Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Louis Behanzin

Quelques considérations sur la théorie des demi-amas

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, nº 1 (1958-1959), exp. nº 3, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_1_A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL,
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1958/59
-:-:-:-

24 novembre 1958

QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA THÉORIE DES DEMI-AMAS

par Louis BEHANZIN

(d'après les travaux de V. V. VAGNER [6])

INTRODUCTION. - A et B étant deux ensembles quelconques on notera par $\mathcal{P}(A \times B)$ l'ensemble des parties du produit cartésien $A \times B$. On sait que tout élément $\theta \in \mathcal{P}(A \times B)$ représente une relation binaire entre éléments des ensembles A et B.

Si l'on note par le symbole $\circ$ le produit des relations binaires, $\theta_1 \circ \theta_2$, pour θ_1, $\theta_2 \in \mathcal{P}(A \times B)$ et $A \neq B$, n'a pas de sens ; $\theta_1 \circ \theta_2^{-1}$, pour θ_1, $\theta_2 \in \mathcal{P}(A \times B)$, a bien un sens, mais c'est dans $\mathcal{P}(A \times A)$ que ce produit est défini. Il est ainsi malaisé de définir une opération algébrique binaire dans $\mathcal{P}(A \times B)$ (qui soit une loi de composition interne) dans le cas général de $A \neq B$. Il est cependant tentant de définir sur $\mathcal{P}(A \times B)$ une structure algébrique permettant de représenter la théorie ordinaire des relations binaires par une théorie purement algébrique.

Si l'on définit dans $\mathcal{P}(A \times B)$ une opération algébrique ternaire par :

(1) $$\forall \theta_1 , \theta_2 , \theta_3 \in \mathcal{P}(A \times B) , \quad [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = \theta_1 \circ \theta_2^{-1} \circ \theta_3$$

l'on s'aperçoit que ce "produit", partout défini, appartient à $\mathcal{P}(A \times B)$. (1) satisfait à la loi de pseudo-associativité.

$$\forall \ \theta_1 ; \theta_2 , \theta_3 , \theta_4 , \theta_5 \in \mathcal{P}(A \times B)$$

(2) $$[\theta_1 \ \theta_2 [\theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5]] = [[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]\theta_4 \ \theta_5] = [\theta_1[\theta_4 \ \theta_3 \ \theta_2]\theta_5]$$

Ce fait a conduit VAGNER à étudier sous le nom de demi-amas les ensembles munis d'une opération algébrique ternaire satisfaisant à (2).

L'étude des propriétés formelles des demi-amas dépasse en intérêt la possibilité de leur application à l'étude des relations binaires comme le signale VAGNER.

C'est l'étude de quelques unes de ces propriétés formelles qui fait l'objet de cet exposé.

Il faut signaler qu'avant VAGNER certains auteurs dont PRÜFER, BAER, J. CERTAINE, SUŠKEVIČ, etc. s'étaient déjà occupés de telles opérations ternaires mais dans des cas particuliers (voir bibliographie à la fin du texte).

Sans connaître les travaux de ces auteurs nous avons été amenés à étudier les ensembles munis d'une opération ternaire satisfaisant à (2) sous le nom de "demi-groupe ternaire" et dans certains cas sous le nom de "groupe ternaire".

Notre exposé porte essentiellement sur les travaux de VAGNER. Nous nous bornerons à signaler au passage notre propre contribution.

1. Demi-amas.

Soit un ensemble K muni d'une opération algébrique ternaire partout définie notée $[k_1\ k_2\ k_3]$ pour k_1, k_2, $k_3 \in K$.

On dit que K forme un demi-amas si la relation de pseudo-associativité suivante est vérifiée :

$$\forall\ k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 \in K$$

$$(1.1)\quad [k_1\ k_2[k_3\ k_4\ k_5]] = [[k_1\ k_2\ k_3]\ k_4\ k_5] = [k_1[k_4\ k_3\ k_2]\ k_5]$$

On définit dans K le "produit" de $2n+1$ éléments par récurrence :

$$[k_1 \ldots k_{2n+1}] = [[k_1 \ldots k_{2n-1}]\ k_{2n}\ k_{2n+1}]$$

1° Règles de calcul. - Les relations (1.1) entraînent les formules :

$$(1.2)\quad \begin{aligned} [k_1 \ldots k_{2n+1}] &= [k_1 \ldots k_{2m}[k_{2m+1} \ldots k_{2(m+\ell)+1}]\ k_{2(m+\ell)+2} \ldots k_{2n+1}] \\ [k_1 \ldots k_{2n+1}] &= [k_1 \ldots k_{2m-1}[k_{2(m+\ell)} \ldots k_{2m}]\ k_{2(m+\ell)+1} \ldots k_{2n+1}] \end{aligned}$$

qui signifient qu'on peut toujours associer, à l'intérieur des crochets, les éléments d'une séquence de longueur impaire ; si cette séquence est précédée d'un nombre pair d'éléments la composition se fait en gardant l'ordre des éléments de la séquence, dans le cas contraire on inverse cet ordre.

