Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Léonce Lesieur

Sur les anneaux premiers noethériens

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, nº 2 (1958-1959), exp. nº 16, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_2_A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL,
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1958/59
-:-:-:-

23 février 1959

SUR LES ANNEAUX PREMIERS NOETHÉRIENS

par Léonce LESIEUR

1. Introduction.

On rappelle qu'un anneau premier est un anneau A dans lequel la condition $a A b = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$ (1) . On suppose dans toute la suite l'anneau unitaire, c'est-à-dire muni d'un élément unité. La notion d'anneau d'intégrité, ou sans diviseurs de zéro ($ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$) est un cas particulier de celle d'anneau premier. Dans le cas commutatif, les deux notions coïncident. Bien entendu, l'anneau A est ici un anneau non nécessairement commutatif. A est noethérien (resp. artinien) à gauche si la condition maximale (resp. minimale) est vérifiée pour les idéaux à gauche de A . Je me propose d'exposer certains résultats nouveaux sur les anneaux noethériens premiers obtenus en collaboration avec R. CROISOT, et qui doivent faire l'objet d'une publication prochaine. Les resultats principaux portent sur une classe d'idéaux à gauche que nous appelons fermés (cf. paragraphe 4) , qui comprennent comme cas particulier tous les annulateurs à gauche, qui vérifient la condition de chaîne descendante, et qui jouent un rôle important dans l'étude des décompositions de l'idéal nul comme intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles.

2. Anneaux artiniens.

On sait qu'un anneau artinien unitaire est noethérien. (cf. N. BOURBAKI, [1], p. 72)) , de sorte que les anneaux artiniens premiers constituent un cas particulier d'anneaux noethériens premiers. Leur structure est d'ailleurs bien connue : (cf. N. JACOBSON, [6], p. 39) un anneau artinien premier est isomorphe

---

(1) Cette condition équivaut à la suivante qui exprime que l'idéal nul est premier, et qui porte sur un produit d'idéaux bilatères B et C :

$$BC = 0 \text{ implique } B = 0 \text{ ou } C = 0 .$$

(cf. N. H. McCOY [9]) .

à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps K, c'est-à-dire isomorphe à l'anneau $M_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n à éléments dans K. Cet anneau est donc simple, en ce sens qu'il n'admet pas d'autres idéaux bilatères que (0) et A. Donnons quelques propriétés des idéaux à gauche d'un anneau artinien premier qui seront susceptibles de nous éclairer dans le cas noethérien.

PROPRIÉTÉ 1. - Tout idéal d'un anneau d'Artin premier est 0-premier à droite.

D'après la définition donnée par L. LESIEUR et R. CROISOT [8], p. 97, l'idéal à gauche X est 0-premier à droite si on a :

$$a\,A\,b \subseteq X\ ,\quad b \notin X \Longrightarrow a = 0\ .$$

Supposons $a \neq 0$; l'anneau A étant simple l'idéal bilatère (a) engendré par a est l'idéal impropre A. Il existe donc des éléments b_i et c_i tels que :

$$1 = \sum_{i=1}^{i=k} b_i\, a\, c_i$$

d'où

$$x = \sum_{i=1}^{i=k} b_i\, a\, c_i\, x \in X\ .$$

Nous avons même pour tout idéal une propriété plus forte :

PROPRIÉTÉ 2. - $\forall\, b \notin X\ ,\ \exists\ \ vb = x \neq 0$ tel que $X \cap Ax = 0$.

D'après la propriété 1, on a $0 = X \,{}^{\bullet}\!.\, Ab$ d'où :

$$0 = \bigcap_{\lambda \in A} (X \,{}^{\bullet}\!.\, \lambda b)\ ,\quad \lambda b \notin X\ .$$

En vertu de la condition minimale on a donc

$$0 = \bigcap_{i=1}^{i=n} (X \,{}^{\bullet}\!.\, \lambda_i\, b)\quad ,\ \lambda_i\, b \notin X\ ,$$

On peut supposer cette décomposition non superflue, et écrire en particulier :

$$0 = (X \,{}^{\bullet}\!.\, \lambda_1\, b) \cap Y\ ,\quad \text{avec}\quad Y \neq 0\ .$$

(Dans le cas $n = 1$, on prend $Y = A$). On en déduit :

$$0 = X \cap Y \lambda_1\, b\ ,$$

avec $Y \lambda_1\, b \neq 0$ car $Y \lambda_1\, b = 0$ entraîne $Y \lambda_1\, b \subseteq X$, $Y \subseteq X \,{}^{\bullet}\!.\, \lambda_1\, b$, et $Y = 0$. En prenant $x = y\, \lambda_1\, b \neq 0$, on satisfait à la propriété 2.

