1 \cap \ldots \cap N_n$, si 0 n'est pas intersection de moins de n d'entre les N_j, si enfin I_j est l'enveloppe injective de M/N_j, alors $I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ est l'enveloppe injective de M.

La décomposition primaire commence à poindre à l'horizon, mais nous allons d'abord donner quelques exemples.

3. Exemples.

a. A est un anneau non commutatif à élément unité ; la catégorie C des A-modules à gauche unitaires satisfait aux axiomes (A), (B) et (C).

b. A est un anneau gradué à élément unité et C est la catégorie des A-modules à gauche gradués unitaires, avec homomorphisme de degré 0.

c. Soit A un anneau non commutatif intègre à élément unité, tel que 0 ne soit pas intersection de deux idéaux à gauche non nuls. On sait qu'il existe alors un corps des quotients à gauche K, i.e. un corps gauche K contenant A et tel que tout $x \in K$ soit de la forme $x = b^{-1}.a$, $b, a \in A$, $b \neq 0$ (DUBREIL [4]).

Je dis que K est l'enveloppe injective du A-module à gauche A. Il est en effet clair que l'extension est essentielle. D'autre part K est un A-module injectif :

Car si Λ est un idéal à gauche de A et φ un morphisme de Λ dans K, alors $\varphi(\lambda) = \lambda.(\lambda^{-1}\varphi(\lambda))$, pour $\lambda \in \Lambda^*$. Si maintenant $\lambda \in \Lambda$ et $\mu \in \Lambda$, $\lambda \neq 0 \neq \mu$, alors $A\lambda \cap A\mu \neq 0$ et il existe ν tel que $\nu = a\lambda = b\mu$, $a, b \in A$.

D'où l'on tire :

$\lambda^{-1}.\varphi(x) = \lambda^{-1} a^{-1}\varphi(a\lambda) = \nu^{-1} - \varphi(\nu) = \mu^{-1} b^{-1}\varphi(b\mu) = \mu^{-1}\cdot\varphi(\mu)$. Ainsi $x = \lambda^{-1}.\varphi(\lambda)$ ne dépend pas de λ et le morphisme $\overline{\varphi}$: $a \longrightarrow ax$ de A dans K prolonge φ.

d. Soit G un groupe fini, $\mathbb{Z}[G]$ l'algèbre du groupe et $\mathbb{Q}[G] = \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G]$.

Je dis que $\mathbb{Q}[G]$ est un $\mathbb{Z}[G]$-module injectif : En effet si M est un $\mathbb{Z}[G]$-module, alors $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M$ est un $\mathbb{Q}[G]$-module et le foncteur $M \Rightarrow \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M$ est exact. Le resultat se deduit donc du fait que $\mathbb{Q}[G]$ est un anneau semi-simple et que l'on a la formule :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathbb{Q}[G]) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M, \mathbb{Q}[G])$$

Ainsi lorsque M est un $\mathbb{Z}[G]$-module sans $\mathbb{Z}$-torsion, alors M est contenu dans $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M$ et ce module est une extension injective et essentielle de M.

e. C est la catégorie des groupes abéliens.

Alors $\mathbb{Q}$ est l'enveloppe injective de $\mathbb{Z}$. Plus généralement si G est un groupe libre, son enveloppe injective est $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} G$.

De même, si p est un nombre premier, soit $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes z tels que $z^{p^n} = 1$ pour n assez grand. Le groupe $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ "contient" tous les groupes $\mathbb{Z}/(p^n)$ et est manifestement une extension essentielle de ces groupes. Comme $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ est en outre divisible, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ est l'enveloppe injective des $\mathbb{Z}/(p^n)$.

On construit ainsi facilement l'enveloppe injective de tout groupe abélien de type fini. Ces considérations seront généralisées dans le paragraphe suivant. On remarquera que le Tore $D = \mathbb{Q}/(1)$ est la somme directe des $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, quand p parcourt les nombres premiers.

f. k est un corps commutatif, A l'anneau des séries formelles :

$$A = k[[X_1, \dots, X_n]].$$

L'anneau A a pour idéal maximum $\mathfrak{m}=(X_1, \dots, X_n)$ et $A/\mathfrak{m} = k$. Le corps k est ainsi muni d'une structure de A-module. Nous allons construire son enveloppe injective. Pour cela soit $I = k[\frac{1}{X_1}, \dots, \frac{1}{X_n}]$. On définit sur I une structure de A-module à l'aide des formules :

$$X_i \cdot \left(\frac{1}{X_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{X_i^{\alpha_i}} \cdots \frac{1}{X_n^{\alpha_n}}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{X_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{X_i^{\alpha_i - 1}} \cdots \frac{1}{X^{\alpha_n}} \quad \text{si } \alpha_i \geqslant 1 . \end{cases}$$

Les polynômes constants de I forment alors un sous-module isomorphe à $A/\mathfrak{m} = k$ et I est manifestement une extension essentielle de ce sous-module. On verra plus tard que I est un A-module injectif et donc que c'est l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{m} = k$.

g. Soit X un <u>espace topologique</u> muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$: La catégorie des faisceaux de $\mathcal{A}$-modules à gauche satisfait aux axiomes (A), (B) et (C).

h. Soit V une <u>variete algébrique</u> et soit C la categorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents sur V (Chevalley [8]). Les limites inductives de faisceaux quasi-cohérents sont des faisceaux quasi-cohérents et les axiomes (A) et (B) sont donc satisfaits.

Nous nous intéressons ici aux faisceaux quasi-cohérents qui sont injectifs dans la categorie des faisceaux quasi-cohérents et non pas dans la catégorie de tous les faisceaux algebriques. En fait l'étude de ces faisceaux injectifs se ramène à l'étude des modules sur une algèbre affine. Ainsi :

PROPOSITION. - <u>Si</u> U <u>est un ouvert de</u> V, i <u>l'injection canonique de</u> U <u>dans</u> V <u>et si</u> F <u>est un faisceau quasi-cohérent injectif sur</u> U <u>alors son image directe</u> $i_*(F)$ <u>dans</u> V <u>est injective.</u>

En effet si H est un faisceau quasi-cohérent sur V, on a la formule :

$$\mathrm{Hom}_V(H, i_*(F)) = \mathrm{Hom}_U(H \mid U, F),$$

Si F est injectif, le second membre est manifestement un foncteur exact en H.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> G <u>est un faisceau quasi-cohérent sur</u> V, <u>il existe un monomorphisme</u>

$i : G \longrightarrow I$ de G dans un faisceau quasi-cohérent injectif.

Soit en effet (U_k) un recouvrement fini de V par des ouverts affines et soit φ_k l'injection canonique de U_k dans V. On sait que chaque G/U_k se plonge dans un faisceau quasi-cohérent injectif de U, soit $i_k : G/U_k \longrightarrow I_k$. Alors les morphismes canoniques de G dans les images directes $i_{k*}(G/U_k)$ des faisceaux G/U_k dans V, induisent un monomorphisme de G dans la somme directe $\bigoplus_k i_{k*}(I_k)$.

On pourrait démontrer le même résultat en exhibant un générateur de la catégorie. Comme la classe des types de faisceaux algébriques cohérents sur une variété algebrique est évidemment un ensemble, il suffit de montrer que tout faisceau quasi-cohérent est limite inductive de faisceaux cohérents. Ceci résulte de la proposition plus precise qui suit :

PROPOSITION. - Soit V une variété algébrique, U un ouvert de X, F un faisceau quasi-cohérent de V, G' un faisceau cohérent de U, contenu dans F/U. Alors il existe un faisceau cohérent G de V tel que $G \subset F$ et que $G/U = G'$.

Soit i l'injection canonique de U dans V. On peut toujours supposer que $F/U = G'$: sinon on remplace F par l'image reciproque dans F du faisceau $i_*(G')$ (pour l'application canonique de F dans $i_*(F/U)$). On peut aussi supposer que U est "maximal pour le prolongement de G ".

