Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Reinhold Baer

Σ - fermeture

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, n° 1 (1958-1959), exp. n° 7, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_1_A7_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1958/59
-:-:-:-

5 janvier 1959

Σ - FERMETURE

par Reinhold BAER

Soit Σ une propriété d'éléments d'un groupe. Il y a une foule d'exemples de telles propriétés, comme d'appartenir au centre ou d'être un commutateur de deux éléments du groupe. Etant donné un groupe G , nous pouvons former la totalité G_{Σ} de tous les éléments g de G ayant la propriété Σ . Pour que cet ensemble G_{Σ} soit un sous-groupe, il faut et il suffit qu'il existe de tels Σ-éléments et qu'en outre des quotients de Σ-éléments soient à leur tour des Σ-éléments. Nous entendrons par groupe Σ-fermé un groupe G tel que G_{Σ} soit un sous-groupe de G . On est tenté d'élaborer une théorie générale des propriétés des éléments de groupe et des groupes, fermés à l'égard de ces propriétés. Telle n'est pas notre intention. Nous allons plutôt examiner une propriété très spéciale de ce genre.

Soit donc Σ un ensemble de nombres premiers. On entendra alors par Σ-élément un élément g du groupe, dont l'ordre $o(g)$ n'est divisible que par des nombres premiers de Σ ; si l'ordre $o(G)$ du groupe G , il ne s'agit ici que de groupes finis, n'est divisible que par des nombres premiers de Σ , on appellera G un Σ-groupe. Il est bien connu qu'il faut et qu'il suffit, pour que le groupe G soit un Σ-groupe, que tous ses éléments soient des Σ-éléments.

Si G est un groupe Σ-fermé, les Σ-éléments forment un sous-groupe caractéristique G_{Σ} de G , dont l'indice $[G : G_{\Sigma}]$ est (relativement) premier à tous les nombres premiers de Σ . Le nombre des Σ-éléments de G est donc exactement le plus petit commun multiple $o(G)_{\Sigma}$ de tous les diviseurs de $o(G)$, qui ne sont divisibles que par des nombres premiers de Σ . FROBENIUS a avancé l'hypothèse que cette condition nécessaire est aussi suffisante, hypothèse qui n'a été jusqu'à aujourd'hui ni démontrée, ni refutée.

Il est évident que tous les sous-groupes et groupes-quotients d'un groupe Σ-fermé sont à leur tour Σ-fermés. C'est pourquoi nous appellerons le groupe G faiblement Σ-fermé, si le nombre des Σ-éléments dans chaque sous-groupe U de G est exactement $o(U)_{\Sigma}$. D'après ce qui précède, il est évident que chaque groupe Σ-fermé est aussi faiblement Σ-fermé. Jusqu'à présent on ignore encore si la réciproque est vraie ; et de même on ne sait si un groupe G est faiblement Σ-fermé lorsque le nombre des Σ-éléments de G est exactement $o(G)_{\Sigma}$.

Que les sous-groupes d'un groupe faiblement Σ-fermé soient aussi faiblement Σ-fermés est une conséquence immédiate de la définition ; et on peut démontrer que c'est également le cas pour les groupes quotients.

On entendra par Σ' l'ensemble des nombres premiers complémentaires de Σ ; et le groupe G sera appelé Σ'-homogène lorsque dans des Σ'-sous-groupes les éléments normalisateurs de G induisent seulement des Σ'-automorphismes, (c'est-à-dire si U est un Σ'-sous-groupe de G, NU son normalisateur et CU son centralisateur en G, NU/CU est également un Σ'-groupe). Cette propriété est importante pour notre problème, du fait que tout groupe faiblement Σ-fermé est aussi Σ'-homogène. Cette fois, il est vrai, des exemples très simples montrent que la réciproque n'est pas vraie.

La Σ'-homogénéité se transmet à des sous-groupes et des groupes-quotients. Est également valable la proposition de réduction suivante qui nous sera utile : soit K un sous-groupe normal du groupe G. Pour que G soit Σ-fermé, il faut et il suffit que K et G/K soient tous deux Σ-fermés et qu'en outre G lui-même soit Σ'-homogène. Il découle de là par exemple qu'un groupe minimal, qui est faiblement Σ-fermé, sans être toutefois Σ-fermé, est nécessairement simple.

On peut maintenant démontrer les deux critères suivants de fermeture.

PROPOSITION A. - Pour que G soit un groupe Σ-fermé, avec le groupe quotient G/G_{Σ} nilpotent, il faut et il suffit que G soit un groupe Σ'-homogène, dont les Σ'-sous-groupes sont nilpotents.

Dans le cas spécial où Σ contient tous les diviseurs premiers de G sauf un, FROBENIUS a déjà démontré cette proposition.

PROPOSITION B. - Pour que G soit un groupe Σ-fermé avec le sous-groupe G_{Σ} nilpotent, il faut et il suffit que G soit faiblement Σ-fermé et que tous les Σ-sous-groupes de G soient nilpotents.

On peut spécialiser le problème traité ici, en demandant quels groupes sont à la fois Σ- et Σ'-fermés. Tout d'abord il est évident que, pour qu'un groupe soit à la fois Σ- et Σ'-fermé, il faut et il suffit qu'il soit le produit direct d'un Σ-groupe et d'un Σ'-groupe ; et FROBENIUS a déjà montré que, pour que le groupe G soit le produit d'un Σ-groupe et d'un Σ'-groupe, il faut et il suffit que le nombre de ses Σ-éléments soit $o(G)_{\Sigma}$ et que celui de ses Σ'-éléments soit $o(G)_{\Sigma}$. Si le groupe G est à la fois Σ- et Σ'-fermé, il est aussi à la fois Σ'- et Σ-homogène. On ignore si la réciproque est vraie en général ; mais on peut montrer qu'un groupe minimal G, qui est Σ- et Σ'-homogène sans être Σ'- et Σ-fermé, est nécessairement un groupe simple possédant la propriété suivante : chaque sous-groupe propre de G est soit un Σ-groupe, soit un Σ'-groupe. Il est intéressant de reamrquer, que pour prouver ce dernier fait, il faut recourir au théorème de Wielandt-Frobenius, donc à la theorie des caractères de groupes, tandis que pour toutes les considérations précédentes on peut se passer de cette théorie.

On trouvera un exposé détaillé des réflexions esquissées ici dans les travaux suivants qui paraîtront prochainement :

- Closure and dispersion,
- Kriterien für die Abgeschlossenheit endlicher Gruppen,
- Direkte Produkte von Gruppen teilerfremder Ordnung.