Enfin, la structure d'un anneau d'Artin premier A , rappelée plus haut, permet de donner celle des idéaux à gauche de A ;

PROPRIÉTÉ 3. - Les idéaux à gauche de A constituent un treillis modulaire complémenté irréductible de longueur finie n (isomorphe au treillis des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension n sur un corps K) .

En particulier, les idéaux $\cap$-irréductibles de A sont les idéaux maximaux, l'idéal nul est l'intersection de n idéaux maximaux ; il est $\cap$-irréductible si et seulement si $n = 1$, c'est-à-dire lorsque A est isomorphe à un corps K .

3. Anneaux d'intégrité .

Supposons l'anneau A sans diviseurs de zéro, et noethérien à gauche.

THÉORÈME 1. - Dans un anneau d'intégrité noethérien à gauche A l'idéal nul est $\cap$-irréductible à gauche, et A admet un corps des quotients à gauche (2)

Supposons en effet

$$0 = X \cap Y , \quad X \neq 0 , \quad Y \neq 0 .$$

On a donc

(1) $$0 = Ax \cap Ay , \quad x \neq 0 , \quad y \neq 0 .$$

Considérons les idéaux $Axy + Axy^2 + \dots + Axy^n = I_n$.

En vertu de la condition maximale il existe un entier n , que l'on peut supposer minimum, tel que :

$$xy^{n+1} = a_1\, xy + a_2\, xy^2 + \dots + a_n\, xy^n$$

ou :

(2) $$(xy^n - a_2\, xy - \dots - a_n\, xy^{n-1} - a_1\, x)\, y = 0 .$$

Le coefficient u de y est non nul, car $u = 0$ entraîne

$$a_1\, x = xy^n - a_2\, xy - \dots - a_n\, xy^{n-1} \in Ax \cap Ay = 0 .$$

d'où

$$xy^n = a_2\, xy + \dots + a_n\, xy^{n-1}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur n . On déduit donc de (2) ,

---

(2) Cette propriété est citée par A. W. GOLDIE [5] avec l'hypothèse que A est noethérien à gauche et à droite.

$y = 0$, puisque A est sans diviseurs de zéro . Or on a supposé $y \neq 0$.

Le fait que (0) soit $\cap$-irréductible à gauche peut également s'exprimer par la propriété : $\forall\ x \neq 0\ ,\ y \neq 0\ ,\ \exists\ ax = by \neq 0$; il en résulte qu'un anneau d'intégrité noethérien est regulier à gauche au sens de O. ORE, donc qu'il admet un corps de quotients à gauche ([3]) (cf. P. DUBREIL [3] , p. 280) . Le théorème 1 est démontré. Sa démonstration prouve en même temps la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 3. - A étant un anneau noethérien, la relation

$$0 = Ax \cap Ay\ ,\quad x \neq 0\ ,\quad y \neq 0\ .$$

exige que y et x soient des diviseurs de zéro à droite.

EXEMPLE. - Soit K un corps commutatif, on considère l'anneau des polynômes $K[X\ ,\ Y]$ à deux variables non permutables X et Y et à coefficients dans K , avec la relation

$$XY - YX = X$$

Ces polynômes forment un anneau d'intégrité noethérien à gauche (et à droite) qui admet par suite un corps des quotients à gauche (et à droite) .

Plus généralement, si (L) est une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps K , son algèbre enveloppante universelle $A(L)$ est un anneau d'intégrité noethérien à gauche ([4]) (et à droite) qui admet par conséquent un corps des quotients à gauche (et à droite) .

4. Anneaux noethériens premiers. Idéaux fermés.

Abordons maintenant le cas d'un anneau noethérien à gauche premier le plus général. Nous nous proposons de rechercher des idéaux particuliers de A qui vont jouer le rôle que jouaient dans le cas artinien tous les idéaux. Ils doivent en particulier comprendre les composantes d'une décomposition de (0) comme intersection d'idéaux $\cap$-irréductibles ; ils doivent former un treillis de longueur finie modulaire et complémenté, donc vérifier aussi la condition minimale . Nous avions pensé un moment que ce rôle pouvait être tenu par les idéaux 0-premiers à droite (cf. propriété 1) , car une composante irréductible de (0)

([3]) Cela signifie que A peut être plongé dans un corps K tout élément de K se mettant sous la forme $b^{-1}a$, $b \in A$, $a \in A$.