Si $U \neq V$, il existe $x \in V - U$ et un ouvert affine U_0 de V contenant x. Soient alors $W = U_0 \cap U$ et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions régulières sur U_0 dont les ensembles de définition $V_1, \ldots, V_n$ forment un recouvrement de W. Soient G_i des faisceaux cohérents de U_0, contenus dans F/U_0 et prolongeant $F/V_i = G'/V_i$ (il est clair que de tels G_i existent), soit H le faisceau engendré dans $j_*(F/U_0)$ par les faisceaux images directes $j_*(G_i)$, où j désigne l'injection canonique de U_0 dans V ; et soit K l'image réciproque de H dans F :

Les faisceaux G' et K coïncident alors sur $U \cap U_0$; G' est cohérent sur U, K est cohérent sur U_0. Le faisceau qui est égal à G' sur U, et égal à K sur U_0 prolonge G' en un sous-faisceau cohérent de $F(U \cup U_0)$, contrairement au caractère maximal de U : donc $U = V$.

COROLLAIRE. - Pour qu'un faisceau quasi-cohérent I sur V soit injectif, il faut et il suffit que le foncteur $F \Longrightarrow \mathrm{Hom}_V(F , I)$ soit exact quand F parcourt les faisceaux cohérents.

4. Décomposition des injectifs en sommes directes.

Nous allons supposer à partir de maintenant que la catégorie abélienne C satisfait à un axiome de plus :

D. Il existe une famille $(U_i)_{i \in I}$ de générateurs de C (i.e. $\bigoplus_{i \in I} U_i$ est un générateur de C) telle que : quel que soit i , toute chaîne ascendante de sous-objets de U_i est stationnaire.

Cet axiome est satisfait pour les catégories suivantes :

- C est la catégorie des modules unitaires à gauche sur un anneau A non commutatif, à élément unité, noethérien à gauche.
- C est la catégorie des modules à gauche, unitaires, gradués, sur un anneau gradué A , à élément unité, noethérien à gauche.
- C est la catégorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents sur une variété algébrique.

Dans une catégorie satisfaisant à (A) , (B) , (C) et (D) , on appelle noethérien tout objet dont toute chaîne ascendante de sous-objets est stationnaire.

si $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$

est une suite exacte de C et si M et P sont noethériens alors N est noethérien : soit en effet $\dots \subset H_n \subset H_{n+1} \subset \dots$ une chaîne ascendante de sous-objets de N et soit $H = \sup\limits_n H_n$.

Alors $M \cap H = M \cap \sup H_n = \sup(M \cap H_n)$. Pour n assez grand on a donc

$$M \cap H = M \cap H_n \quad \text{et} \quad H/M \cap H = H_n/M \cap H_n ,$$

d'où le résultat.

On déduit de là que les objets noethériens s'identifient aux quotients d'une somme directe finie $\bigoplus_{k=1}^{n} U_{i_k}$.

PROPOSITION. - Si M est noethérien, si P est le sup d'une famille (P_i)

filtrante croissante de sous-objets de P , alors l'homomorphisme de groupe abélien

$$\varphi_M : \sup_i \operatorname{Hom}(M , P_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M , \sup_i P_i)$$

est un isomorphisme.

Il suffit de montrer que φ_M est surjectif. Soit donc u un morphisme

$$u : M \longrightarrow P = \sup_i P_i$$

L'axiome (B") entraîne que $u^{-1}(\sup_i P_i) = \sup_i u^{-1}(P_i)$, (considérer le "graphe" du morphisme u) . Il en résulte que u applique M dans P_i pour i assez grand (la famille $u^{-1}(P_i)$ est stationnaire).

COROLLAIRE 1. - Toute somme directe d'objets injectifs est injective.

Ceci est clair quand la somme directe est finie. Dans le cas général la somme directe est le sup d'une famille filtrante croissante d'objets injectifs. Il résulte alors de la proposition que $\operatorname{Hom}(M , \sup_i P_i)$ est un foncteur exact quand M parcourt les objets noethériens et ceci est suffisant.

COROLLAIRE 2. - L'enveloppe injective d'une somme directe infinie est la somme directe des enveloppes injectives.

Le but de ce paragraphe est d'étudier les décompositions d'un objet injectif en sommes directes. D'après le corollaire précédent une somme directe de la catégorie C est injective si et seulement si chaque facteur est injectif. Un objet est dit indécomposable s'il n'est pas somme directe de deux sous-objets propres. Les objets injectifs indécomposables sont caractérisés par la proposition suivante :

PROPOSITION (MATLIS). - Si I est un objet injectif, les assertions suivantes sont équivalentes :

a. 0 n'est pas intersection de 2 sous-objets non nuls de I .

b. I est indécomposable.

c. I est l'enveloppe injective de tout sous-objet $\neq 0$.

La proposition résulte de ce qui précède et elle a les conséquences suivantes :

COROLLAIRE 1. - L'enveloppe injective de M est indécomposable si et seulement si 0 n'est pas intersection de deux sous-objets non nuls.

COROLLAIRE 2. - Si les $(N_i)_{i \in I}$ sont des sous-objets en nombre fini de M, irréductibles, tels que $0 = \bigcap_{i \in I} N_i$ et si 0 n'est pas intersection d'une sous-famille des N_i, alors les enveloppes injectives des objets M/N_i sont indécomposables et l'enveloppe injective de M est somme directe de ces injectifs indécomposables;

Réciproquement si I est l'enveloppe injective de M et si I admet une décomposition $I = \bigoplus_{k \in K} (I_k)_{k \in K}$ comme somme directe finie d'injectifs indécomposables, on posera $J_k = \bigoplus_{i \neq k} I_k$ et $N_k = M \cap J_k$. Alors N_k est irréductible et 0 est intersection "irrédondante" des N_k : on établit ainsi une correspondance biunivoque entre les représentations de 0 comme intersection irrédondante finie de sous-objets irréductibles de M et les décompositions en somme directe finie de l'enveloppe injective. Des propriétés d'unicité de cette décomposition en somme directe, propriétés énoncées plus loin, résulteront des propriétés d'unicité pour les "intersectionsirrédondantes".

On remarquera que si M est noethérien, 0 est intersection d'un nombre fini d'irreductibles de M.

COROLLAIRE 3. - L'anneau des endomorphismes d'un objet injectif indécomposable I est local.

En effet si u est un tel endomorphisme et si u est injectif alors $u(I)$ est facteur direct dans I et u est un automorphisme. Il suffit de montrer que si $\operatorname{Ker} u \neq 0$ et $\operatorname{Ker} v \neq 0$, alors $\operatorname{Ker}(u+v) \neq 0$, mais $\operatorname{Ker}(u+v) \supset \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$, d'où le résultat.

PROPOSITION (MATLIS). - Tout objet injectif I est somme directe d'objets injectifs indécomposables.

En effet, soit I un objet injectif et soit J un sous-objet injectif, maximal pour la décomposition en somme directe d'injectifs indécomposables. Alors

$I = J \oplus K$ et tout revient à montrer que K est nul :

Sinon K contiendrait un objet noethérien non nul M. L'enveloppe injective de M serait contenue dans K et admettrait une décomposition en somme directe d'injectifs indécomposables, ce qui est contraire au caractère maximal de J.

THÉORÈME (KRULL - REMAK - SCHMIDT - AZUMAYA). - Soit C une catégorie abélienne satisfaisant aux axiomes (A), (B) et (C) et soit M un objet de C tel que :

a. M admet une décomposition en somme directe d'objets indécomposables :

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

b. L'anneau des endomorphismes de chaque facteur M_i est un anneau local, i.e. la somme de deux éléments non inversibles est non inversible.

Alors les assertions suivantes sont vraies :

a. Pour tout endomorphisme idempotent non nul f de M, il y a au moins un i tel que f induise un isomorphisme de M_i sur $f(M_i)$. En outre $f(M_i)$ est facteur direct de M et tout facteur direct indécomposable de M est isomorphe à l'un des M_i.

b. La décomposition de M en somme directe d'objets indecomposables est unique à un automorphisme près de M.