([4]) cf. Théorie des algèbres de Lie, [2] , p. 1-08 .

est necessairement un idéal 0-premier à droite. Mais l'exemple déjà cité de l'anneau des polynômes $K[X, Y]$ avec $XY - YX = X$ vient infirmer cette hypothèse. En effet les idéaux AY^n sont tous 0-premiers et forment une chaîne descendante infinie, cependant que l'idéal nul est $\cap$-irréductible. En fait, les idéaux intéressants dans cette théorie sont ceux qui vérifient la propriété 2, auxquels nous allons donner le nom d'idéaux fermés.

DÉFINITION. - On dit que l'idéal à gauche X est <u>fermé</u> lorsqu'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall b \notin X, \quad \exists \quad vb = x \neq 0 \quad \text{tel que} \quad X \cap Ax = 0 .$$

PROPRIÉTÉ 4. - <u>Tout idéal à gauche fermé</u> X <u>est 0-premier à droite.</u>

Supposons $aAb \subseteq X$, $b \notin X$. Il existe donc $vb = x \neq 0$ tel que $X \cap Avb = 0$. On a donc $aAvb = 0$ d'où $a = 0$ puisque $vb \neq 0$, et que 0 est premier.

PROPRIÉTÉ 5. - <u>L'intersection d'idéaux à gauche fermés est un idéal fermé.</u>

Soit $I = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{a}} X_\alpha$ l'intersection d'idéaux fermés X_α. Prenons $b \notin I$, il existe donc un indice α tel que $b \notin X_\alpha$. On en déduit $X_\alpha \cap Ax = 0$ pour un élément $x = vb \neq 0$, d'où $I \cap Ax = 0$. L'idéal I est bien fermé.

Rappelons qu'on appelle <u>annulateur à gauche</u> d'un ensemble $S \subseteq A$ l'idéal à gauche formé par les éléments x tels que $xS = 0$. Nous noterons cet idéal à gauche $0 \cdot\!\!. \, S$. On a :

$$0 \cdot\!\!. \, S = \bigcap_{s \in S} (0 \cdot\!\!. \, s)$$

$s \in A$ décrivant l'ensemble S.

PROPRIÉTÉ 6. - <u>L'annulateur à gauche d'un ensemble quelconque S est un idéal à gauche fermé.</u>

D'après la propriété 5 et la remarque précédente, il suffit de le démontrer pour un annulateur de la forme $0 \cdot\!\!. \, s$, où $s \in A$. Nous utiliserons pour cela le lemme fondamental suivant :

LEMME. - <u>Etant donné</u> $b \neq 0$, <u>il existe un idéal à gauche</u> $C \neq 0$ <u>tel que</u> :

$$(0 \cdot\!\!. \, b) \cap C = 0 .$$

Considérons en effet un annulateur à gauche maximal de la forme $0 \cdot\!\!. \, a$, avec $a \neq 0$. L'idéal 0 étant premier, il existe un élément λ tel que $a\lambda b \neq 0$.

Or on a :

$$0 \,\dot{.}\, a \subseteq 0 \,\dot{.}\, (a \lambda b) .$$

Il en résulte $0 \,\dot{.}\, a = 0 \,\dot{.}\, (a \lambda b)$. Par suite, la relation $xa \lambda\, b = 0$ entraîne $xa = 0$. Formons alors : $(0 \,\dot{.}\, b) \cap A\, a\lambda = 0$. On peut donc prendre $C = Aa\lambda \neq 0$ puisque $a \lambda b \neq 0$. Le lemme est établi .

Appliquons le lemme à la démonstration de la propriété 6 sous la forme suivante. Si $b \notin 0 \,\dot{.}\, s$ on a $bs \neq 0$. Il existe donc un idéal à gauche $C \neq 0$ tel que $(0 \,\dot{.}\, bs) \cap C = 0$. Cet idéal C est tel que $Cbs \neq 0$ car $Cbs = 0$ entraînerait $C \subseteq 0 \,\dot{.}\, bs$ et $C = 0$. Prenons donc $c \in C$ tel que $cbs \neq 0$ et soit $x \in (0 \,\dot{.}\, s) \cap A\,cb$. On a $x = acb$ avec $acbs = 0$. Donc $ac \in (0 \,\dot{.}\, bs) \cap C = 0$ et par suite $x = 0$ et $(0 \,\dot{.}\, s) \cap Acb = 0$. L'idéal $0 \,\dot{.}\, s$ est bien fermé (car $cb \neq 0$ résulte de $cbs \neq 0$) .

Avant de poursuivre l'étude des idéaux fermés donnons une application immédiate du lemme précédent :

THÉORÈME 2. - A <u>étant un anneau premier noethérien à gauche, pour que l'idéal nul soit $\cap$-irréductible à gauche il faut et il suffit que</u> A <u>soit un anneau d'intégrité</u>.

La condition est suffisante d'après le théorème 1 . Montrons qu'elle est nécessaire. Si on avait $ab = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ on en déduirait $0 \,\dot{.}\, b \neq 0$, en appliquant le lemme on obtiendrait :

$$(0 \,\dot{.}\, b) \cap C = 0 , \quad 0 \,\dot{.}\, b \neq 0 , \quad C \neq 0$$

ce qui contredit l'irréductibilité de 0 comme idéal à gauche.

5. <u>Fermeture d'un idéal à gauche quelconque</u>.

DÉFINITION. - X étant un idéal à gauche quelconque, on appelle <u>fermeture</u> $\bar{X}$ de X le plus petit idéal fermé contenant X .

L'idéal $\bar{X}$ est l'intersection de tous les idéaux fermés contenant X . Remarquons que A lui-même et un idéal fermé contenant X .

PROPRIÉTÉ 7. - <u>La fermeture d'un idéal à gauche X est l'ensemble</u> $\bar{X}$ <u>des éléments</u> x <u>tels que</u> :

$$\forall\, vx \neq 0 , \quad \text{on a} \quad X \cap Avx \neq 0 .$$

L'ensemble $\bar{X}$ contient X . Il est permis pour la multiplication à gauche. <u>Montrons qu'il est stable pour l'addition</u>. Soit $x \in \bar{X}$, $y \in \bar{X}$ et $v(x+y) \neq 0$.

D'après le lemme, il existe un idéal $C \neq 0$ tel que $(0 \,\dot{.}\, (v(x+y)) \cap C = 0$. Il en résulte $Cv(x+y) \neq 0$. Donc il existe $c \in C$ tel que $cv(x+y) \neq 0$. On a alors $cvx \neq 0$ ou $cvy \neq 0$. Supposons $cvx \neq 0$. Comme $x \in \bar{X}$, on peut trouver $0 \neq kcvx \in X$. Si $kcvy = 0$ on a $0 \neq kcv(x+y) \in X$. Si $kcvy \neq 0$ il existe $0 \neq lkcvy \in X$ en vertu de $y \in \bar{X}$. On en déduit $lkcv(x+y) \in X$ avec $lkcv(x+y) \neq 0$, car $lkcv(x+y) = 0$ entraînerait $lkc \in (0 \,\dot{.}\, (v(x+y)) \cap C = 0$ ce qui est impossible puisque $lkcvy \neq 0$. On a donc $X \cap A\, v(x+y) \neq 0$ et par suite $x+y \in \bar{X}$.

<u>Montrons que</u> $\bar{X}$ <u>est fermé</u>. Sinon, il existerait $x \notin \bar{X}$ avec $X \cap Avx \neq 0$, $\forall\, vx \neq 0$. Donc $\exists$ $kvx \neq 0$ avec $kvx \in \bar{X}$. D'après la définition de $\bar{X}$ cela implique en particulier $X \cap Akvx \neq 0$, et par suite $X \cap Avx \neq 0$. Donc $\forall\, vx \neq 0$, on a $X \cap Avx \neq 0$ ce qui signifie $x \in \bar{X}$.

<u>Enfin</u> $\bar{X}$ <u>est contenu dans tout idéal à gauche fermé</u> F <u>contenant</u> X. Sinon il existerait $x \in \bar{X}$ avec $x \notin F$. Puisque F est fermé cela implique l'existence de $vx \neq 0$ tel que $F \cap Avx = 0$ d'où $X \cap Avx = 0$ ce qui contredit $x \in \bar{X}$.

6. <u>Le treillis T des idéaux à gauche fermés.</u>

L'application $X \to \bar{X}$ d'un idéal à gauche quelconque dans sa fermeture est une application de fermeture et l'ensemble des idéaux fermés ordonné par inclusion constitue un treillis complet T (Théorie des treillis [4], p. 36) avec élément nul (0) et élément universel A.