AZUMAYA [1] a demontré ce théorème dans le cas des modules. Sa demonstration est d'une merveilleuse simplicite et elle s'applique au cas général modulo quelques modifications de detail. Nous allons la recopier ici :

LEMME. - Soit R l'anneau des endomorphismes de M et soient a et b deux éléments de R tels que $a+b = 1$. Alors pour tout système fini d'indices, $i_1, \dots, i_s$ de I, il existe des sous-objets $P_1, \dots, P_s$ de M tels que :

a. Pour tout k, soit a soit b induise un isomorphisme de M_{i_k} sur P_k

b. M admet une décomposition en somme directe :

$$M = P_1 \oplus \dots \oplus P_s \oplus \left(\bigoplus_{i \neq i_k} M_i \right)$$

En effet, soit ℓ_{i_k} la projection de M sur M_{i_k} parallèlement aux autres facteurs de la decomposition de M . Alors

$$\ell_{i_1} = \ell_{i_1} \circ a + \ell_{i_1} \circ b$$

Autrement dit, soit $\ell_{i_1} \circ a$, soit $\ell_{i_1} \circ b$ induit un automorphisme sur M_{i_1}. Supposons que ce soit $\ell_{i_1} \circ a$. L'objet $P_1 = a(M_{i_1})$ est isomorphe à M_{i_1} et ℓ_{i_1} induit un isomorphisme de P_1 sur M_{i_1} . Comme $\mathrm{Ker}\, \ell_{i_1} = \bigoplus_{i \neq i_1} M_i$, on en déduit la décomposition de M en somme directe :

$$M = P_1 \oplus \left(\bigoplus_{i \neq i_1} M_i \right)$$

Sur cette nouvelle décomposition, on recommence la même opération pour M_{i_2} , et ainsi de suite : le lemme est démontré.

Ce lemme permet à AZUMAYA de demontrer la partie (a) du théorème : En effet soit $f' = 1 - f$; alors f' est idempotent et $f \circ f' = f' \circ f = 0$. Autrement dit M se décompose en somme directe :

$$M = f(M) \oplus f'(M') .$$

De plus $f(M) = \sup_J (f(M) \cap (\bigoplus_{i \in J} M_i))$, où J parcourt les parties finies de I . Il existe donc un nombre fini d'indices $i_1 , \ldots , i_s$ tel que $f(M) \cap (\bigoplus_{k=1}^{s} M_{i_k})$ ne soit pas vide.

Appliquant le lemme précédent à $a = f$, $b = f'$, on obtient une décomposition $M = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s \oplus (\bigoplus_{i \neq i_k} M_i)$. Or f' annule $f(M) \cap \left(\bigoplus_{k=1}^{s} M_{i_k} \right)$ et ne peut être un isomorphisme de $M_{i_1} \oplus \ldots \oplus M_{i_s}$ sur $P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$. On en conclut que pour au moins un k , f est un isomorphisme de M_{i_k} sur P_k ;

C.Q.F.D.

Démontrons maintenant l'unicité de la décomposition :

Soit donc $M = \bigoplus_{j \in J} N_j$ une autre décomposition de M et soit f_j la projection de M sur N_j parallèlement aux N_k , $k \neq j$. Appliquant (a) à l'idempotent f_j , on voit que f_j induit un isomorphisme d'un M_i sur N_j . Tout N_j est donc isomorphe à un M_i et la seconde décomposition satisfait également aux hypothèses du théorème. Renversant la vapeur, on en conclut que tout M_i est isomorphe à un N_j .

On considérera dans la suite deux indices de I (resp. de J) comme équivalents s'ils définissent des objets isomorphes. Les classes d'équivalence de I et de J se correspondent biunivoquement et on notera K l'ensemble de ces classes (avec abus de notation). Tout $k \in K$ définit donc une classe d'équivalence $I(k)$ de I (resp. $J(k)$ de J) dont on designera le cardinal par $\mathfrak{I}(k)$ (resp. $\mathfrak{J}(k)$) : tout revient à montrer que, pour tout $k \in K$, $\mathfrak{I}(k) = \mathfrak{J}(k)$.

Supposons d'abord <u>que</u> $\mathfrak{I}(k)$ <u>est fini</u> :

Si $j_1 \in J(k)$, soit f_1 la projection de M sur N_{j_1} parallèlement aux autres facteurs de la décomposition $M = \bigoplus_{i \in J} N_i$. Alors, d'après le lemme, f_1 est un isomorphisme d'un M_{i_1} sur N_{j_1} et on a la décomposition :

$$(1) \qquad M = M_{i_1} \oplus \left(\bigoplus_{j \neq j_1} N_j \right) .$$

Si j_1 est le seul élément de $J(k)$, on a $\mathfrak{I}(k) \geqslant \mathfrak{J}(k)$. Sinon soit $j_2 \in J(k)$ et soit f_2 la projection de M sur N_{j_2} parallèlement aux autres facteurs de (1) . Alors f_2 annule M_{i_1} et est un isomorphisme d'un M_{i_2} sur N_{j_2} . D'où :

$$(2) \qquad M = M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j \neq j_1 \\ j \neq j_2}} N_j \right)$$

Ce procédé se poursuit tant que l'on n'a pas épuisé $J(k)$. Ainsi on a $\mathfrak{I}(k) \geqslant \mathfrak{J}(k)$. De même $\mathfrak{J}(k) \geqslant \mathfrak{I}(k)$.

Supposons <u>maintenant</u> $\mathfrak{I}(k)$ <u>infini</u> :

Soit toujours f_j la projection de M sur N_j parallèlement aux autres facteurs de la décomposition : pour un $i \in I$ donné,

$$M_i = \sup_L (M_i \cap (\bigoplus_{j \in L} N_j)) \text{ , où } L \text{ parcourt les familles finies}$$

de J .

Il en résulte que $M_i \cap \operatorname{Ker} f_j$ n'est nul que pour un nombre fini de j . Pour tout i , il y a donc seulement un nombre fini de j tel que f_j soit un isomorphisme de M_i sur N_j : soit $J(i)$ l'ensemble de ces j : Quand i parcourt $I(k)$, les $J(i)$ recouvrent $J(k)$. Comme $\mathfrak{I}(k)$ est infini, on en déduit $\mathfrak{J}(k) \geq \mathfrak{I}(k)$. De même $\mathfrak{I}(k) \geq \mathfrak{J}(k)$,

C.Q.F.D.

On remarquera que <u>la classe des types de modules injectifs indécomposables</u> est un ensemble car tout injectif indécomposable est isomorphe à l'enveloppe injective d'un quotient d'un générateur de la catégorie.

Si I est un injectif indécomposable, on dira qu'un objet injectif J est <u>isotypique de type</u> I s'il est somme directe d'objets isomorphes à I . Si J est injectif le nombre de composantes de J isomorphes à I , dans une décomposition de J en somme directe d'injectifs indécomposables est <u>l'invariant de Loewy de type</u> I <u>de</u> J ou encore invariant de Kurosh-Ore.

Pour un objet quelconque M , on donne des définitions analogues en prenant l'enveloppe injective de M . Ainsi l'invariant de Loewy de type I de M se lit sur l'enveloppe injective de M , mais aussi sur une décomposition de 0 en éléments irréductibles.

5. <u>Application numéro 1 : décomposition des modules sur un anneau commutatif</u>.

Soit A un anneau à élément unité, <u>commutatif et noethérien</u>. Nous nous proposons de "classer" les A-modules (unitaires) injectifs indécomposables. Soit I un tel module.

Si M et N sont deux sous-modules non nuls de I , leurs annulateurs $\operatorname{Ann} M$ et $\operatorname{Ann} N$ sont tels que :

$$\operatorname{Ann}(M \cap N) \supset \operatorname{Ann} M + \operatorname{Ann} N \text{ .}$$

Comme $M \cap N \neq 0$, les annulateurs de sous-modules non nuls de I forment une famille filtrante d'idéaux de A. Cette famille a donc un élément maximum, qu'on notera $A(I)$.

Je dis que $A(I)$ <u>est un idéal premier de</u> A : soit en effet M un sous-module de I dont l'annulateur est $A(I)$. Si $x \in M$, l'annulateur de A_x contient l'annulateur de M et lui est donc égal ; d'où $Ax \simeq A/A(I)$.

Mais tout sous-module non nul de $A/A(I)$ a pour annulateur $A(I)$ ce qui signifie que $A(I)$ est premier,

C.Q.F.D.

Il résulte aussi de ce qui précède que I est l'enveloppe injective de $A/A(I)$ et donc que $A(I) \neq A(J)$ si $I \neq J$. En fait la réciproque est vraie ; si $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ sont des idéaux premiers distincts, les enveloppes injectives de $A/\mathfrak{p}$ et $A/\mathfrak{q}$ ne sont pas isomorphes : car sinon cette enveloppe injective commune contiendrait à la fois $A/\mathfrak{p}$ et $A/\mathfrak{q}$ et $A/\mathfrak{p} \cap A/\mathfrak{q}$ ne serait pas nul et aurait pour annulateur à la fois $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, ce qui est <u>grotesque</u>.

THÉORÈME (MATLIS). - <u>Si</u> $\mathfrak{p}$ <u>est un idéal premier de</u> A, <u>alors l'enveloppe injective de</u> $A/\mathfrak{p}$ <u>est indecomposable. La correspondance ainsi établie entre les types d'injectifs indécomposables est bijective. L'idéal premier est dit associé au module</u> M <u>si l'injectif indécomposable défini par</u> $\mathfrak{p}$ <u>intervient dans une decomposition de l'enveloppe injective de</u> M. <u>Les idéaux premiers</u> $\mathfrak{p}$ <u>associés à un module</u> M <u>sont caractérisés par la propriété suivante : il existe un sous-module de</u> M <u>isomorphe à</u> $A/\mathfrak{p}$.

Reste à prouver la caractérisation des idéaux premiers associés : d'abord supposons $\mathfrak{p}$ associé à M. L'enveloppe injective de M contient alors un injectif indécomposable I associé à $\mathfrak{p}$. Donc $I \cap M \neq 0$ et il existe un élément de $I \cap M$ dont l'annulateur est $\mathfrak{p}$.

Réciproquement soit N un sous-module de M isomorphe à $A/\mathfrak{p}$. L'enveloppe injective de M contient alors l'enveloppe injective I de N. Ainsi I est facteur direct de l'enveloppe injective de M et intervient dans une décomposition de celle-ci,

C.Q.F.D.

On retrouve de cette manière la décomposition primaire de <u>Lasker-Noether</u>. En particulier l'idéal $\mathfrak{a}$ de A est primaire si et seulement si le module $A/\mathfrak{a}$ est isotypique.

6. Modules sur un anneau non commutatif.

Soit A un anneau à élément unité, satisfaisant à la condition des chaînes ascendantes pour les idéaux à gauche. Soit I un A-module à gauche injectif indécomposable.

Si M et N sont deux sous-modules non nuls de I, leurs annulateurs, $\mathrm{Ann}\, M$ et $\mathrm{Ann}\, N$, sont des idéaux bilatères de A, et $\mathrm{Ann}(M \cap N) \supset \mathrm{Ann}\, M + \mathrm{Ann}\, N$. Comme $M \cap N \neq 0$, les annulateurs de sous-modules non nuls de I forment une famille filtrante croissante d'idéaux bilatères de A. Cette famille a donc un élément maximum, qu'on notera $A(I)$.

On voit d'abord que $A(I)$ est un idéal bilatère premier, i.e.

$$aAb \subset A(I) \Rightarrow a \in A(I) \quad \text{ou} \quad b \in A(I) \, .$$

Il revient au même de dire que l'annulateur d'un sous-module à gauche non nul de $A/A(I)$ est $\mathfrak{a}$. Et en effet soit M un sous-module de I dont l'annulateur est $A(I)$: dire que $aAb \subset A(I)$, c'est dire que $aAbM = 0$; et si $b \notin A(I)$, c'est-à-dire $bM \neq 0$, alors a annule le sous-module AbM de M, c'est-à-dire que $a \in A(I)$,

C.Q.F.D.

Je dis aussi que tout idéal bilatère premier $\mathfrak{p}$ est du type $A(I)$:

En effet soit $\bigoplus_k I_k$ une décomposition en injectifs indécomposables de l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$, et soit M_k un sous-module de I_k dont l'annulateur est $A(I_k)$. Alors $M_k \cap A/\mathfrak{p}$ est différent de 0 et a pour annulateur à la fois $\mathfrak{p}$ et $A(I_k)$, d'où $\mathfrak{p} = A(I_k)$ pour tout k, et le résultat.

Soit maintenant M un A-module unitaire à gauche arbitraire, soit I l'enveloppe injective de M et soit $I = \bigoplus_k I_k$ une décomposition de I comme somme directe de modules injectifs indécomposables. On dira qu'un idéal bilatère premier $\mathfrak{p}$ de A est associé à M s'il existe un k tel que $\mathfrak{p} = A(I_k)$. On peut alors grouper "par paquets" $J_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{A(I_k) = \mathfrak{p}} I_k$, les injectifs indécomposables associés au même idéal bilatère premier. On obtient ainsi une décomposition de I, unique à un automorphisme près, du type : $I = \bigoplus_{\mathfrak{p}} J_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers associés à M.

En particulier si $M_{\mathfrak{p}} = M \cap (\bigoplus_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} J_{\mathfrak{q}})$, on a évidemment l'égalité : $(0) = \bigcap_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers associés à M . En outre la décomposition est "irrédondante" et $M/M_{\mathfrak{p}}$ a $\mathfrak{p}$ pour seul idéal bilatère premier associé. Réciproquement si M est de type fini toute représentation irrédondante de (0) comme intersection d'un nombre fini de sous-modules $M_{\mathfrak{p}}$ (tels que $\mathfrak{p}$ soit le seul idéal premier associé à $M/M_{\mathfrak{p}}$) donne une décomposition de I en somme directe. La proposition suivante est en outre assez claire :

PROPOSITION. - <u>L'idéal bilatère premier</u> $\mathfrak{p}$ <u>est associé à</u> M <u>si et seulement si</u> M <u>possède un sous-module non nul</u> N <u>tel que</u> $\mathfrak{p}$ <u>soit l'annulateur de</u> N <u>et de tous les sous-modules non nuls de</u> N .

On retrouve donc par un procédé différent tous les résultats de Lesieur-Croisot sur la "décomposition tertiaire" [3] .

Nous nous proposons maintenant de voir sous quelles conditions la théorie obtenue n'est pas "plus fine" que la théorie de Lesieur-Croisot, c'est-à-dire quand la correspondance établie entre injectifs indécomposables et idéaux bilatères premiers est bijective. Nous supposerons pour cela que <u>l'hypothèse</u> H <u>est satisfaite</u> :

(H) <u>Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>est un idéal à gauche de</u> A <u>et si</u> $\mathfrak{p}$ <u>est l'annulateur de</u> $A/\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{p}$ <u>est le plus grand idéal bilatère de</u> A <u>contenu dans</u> $\mathfrak{p}$) , <u>alors il existe un nombre fini</u> $x_1 , \ldots , x_r$ <u>d'éléments de</u> $A/\mathfrak{a}$ <u>tels que</u>

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{i=r} \operatorname{Ann} x_i$$

(Ann x_i, <u>annulateur de</u> x_i , <u>est un ideal à gauche de</u> A) .

Si la condition (H) est satisfaite, je dis que, pour tout injectif indécomposable I , le module <u>à gauche</u> $A/A(I)$ <u>est isotypique</u>. De façon plus précise l'enveloppe injective de $A/A(I)$ est somme directe d'un nombre fini de modules isomorphes à I :

Soit en effet M un sous-module de I dont l'annulateur est $A(I)$. Si $x \in M$, l'annulateur Ann x de l'élément x de M est un idéal à gauche de A , et on a manifestement :

$$A(I) = \bigcap_{x \neq 0} \operatorname{Ann} x .$$

Mais il résulte de H que $A(I)$ est intersection d'un nombre fini de $\mathrm{Ann}\, x$, soit $\mathrm{Ann}\, x_1 , \dots , \mathrm{Ann}\, x_r$ et il existe un monomorphisme de $A/A(I)$ dans une somme directe finie $\bigoplus_{i=1}^{i \geq r} Ax_i$. L'enveloppe injective de cette somme est isotypique : d'où le résultat.