La propriété 7 va nous permettre de démontrer que ce treillis est modulaire.

PROPRIÉTÉ 8. - <u>Le treillis</u> T <u>des idéaux à gauche fermés est modulaire.</u>

Designons par $B \vee C$ le plus petit idéal à gauche fermé contenant B et C. On a $B \vee C = \overline{B + C}$. La modularité du treillis T s'exprime donc par la relation :

$$X \supseteq B \implies X \cap (\overline{B + C}) = \overline{B + (X \cap C)}$$

les idéaux X, B et C étant supposés fermés. Il suffit de démontrer l'inclusion $X \cap \overline{(B + C)} \subset \overline{B + (X \cap C)}$. Soit donc $x \in X$, $x \in \overline{B + C}$. Donc $\forall\, vx \neq 0$, on a $(B + C) \cap Avx \neq 0$. Il existe par suite $kvx \in B + C$ avec $kvx \neq 0$. On en déduit $kvx = b + c$ $(b \in B,\ c \in C)$, d'où $c = kvx - b \in X$ et $c \in X \cap C$. Donc $0 \neq kvx \in B + (X \cap C)$, et $x \in \overline{B + (X \cap C)}$. Le treillis T est modulaire.

PROPRIÉTÉ 9. - <u>Soit</u> $X \in T$, <u>avec</u> $X \neq A$. <u>Il existe</u> $Y \in T$, $Y \neq 0$ <u>tel que</u> $X \cap Y = 0$.

Comme $X \neq A$, soit $x \in A$, $x \notin X$. Y étant fermé on peut trouver un élément $vx \neq 0$ tel que $X \cap Avx = 0$. Posons $Z = Avx$ et $Y = \bar{Z}$. L'hypothèse $X \cap Y \neq 0$ entraînerait l'existence d'un élément $b \in X \cap Y$ tel que $b \neq 0$. On en déduirait $Z \cap Ab \neq 0$. Mais $Z \cap Ab \subseteq Z \cap X = 0$. On arriverait à une contradiction et on a bien $X \cap Y = 0$.

En résumé le treillis T des idéaux fermés est un treillis modulaire vérifiant la propriété 9 et la condition de chaîne ascendante. Ces résultats suffisent pour établir le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - <u>Le treillis</u> T <u>des idéaux à gauche fermés d'un anneau noethérien à gauche premier</u> A <u>est un treillis modulaire complémenté de longueur finie.</u>

En effet, soit $X \in T$; montrons que X admet un complément. Soit $X' \in T$ un idéal à gauche fermé maximal parmi ceux qui vérifient $X \cap X' = 0$. Supposons $X \vee X' \neq A$. D'après la propriété 9 il existerait $Y \neq 0$, $Y \in T$ tel que $(X \vee X') \cap Y = 0$. On en déduirait $(X \vee X') \cap (X' \vee Y) = X' + [(X \vee X') \cap Y] = X'$; d'où en prenant l'intersection avec X : $X \cap (X' \vee Y) = 0$. Or on a $X' \vee Y \supset X'$. Ceci contredit l'hypothèse X' maximal. On a bien

$$X \cap X' = 0 \qquad X \vee X' = A$$

Le treillis T étant modulaire, complémenté, et vérifiant la condition de chaîne ascendante, est alors un treillis de longueur finie (propriété duale du théorème 4 de [4], Théorie des treillis, p. 257).

7. Applications.

Le théorème 3 entraîne le corollaire suivant :

PROPRIÉTÉ 10. - <u>Le treillis</u> T <u>des idéaux à gauche fermés vérifie la condition de chaîne descendante. En particulier, tout annulateur à gauche</u> $0 \cdot . S$ <u>est égal à l'intersection d'un nombre fini d'annulateurs à gauche</u> $0 \cdot . s_i$ <u>où</u> $s_i \in S$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Soit $0 = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ une décomposition de l'idéal nul comme intersection d'idéaux à gauche X_i, $\cap$-irréductibles, sans idéaux superflus. Nous allons montrer que chacun des X_i est un idéal à gauche fermé. Ecrivons en effet $0 = X_1 \cap Y$ avec $Y \neq 0$.

On sait que, si X_1 est $\cap$-irréductible à gauche, X_1 est maximal parmi les idéaux à gauche X qui vérifient $0 = X \cap Y$, ([7], p. 179). Donc, si $b \notin X_1$, on a $(X_1 + Ab) \cap Y \neq 0$. Il existe donc $y = x_1 + vb \neq 0$, $x_1 \in X_1$.