PROPOSITION. - Si la condition (H) est satisfaite, la correspondance entre injectifs indécomposables et idéaux bilatères est bijective.

Il reste à donner des exemples où la condition (H) a lieu :

a. Tous les idéaux à gauche sont bilatères :

Soit par exemple σ un automorphisme d'un corps commutatif k et soit $k_\sigma[[T]]$ l'anneau suivant (séries formelles de Hilbert) :

Le groupe abélien sous-jacent est le groupe abélien des séries formelles sur k ; la multiplication est la suivante :

$$\Big(\sum_{i\geq 0} a_i\, T^i\Big)\Big(\sum_{j\geq 0} b_j\, T^j\Big) = \sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{i+j=k} a_i\, \sigma^{i}(b_j)\, T^k\Big)$$

Les idéaux à gauche de $k_\sigma[[T]]$ sont principaux et engendrés par 1, ou T, ou T^2, ..., ou T^n, ... : ces idéaux sont bilatères.

b. L'anneau A est artinien à gauche :

Le radical de Jacobson $r(A)$ de A est alors nilpotent et tout idéal bilatère premier contient $r(A)$. Les idéaux ~~bilatères~~ premiers de A correspondent donc biunivoquement à ceux de l'anneau simple $A/r(A)$, c'est-à-dire aux représentations irréductibles de l'anneau A.

c. A est un module de type fini sur son centre :

Si M est un module à gauche de type fini sur A et si $x , y \in M$, alors $\mathrm{Ann}\, x$ et $\mathrm{Ann}\, y$ sont des idéaux à gauche de A. Désignant par $|x)$ et $|y)$ l'ensemble des éléments de M qui sont annulés par $\mathrm{Ann}\, x$ et $\mathrm{Ann}\, y$, on voit que $|x)$ et $|y)$ sont des modules de type fini sur le centre $z(A)$ de A. En outre :

$$\mathrm{Ann}(|x) + |y)) = \mathrm{Ann}\, x + \mathrm{Ann}\, y$$

Comme M est un $z(A)$-module noethérien, il existe un nombre fini $x_1 , \dots , x_r$ d'éléments de M tels que

$$|x_1) + \dots + |x_r) = M \; .$$

La condition (H) est donc satisfaite.

Si par exemple G est un groupe fini, et si $A = \mathbb{Z}[G]$ est l'algèbre du groupe, ce qui précède s'applique. Les idéaux bilatères premiers $\mathfrak{p}$ sont alors de deux types :

- soit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$: ces idéaux correspondent aux idéaux bilatères premiers de l'anneau semi-simple $\mathbb{Q}[G]$.
- soit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$, où p est un nombre premier : ces idéaux correspondent aux représentations irréductibles de $(\mathbb{Z}|(p))[G]$.

d. <u>Un contrexemple</u> :

Soit K un corps gauche, k son centre et soit $A = K[X] = K \otimes_k k[X]$ l'anneau des polynômes sur K. La division euclidienne reste valable dans un tel anneau, et il en résulte que tout <u>idéal à gauche (ou à droite) de</u> $K[X]$ <u>est monogène</u>. Les idéaux bilatères sont alors les idéaux à gauche engendrés par un élément f de $k[X]$ et un tel idéal est premier si et seulement si f est irréductible dans $k[X]$.

Si maintenant K est un espace <u>vectoriel de dimension finie sur</u> k , l'hypothèse (H) est satisfaite et les injectifs indécomposables sur $K[X]$ correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de $k[X]$: par exemple si K est le corps des quaternions, k le corps des nombres réels, $X^2 + 1$ est irréductible dans $k[X]$ et les idéaux à gauche de $K[X]$ qui contiennent $X^2 + 1$ sont de la forme $(X - \alpha i - \beta j - \gamma k)$, avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Supposons au contraire que K contienne un a tel que $k(a)$ ne soit pas fini sur k : Alors l'idéal à gauche $(X - a|$ engendré par $X - a$ ne contient aucun idéal bilatère non nul (sinon a serait algébrique sur k). Ainsi si I est l'enveloppe injective de $K[X] \,|\, (X - a|$, I est indécomposable et $A(I) = 0$. Par contre I n'est pas isomorphe au corps des quotients à gauche de $K[X]$. Donc :

<u>En général, la correspondance entre injectifs indécomposables et idéaux bilatères premiers n'est pas bijective.</u>

Il resterait évidemment à construire un K contenant a tel que la condition précédente soit satisfaite : "choisissant bien k et σ " on peut prendre pour K le corps des quotients (à gauche) de $k_\sigma[[T]]$: corps des séries formelles de Hilbert (ce fait m'a été indiqué par J.-P. SERRE).

7. Lemmes. - Nous aurons besoin dans la suite des résultats suivants :

- Si A est un anneau commutatif, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et $\mathfrak{a}$ un idéal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Si E est l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$, l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$ considéré comme $A/\mathfrak{a}$-module à gauche est $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E) = E'$:

En effet $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E) \subset E$ et est donc extension essentielle de $A/\mathfrak{p}$. Reste à montrer que E' est $A/\mathfrak{a}$-injectif : soit donc $u : M \longrightarrow N$ un monomorphisme de $A/\mathfrak{a}$-modules et soit $v : M \longrightarrow E'$ un morphisme de M dans N. On peut considérer u et v comme des morphismes de A-modules et par conséquent v se prolonge en $w : N \longrightarrow E$. Mais comme N est annulé par $\mathfrak{a}$, $w(N)$ est annulé par $\mathfrak{a}$ et $w(N) \subset E'$,

C.Q.F.D.

- Si A est un anneau commutatif (noethérien), $\mathfrak{p}$ un idéal premier et $\mathfrak{q}$ un idéal irréductible $\mathfrak{p}$-primaire. Alors il existe un n tel que $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q}$: le résultat est classique.

- Si A est un anneau local commutatif (noethérien), $\mathfrak{p}$ son idéal maximal, soit E l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$. On munira A de la filtration $\mathfrak{p}$-adique :

$$A \supset \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{p}^k \supset \dots$$

et E de la cofiltration

$$0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k \subset \dots \quad \text{où } E_k = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}^k, E) .$$

Tout élément de E étant annulé par une puissance de $\mathfrak{p}$, E est la réunion des E_k. Je dis qu'en outre $E_1 \simeq A/\mathfrak{p} = k$: En effet E_1 est un espace vectoriel sur k et 0 n'est donc irréductible que si l'espace vectoriel a pour dimension 1.

De la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A/\mathfrak{p}^k, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A/\mathfrak{p}^{k+1}, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{p}^k/\mathfrak{p}^{k+1}, E) \longrightarrow 0$$

et du fait que $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{p}^k/\mathfrak{p}^{k+1}, E) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{p}^k/\mathfrak{p}^{k+1}, k)$, on déduit que :

(1) $$E_{k+1}/E_k = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{p}^k/\mathfrak{p}^{k+1}, k)$$

En outre si l'on note

$$G(E) = \bigoplus_k (E_{k+1}/E_k) ,$$

$G(E)$ est muni d'une structure de module gradué sur le gradué $G(A)$ associé à A (Poser $(G(E))_i = E_{-i+1}/E_{-i}$, si $i \leq 0$, $G(E)_i = 0$ sinon).

On vérifie facilement que $G(E)$ est extension essentielle (en tant que module gradué) du $G(A)$-module gradué $k \simeq A/\mathfrak{p}$. Il résulte alors de la formule (1) que $G(E)$ est l'enveloppe injective du $G(A)$-module gradué k .

8. Application numéro 2 : dualité pour les modules sur un anneau commutatif.

Soit A un anneau commutatif, noethérien, à élément unité, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A , E l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$. Le module injectif E est alors indécomposable.

On se propose d'étudier le foncteur :

$$\delta : M \Longrightarrow M' = \mathrm{Hom}_A(M , E)$$

Le foncteur δ est évidemment exact et il en va de même du foncteur

$$\delta^2 : M \Longrightarrow M'' = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M , E), E)$$

En outre M s'applique de la façon habituelle dans son "bidual" M'' et l'application ainsi définie et un morphisme φ du foncteur identité dans le foncteur $M \Longrightarrow M''$. Nous nous proposons d'étudier ce morphisme.

On remarque d'abord que $A'' = \mathrm{Hom}_A(E , E)$ est l'anneau des endomorphismes de E . La formule $M'' = \mathrm{Hom}_A(M' , E)$ fait alors de M'' un A''-module à gauche et le morphisme φ est composé des morphismes de foncteur

$$\psi : M \longrightarrow A'' \otimes_A M$$

et

$$\chi : A'' \otimes_A M \longrightarrow M''$$

Le foncteur $M \rightsquigarrow A'' \otimes_A M$ est exact à droite, et si $M = A$, χ est un isomorphisme de $A'' \otimes_A A$ sur A''. On en déduit, par un procédé connu que χ est un isomorphisme de foncteurs quand M parcourt les A-modules de type fini : En effet il existe alors une suite exacte :

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 ,$$

où L_1 et L_0 sont des modules libres. On en déduit le diagramme,

$$\begin{array}{ccccccc}
A'' \otimes_A L_1 & \longrightarrow & A'' \otimes_A L_0 & \longrightarrow & A'' \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \bar{\chi}_1 & & \downarrow \bar{\chi}_0 & & \downarrow \bar{\chi} & & \\
L''_1 & \longrightarrow & L''_0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où $\bar{\chi}_1$ et $\bar{\chi}_0$ sont des isomorphismes. D'où le résultat.

Il reste donc à étudier l'anneau $A'' = \mathrm{Hom}_A(E , E)$. Mais si $a \in A$ et $a \notin \mathfrak{p}$, alors l'homothétie de E de rapport a induit un monomorphisme sur $A/\mathfrak{p}$ et donc un monomorphisme de E. Le module aE est donc isomorphe à E, c'est-à-dire injectif, c'est-à-dire facteur direct de E, c'est-à-dire égal à E : a définit un automorphisme de E. Ainsi l'homomorphisme de A dans A'' se prolonge en un homomorphisme du localisé $A_{\mathfrak{p}}$ dans A'' : on considérera que E est un $A_{\mathfrak{p}}$-module.

En outre si M est un $A_{\mathfrak{p}}$-module, on a évidemment l'égalité :

$$\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M , E) = \mathrm{Hom}_A(M , E)$$

D'où il résulte que E est aussi un $A_{\mathfrak{p}}$-module injectif, ou encore que E est aussi l'enveloppe injective du $A_{\mathfrak{p}}$-module $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} . A_{\mathfrak{p}}$: On pourra donc toujours supposer que <u>l'anneau A est local et que $\mathfrak{p}$ est son idéal maximal.</u>

Dans ce cas, nous munirons A de sa filtration $\mathfrak{p}$-adique et nous poserons $E_n = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}^n , E)$. Le module E_n est l'ensemble des éléments de E qui sont annulés par $\mathfrak{p}^n$. D'après ce que l'on a vu c'est aussi l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$ considéré comme $(A/\mathfrak{p}^n)$-module. Enfin tout sous-module monogène de E est de la forme $A/\mathfrak{q}$ où $\mathfrak{q}$ est un idéal irréductible associé à $\mathfrak{p}$. Le module E est donc réunion filtrante croissante des sous-modules E_n (stables pour tout automorphisme de E) :

$$E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$$

On déduit de ceci que $\mathrm{Hom}_A(E, E)$ est la limite projective des $\mathrm{Hom}_A(E_n, E_n)$ et il suffit d'étudier ces derniers anneaux (i.e. on est ramené au cas où A est "primaire").

Je dis d'abord que $E_0 \simeq K = \mathrm{Fract}(A/\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}$: en effet E_0 est un espace vectoriel sur K et 0 ne peut être irréductible que si cet espace vectoriel est de dimension 1 :

Ainsi

$$\mathrm{Hom}_A(E_0, E_0) = \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{p}}(E_0, E_0) = A/\mathfrak{p} .$$

Je dis que plus généralement $\mathrm{Hom}_A(E_n, E_n) = A/\mathfrak{p}^n$: en effet l'assertion est vraie pour $n = 0$. Supposons la donc vraie pour $n = m - 1$. Pour $n = m$, elle résulte alors de ce que

$$\mathrm{Hom}_A(E_n, E_n) = \mathrm{Hom}_A(E_n, E)$$

et du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1} & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}^{n+1} & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}^n & \longrightarrow & 0 \\ & & u\downarrow & & v\downarrow & & w\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(E_{n+1}|E_n, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(E_{n+1}, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(E_n, E) & \longrightarrow & 0 , \end{array}$$

où u et v sont des isomorphismes.

Ainsi

$$A'' = \mathrm{Hom}_A(E, E) = \varprojlim A/\mathfrak{p}^n = \hat{A}$$

THÉORÈME. - <u>Si</u> A <u>est un anneau commutatif, noethérien, à élément unité,</u> $\mathfrak{p}$ <u>un idéal premier de</u> A <u>et</u> E <u>l'enveloppe injective de</u> $A/\mathfrak{p}$, <u>alors</u> E <u>est un module sur</u> $A_{\mathfrak{p}}$ <u>et sur</u> $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ <u>et c'est aussi l'enveloppe injective de</u> $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$ <u>et</u> $\hat{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot \hat{A}_{\mathfrak{p}}$ <u>considérés comme module sur</u> $A_{\mathfrak{p}}$ <u>et</u> $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$. <u>En outre si</u> M <u>est un</u> A-<u>module de type fini, alors</u> M'' <u>s'identifie à</u> $\hat{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_A M = \hat{M}_{\mathfrak{p}}$ <u>et le morphisme</u> $\varphi(M) : M \longrightarrow M''$ <u>s'identifie au morphisme canonique de</u> M <u>dans</u> $\hat{M}_{\mathfrak{p}}$.

Pour les notations voir SERRE [9] .

Ainsi si M est un module de type fini sur $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$, M s'identifie à M" . Nous nous proposons maintenant d'étudier les duaux M' de ces modules : pour cela nous pouvons toujours supposer que A <u>est un anneau local complet et que</u> $\mathfrak{p}$ <u>est son idéal maximal</u>.

Le dual de A^n est E^n et le dual d'un quotient de A^n est un sous-module de E^n . Reciproquement si M est un sous-module de E^n , je dis que M s'identifie à son bidual M" :

Ceci est clair en effet quand A <u>est primaire</u> (local artinien) car alors E est de longueur finie (voir le gradué associé) et M est alors de type fini.

Dans le cas général il suffit de montrer que $M \cap E^n_p = M'' \cap E^n_p$ pour tout p . Mais "le foncteur bidual" étant exact, le bidual de $M \cap E^n_p$ n'est autre que $M'' \cap (E^n_p) = M'' \cap E^n_p$. En outre

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M \cap E^n_p, E), E) = \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{p}^p}(\mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{p}^p}(M \cap E^n_p, E_p), E_p) ,$$

et on est donc ramené au cas où A est primaire.

La correspondance $M \Rightarrow M'$ met donc en dualité les modules noethériens sur l'anneau local complet A et les modules isomorphes à un sous-module d'une somme directe finie E^n . Je dis que ces derniers sont les A-<u>modules artiniens</u> :

En effet si $M \subset E^n$, alors $M' = \mathrm{Hom}(M, E)$ et les sous-modules de M correspondent aux quotients de M' . Comme M' est noethérien, les sous-modules satisfont à la condition des chaînes descendantes.

Réciproquement, si M est artinien, tout sous-module monogène de M est de longueur finie et $\mathfrak{p}$ est le seul idéal premier associé à M . L'enveloppe injective de M est donc une somme directe de modules isomorphes à E et l'on voit facilement que cette somme est nécessairement finie, d'où le résultat.