On en tire $X_1 \cdot\!\!. \, vb = 0 \cdot\!\!. \, y$; en effet $uvb \in X_1$ entraîne $uy \in X_1$ donc $uy \in X_1 \cap Y = 0$ et $u \in 0 \cdot\!\!. \, y$; réciproquement $uy = 0$ entraîne $u(x_1 + vb) = 0$ donc $uvb \in X_1$. D'après le lemme, il existe donc un idéal $C \neq 0$ tel que $(0 \cdot\!\!. \, y) \cap C = 0$, ou $(X_1 \cdot\!\!. \, vb) \cap C = 0$. On en déduit $X_1 \cap Cvb = 0$, avec $Cvb \neq 0$, car la relation $Cvb = 0$ entraînerait $Cvb \subsetneq X_1$ et $C \subsetneq X_1 \cdot\!\!. \, vb$ donc $C = 0$. Il existe donc $c \in C$ tel que $cvb \neq 0$ et $X_1 \cap Acvb = 0$, ce qui prouve que X_1 est un idéal à gauche fermé.

THÉORÈME 4. - <u>Si</u> $0 = X_1 \cap \ldots \cap X_n$ <u>est une décomposition de</u> 0 <u>comme idéaux à gauche</u> $\cap$<u>-irréductibles</u> X_i <u>sans idéaux superflus, les idéaux à gauche</u> X_i <u>sont des idéaux à gauche fermés maximaux et l'invariant</u> n <u>de Kurosch-Ore est égal à la dimension du treillis</u> T <u>augmentée d'une unité.</u>

On vient de voir en effet que tout X_i est un idéal à gauche fermé. S'il n'était pas fermé maximal, il serait réductible dans le treillis T , ce qui est contraire à l'irréductibilité. On sait d'ailleurs que si la dimension du treillis T est d , (0) est l'intersection de $d + 1$ éléments maximaux ([4] ; p. 261) .

Les élements $a \in A$ qui engendrent un idéal fermé égal à A forment un ensemble E caractérisé par la propriété suivante, qui exprime que $1 \in \overline{\overline{Aa}}$:

(1) $\qquad \forall x \neq 0 \, , \quad$ on a $\quad Aa \cap Ax \neq 0$.

THÉORÈME 5. - <u>En appelant</u> E <u>l'ensemble des éléments</u> a <u>qui vérifiont la condition</u> (1) , D' <u>l'ensemble des éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro à droite, et</u> G' <u>l'ensemble des éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro à gauche, on a</u> :

$$D' \subseteq E \subseteq G'$$

En effet, supposons $d' \in D'$. Si on avait $d' \notin E$, il existerait $x \neq 0$ tel que $Ad' \cap Ax = 0$, et d' serait diviseur de zéro à droite d'après la propriété 3 . On a donc $D' \subseteq E$. Supposons maintenant $a \in E$ avec $a \notin G'$. Donc a serait diviseur de zéro à gauche et il existerait $b \neq 0$ tel que $ab = 0$ D'après le lemme, on aurait un idéal à gauche $C \neq 0$ tel que $(0 \cdot\!\!. \, b) \cap C = 0$. Par suite $Aa \cap C = 0$ et $Aa \cap Ac = 0$ pour $0 \neq c \in C$. Ceci contredit l'hypothèse $a \in E$.

D'autres propriétés des idéaux fermés d'un anneau noethérien à gauche premier figureront dans la publication annoncée dans l'introduction.

Signalons que A. W. GOLDIE [5] a obtenu un théorème d'immersion de tout anneau premier noéthérien à gauche et à droite dans un anneau d'Artin premier, c'est-à-dire dans un anneau de matrices carrées d'ordre n sur un corps K .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chap. 8 : Modules et anneaux semi-simples. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Eléments de Mathématique, 23).

[2] CARTIER (Pierre). - Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie, exposé n° 1.

[3] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1 , 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[4] DUBREIL-JACOTIN (Mme M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[5] GOLDIE (A. W.). - The structure of prime rings with maximum condition, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 44, 1958, p.

[6] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1956 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 37).

[7] LESIEUR (Léonce). - Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 161-193.

[8] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I, Colloque d'Algèbre supérieure [1956. Bruxelles]. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre Belge de Recherches mathématiques) ; p. 79-121.

[9] McCOY (Neal H.). - Prime ideals in general rings, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 823-833.