THÉORÈME (MATLIS). - <u>Si</u> A <u>est un anneau local complet, et</u> M <u>est un</u> A-<u>module, alors l'homomorphisme canonique de</u> M <u>dans</u> M" <u>est un isomorphisme si</u> M <u>est noethérien, ou si</u> M <u>est artinien. Si</u> M <u>est noehtérien,</u> M' <u>est artinien et réciproquement</u>.

Dans cette dualité, injectifs et projectifs s'échangent de même que résolutions injectives minimales et résolutions projectives minimales.

De même de la formule

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N , E) = \mathrm{Hom}_A(M , \mathrm{Hom}_A(N , E))$$

on déduit

$$(\mathrm{Tor}_p^A (M , N))' = \mathrm{Ext}_A^p(M , N')$$

Nous allons maintenant faire le lien avec quelques exemples historiques :

a. Dualité de Pontrjagin : $A = \mathbb{Z}$. On prend pour E non pas un injectif indécomposable, mais la somme directe $\bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}$, où p parcourt les nombres premiers.

b. Dualité de Macaulay : Soit A un anneau local noehtérien d'égale caractéristique, qu'on peut supposer complet, soit $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de A et soit K un corps de Cohen de A (i.e. $K \subset A$ et $K \simeq A/\mathfrak{p}$)

A tout module M noethérien muni d'une filtration $\mathfrak{p}$-bonne $(M_i)_{i \geqslant 0}$, (voir SERRE [9]), on associe alors la limite

$$M' = \varinjlim_i \mathrm{Hom}_K(M/M_i , K) = \sup_i \mathrm{Hom}(M/M_i , K) .$$

Chaque M/M_i étant un A-module, M' est muni d'une structure de A-module et il est clair que M' ne dépend pas de la filtration $\mathfrak{p}$-bonne choisie. En particulier si

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de A-modules noethériens, on munira N et P de la filtration $\mathfrak{p}$-adique et M de la filtration induite par N. On a ainsi des suites exactes :

$$0 \longrightarrow M/M_i \longrightarrow N/N_i \longrightarrow P/P_i \longrightarrow 0 ,$$

avec $N_i = \mathfrak{p}^i N$, $P_i = \mathfrak{p}^i P$ et $M_i = M \cap \mathfrak{p}^i N$, d'où

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow P' \longrightarrow 0$$

et le foncteur $M \Rightarrow M'$ est exact.

D'autre part on a, pour tout i les formules :

$$\mathrm{Hom}_K(M/\mathfrak{p}^iM , K) = \mathrm{Hom}_k(M \otimes_A A/\mathfrak{p}^i , K) = \mathrm{Hom}_A(M , \mathrm{Hom}_K(A/\mathfrak{p}^i , K)) ,$$

d'où, pour les limites inductives :

$$M' = \mathrm{Hom}_A(M , A')$$

De l'exactitude du foncteur $M \Rightarrow M'$ résulte alors que A' est un A-module injectif. En outre A' contient $A/\mathfrak{p} \simeq \mathrm{Hom}_K(A/\mathfrak{p} , K)$ et contient donc l'enveloppe injective E de $A/\mathfrak{p}$. En outre

$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}^i , E)$ et $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}^i , A') = \mathrm{Hom}_K(A/\mathfrak{p}^i , K)$ ont manifestement même longueur d'où $A' = E$.

MACAULAY se servait de la dualité ainsi construite lorsque $A = k[[X_1 , \dots X_n]]$. On retrouve alors la construction du paragraphe 3 f) . Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A , MACAULAY appelait <u>inverse system</u> de $\mathfrak{a}$ le module $\mathfrak{a}^{-1} = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a} , E) \subset E$.

On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les idéaux de A et les sous-modules de E . Les formules suivantes sont valables (elles valent aussi dans le cas d'inégale caractéristique) :

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{-1} = \mathfrak{a}^{-1} \cap \mathfrak{b}^{-1} \quad \text{et} \quad (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^{-1} = \mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{b}^{-1}$$

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})^{-1} = \mathfrak{b} . (\mathfrak{a}^{-1})$$

Cette dernière formule signifie que l'on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})^{-1} \longrightarrow \mathfrak{a}^{-1} \longrightarrow \mathfrak{a}^{-1} \otimes_A A/\mathfrak{b} \longrightarrow 0$$

et en effet la suite duale n'est autre que

$$0 \longleftarrow A/(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \longleftarrow A/\mathfrak{a} \longleftarrow \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}^{-1} \otimes_A A/\mathfrak{b} , E) \longleftarrow 0 ,$$

où le dernier terme vaut $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b} , \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}^{-1} , E)) = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b} , A/\mathfrak{a})$

La deuxième suite est exacte et il en va donc de même de la première.

Si M est un sous-module de E , l'idéal qui lui correspond est l'annulateur de M et deux sous-modules distincts ont donc des annulateurs distincts. En particulier, si $\mathfrak{q}$ est un idéal $\mathfrak{p}$-primaire irréductible, $A/\mathfrak{q}$ se plonge dans E et a même annulateur que $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{q}, E)$. On en déduit l'assertion :

<u>Si</u> $\mathfrak{q}$ <u>est un idéal</u> $\mathfrak{p}$<u>-primaire de</u> A, <u>alors</u> $\mathfrak{q}^{-1}$ <u>est monogène si et seulement si</u> $\mathfrak{q}$ <u>est irréductible</u>.

Macaulay déduisait de ce fait de nombreux résultats, dont celui-ci : si $\mathfrak{q}$ est $\mathfrak{p}$-primaire et irréductible et si $\lambda(\mathfrak{a})$ désigne la longueur du module $A/\mathfrak{a}$, si enfin $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{q}$, alors

$$\lambda(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{a}) + \lambda((\mathfrak{q} : \mathfrak{a}))$$

En effet $\lambda((\mathfrak{q} : \mathfrak{a}))$ n'est autre que la longueur du module $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{q}^{-1}$ qui est isomorphe à $\mathfrak{a} + \mathfrak{q}/\mathfrak{q}$, car $A/\mathfrak{q} \simeq \mathfrak{q}^{-1}$. La forme résulte alors de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{q} \longrightarrow A/\mathfrak{q} \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0 .$$

c. <u>Dualité de Gröbner</u>. On a vu que si $\mathfrak{q}$ était irréductible, $A/\mathfrak{q}$ s'identifiait à $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{q}, E)$ c'est-à-dire à l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$ considéré comme $A/\mathfrak{q}$-module.

Ainsi si A est primaire et si (0) est irréductible dans A, alors $E = A' \simeq A$ et si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A,

$$\mathfrak{a}^{-1} = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E) = (0 : \mathfrak{a})$$

Quelques années après MACAULAY, GRÖBNER se servait de cette "dualité" pour étendre aux anneaux abstraits quelques résultats de Macaulay sur les anneaux de polynômes.

d. <u>Dualité de Grothendieck</u>. Soient A un anneau local régulier de dimension n, $\mathfrak{p}$ son idéal maximal et $k = A/\mathfrak{p}$.

On sait alors que $\mathrm{Ext}_A^p(k, A) = 0$ si $p < n$ et $\mathrm{Ext}_A^n(k, A) \simeq k$
Voir Serre [9].

On en déduit facilement par récurrence sur la longueur du module de longueur finie L que

$$\mathrm{Ext}_A^p(L, A) = 0 \text{ si } p < n \text{ et}$$

$$\ell(\mathrm{Ext}_A^n(L\ ,\ A)) = \ell(L) \qquad (\ell(L) = \text{longueur de } L)\ .$$

En outre si J est un idéal de A annulant L, l'"internal product" de Cartan-Eilenberg [2] :

$$\mathrm{Ext}_A^n(L\,,A) = \mathrm{Ext}_A^n(L \otimes_A A/J\ ,\ A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L\,,\mathrm{Ext}_A^n(A/J\ ,\ A))$$

est un isomorphisme (vérification par récurrence sur $\ell(L)$) .

Si maintenant M est un A-module de type fini unitaire quelconque, on définira M' par la formule

$$M' = \varinjlim_i \mathrm{Ext}_A^n(M/\mathfrak{p}^i M\,,A) = \varinjlim \mathrm{Hom}_A(M\,,\mathrm{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}^i,\ A)) = \mathrm{Hom}_A(M\,,\varinjlim \mathrm{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}^i\ ,\ A))\ .$$

Si (M_i) est une filtration $\mathfrak{p}$-bonne de M, on a évidemment aussi

$$M' = \varinjlim_i \mathrm{Ext}_A^n(M/M_i\ ,\ A)\ .$$

On en déduit comme en (b), que le foncteur $M \Longrightarrow M'$ est exact, c'est-à-dire que

$$A' = \varinjlim_i \mathrm{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}^i\ ,\ A) \quad \text{est injectif.}$$

D'autre part A' contient $A/\mathfrak{p} \simeq \mathrm{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}\ ,\ A)$ et contient donc l'enveloppe injective E de $A/\mathfrak{p}$. Mais comme $\mathrm{Ext}_A^n(A/\mathfrak{p}^i\ ,\ A)$ a même longueur que $E_i = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}^i\ ,\ A)$ on en déduit que A' est l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$.

9. Application numéro 3 : faisceaux quasi-cohérents.

Soit V une variété algébrique, $\mathcal{O}$ son faisceau d'anneaux locaux, W une sous-variété de V et $\mathcal{J}$ le faisceau d'idéaux définissant W . Le faisceau $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ est alors le faisceau d'anneaux locaux de W . Je dis que l'intersection de deux sous-faisceaux non nuls F et G de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ n'est pas nulle. En effet on voit facilement que le support de F et de G est nécessairement W tout entier. Si donc U est un ouvert affine de V rencontrant W , $F/U \neq 0$, $G/U \neq 0$ et ces faisceaux sont contenus dans $(\mathcal{O}/\mathcal{J})|U$: on ne peut donc avoir $(F|U) \cap (G|U) = 0$ (pour un ouvert affine, faisceau quasi-cohérent "signifie" module).

Ainsi l'enveloppe injective $E(W)$ de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ est indécomposable. Nous allons la "construire" : pour cela soit U un ouvert affine rencontrant W , soit A

l'algèbre affine de U et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A définissant W. Alors $(\mathcal{O}/\mathcal{J})|U$ est le faisceau associé au module $A/\mathfrak{p}$ sur A. Si i désigne l'injection canonique de U dans V et E le faisceau associé à l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$ (c'est aussi l'enveloppe injective de $(\mathcal{O}/\mathcal{J})|U)$, l'image directe $i_*(E)$ de E dans V est injective et elle est *manifestement indécomposable*. Je dis que c'est l'enveloppe injective de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$, c'est-à-dire que le morphisme canonique de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ dans $i_*(E)$ est un monomorphisme :

Et en effet ce morphisme est composé du morphisme de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ dans $i_*((\mathcal{O}/\mathcal{J})|U)$ et du monomorphisme de ce dernier dans $i_*(E)$. Il suffit de vérifier que le premier morphisme est injectif et cette verification est de nature locale.

Par conséquent toute sous-variété W de V définit un faisceau quasi-cohérent injectif indécomposable et deux sous-variétés distinctes définissent des injectifs distincts (ne serait-ce que pour une question de supports). Réciproquement tout faisceau injectif indécomposable est du type $E(W)$:

En effet si (U_k) est un recouvrement fini de V par des ouverts affines, on sait que tout faisceau quasi-cohérent F de V se plonge dans une somme directe $\bigoplus_k E_k$, où E_k est l'image directe dans V d'un faisceau injectif de U_k. De par sa construction même E_k ne fait intervenir que des injectifs du type $E(W)$ et il en va donc de même de F si F est injectif (KRULL - REMAK - SCHMIDT - AZUMAYA).

THÉORÈME. - *Les faisceaux quasi-cohérents injectifs indécomposables de* V *correspondent biunivoquement aux sous-variétés de* V.

COROLLAIRE 1. - *Si* U *est un ouvert de* V *et si* E *est un faisceau quasi-cohérent injectif de* V, *alors* E/U *est injectif sur* U.

Il suffit en effet de faire la démonstration quand E est indécomposable.

COROLLAIRE 2. - *Soit* (U_k) *un recouvrement fini de* V *par des ouverts, et soit* F *un faisceau quasi-cohérent de* V. *Les deux propositions suivantes sont alors équivalentes* :

a. F *est injectif.*

b. *Chaque* F/U_k *est injectif sur* U_k.

Reste à montrer que b. $\Rightarrow$ a. : soit donc E l'enveloppe injective de F. Il suffit de montrer que $E = F$, c'est-à-dire que pour tout k, le morphisme de F/U_k dans E/U_k est surjectif : ceci résulte du corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. - *Si* U *est un ouvert de* V, F *un faisceau de* V *et* E *son enveloppe injective. Alors* E/U *est l'enveloppe injective de* F/U.

Soit en effet E' l'enveloppe injective de F/U. Alors E' est facteur direct de E/U et $i_*(E')$ est facteur direct de $i_*(E/U)$, où i est l'injection de U dans V. Mais le morphisme de F dans $i_*(E/U)$ passe par $i_*(E')$ et comme $i_*(E/U)$ est facteur direct de E, ceci n'est possible que si $i_*(E') = i_*(E/U)$, c'est-à-dire $E' = E/U$ (car E est extension essentielle de F).

COROLLAIRE 4. - *Si* V *est une variété sans singularité de dimension* n *et si* F *et* G *sont deux faisceaux quasi-cohérents de* V, *alors* $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(F, G) = 0$ *si* $p > n$.

En effet le corollaire 2 signifie que $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(F, G)$ est nul pour tout F si $p \geq 1$ si et seulement si $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(F, G)$ est nul pour tout F et tout $p \geq 1$.

Je dis que, plus généralement, les assertions suivantes sont équivalentes :

a. $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(F, G)$ est nul pour tout F si $p \geq k$.

b. $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(F, G)$ est nul pour tout F si $p \geq k$.

Ceci est vrai si $k = 1$. Supposons le vrai pour $k < \ell$ et montrons le pour $k = \ell$. Soit pour cela

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow I \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents tels que I soit injectif. Si $p > 1$, $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(F, G) = \mathcal{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}}(F, H)$ et $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(F, G) = \mathrm{Ext}^{p-1}_{\mathcal{O}}(F, H)$; si $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(F, G) = 0$ pour $p \geq \ell$, $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(F, H)$ sera nul pour $p \geq \ell - 1$. On aura donc $\mathrm{Ext}^{p-1}_{\mathcal{O}}(F, H) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(F, G) = 0$ pour $p-1 \geq \ell - 1$, i.e. $p \geq \ell$. L'implication inverse est immédiate.

Le corollaire 4 résulte donc de ce que $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(F, G) = 0$ si $p > n$.

J. P. SERRE m'a indiqué que le corollaire 4 résultait aussi de la suite spectrale

$$H^q(V, \mathcal{E}xt^p_V(F, G)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_V(F, G),$$

module la propriété suivante, de démonstration facile :

Si F et G sont des faisceaux quasi-cohérents de V (variété non singulière de dimension n, alors le support de $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^p_V(F, G)$ est de dimension $\leq n - p$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZUMAYA (Gorô). - Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem, Nagoya math. J., t. 1, 1950, p. 117-124.

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19)

[3] CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des idéaux dans les anneaux et les demi-groupes non nécessairement commutatifs, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57 : Algèbre et théorie des nombres, exposé 22.

[4] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1, 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[5] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

[6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, II, Math. Annalen, t. 134, 1958, p. 458-476.

[7] MATLIS (Eben). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 511-528.

[8] Séminaire CHEVALLEY. - Variétés abéliennes et variétés de Picard, t. 3, 1958/59. [les injectifs considérés dans ce Séminaire ne sont pas les mêmes qu'ici ; pour les faisceaux quasi-cohérents, ils donnent pourtant "la même homologie"].

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale - Multiplicités, Cours professé au Collège de France, 1957/58.