Démonstration des formules (1.2). On établit d'abord, par récurrence sur n, que

$$[k_1 \dots k_{2n+1}] = [k_1\ k_2[k_3 \dots k_{2n+1}]]$$

D'où

$$\begin{aligned}[k_1 \dots k_{2n+1}] &= [k_1\ k_2\ k_3\ k_4[k_5 \dots k_{2n+1}]] \\ &= [[k_1\ k_2\ k_3]\ k_4[k_5 \dots k_{2n+1}]] \\ &= [[k_1\ k_2\ k_3]\ k_4 \dots k_{2n+1}]\end{aligned}$$

et d'une façon générale

$$[k_1 \dots k_{2n+1}] = [k_1 \dots k_{2m}\ [k_{2m+1}\ k_{2m+2}\ k_{2m+3}]\ k_{2m+4} \dots k_{2n+1}]$$

qu'on établit par récurrence sur m.

Cette dernière formule n'est autre chose que la première égalité de (1.2) dans le cas $\ell = 1$.

On établit alors par récurrence sur ℓ la première formule de (1.2).

Pour établir la deuxième formule (1.2) nous écrirons, en utilisant la première formule déjà établie :

$$\begin{aligned}[k_1 \dots k_{2n+1}] &= [k_1 \dots k_{2m-2}[k_{2m-1}\ k_{2m}\ k_{2m+1}\ k_{2m+2}\ k_{2m+3}]\ k_{2m+4} \dots k_{2n+1}] \\ &= [k_1 \dots k_{2m-2}[k_{2m-1}[k_{2m+2}\ k_{2m+1}\ k_{2m}]\ k_{2m+3}]\ k_{2m+4} \dots k_{2n+1}] \\ &= [k_1 \dots k_{2m-2}\ k_{2m-1}[k_{2m+2}\ k_{2m+1}\ k_{2m}]\ k_{2m+3}\ k_{2m+4} \dots k_{2n+1}]\end{aligned}$$

qui est la deuxième formule de (1.2) dans le cas $\ell = 1$. On établit cette formule dans sa généralité par récurrence sur ℓ.

La "puissance" $(2n+1)$-ième d'un élément k s'écrit symboliquement :

$$[\overbrace{k \dots k}^{2n+1}] = k^{[2n+1]}$$

et l'on compose les puissances de k par

$$[k^{[2\ell+1]}\, k^{[2m+1]}\, k^{[2n+1]}] = k^{[2(\ell+m+n+1)+1]}$$

Le demi-amas K est dit latéralement commutatif si $\forall\, k_1, k_2, k_3 \in K$,

$$[k_1\, k_2\, k_3] = [k_3\, k_2\, k_1]$$

Un demi-amas latéralement commutatif est associatif au sens ordinaire des opérations algébriques n-aires.

2° Eléments remarquables.

a. Elément nul. - $k_o \in K$ est dit

$$(1.3)\quad \text{nul} \begin{cases} \text{à gauche si} & \forall\, k_1, k_2, \quad ([k_o\, k_1\, k_2] = k_o) \\ \text{à droite si} & \forall\, k_1, k_2, \quad ([k_1\, k_2\, k_o] = k_o) \\ \text{latéral si} & \quad ([k_1\, k_o\, k_2] = k_o) \end{cases}$$

Si K possède un élément nul de chaque sorte, ces trois élements sont égaux et l'élément unique est dit nul.

b. Eléments neutralisateurs conjugués. - Deux élements d, $d' \in K$ sont dits neutralisateurs à droite conjugués si

$$(1.4)\qquad \forall\, k,\ [k\, dd'] = k\, d'd] = k$$

On définit analoguement s et s' neutralisateurs à gauche conjugués.

Un élement u peut admettre plusieurs éléments distincts neutralisateurs d'un côté mais s'il admet un neutralisateur à droite d et un neutralisateur à gauche s on a $s = d = \bar{u}$ en effet :

$$s = [s\ u\ d] = d = \bar{u}$$

On dit que u et $\bar{u}$ forment un couple de neutralisateurs (bilatères) conjugués :

$$\forall\, k,\ [k\, u\, \bar{u}] = [k\, \bar{u}\, u] = [\bar{u}\, u\, k] = [u\, \bar{u}\, k] = k$$

c. Neutralisateur conjugué d'un composé. - Soient dans le demi-amas K trois éléments k_1, k_2, k_3 admettant pour neutralisateurs conjugués $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, $\bar{k}_3$ respectivement.

On a :

$$\forall\ h \in K\ ,\ \ [h\,[k_1\ k_2\ k_3]\,[\bar{k}_1\ \bar{k}_2\ \bar{k}_3]]$$
$$= [h\ k_3\ k_2\ k_1\ \bar{k}_1\ \bar{k}_2\ \bar{k}_3] = h$$

D'où le th orème suivant :

THÉORÈME. - Si 3 éléments k_1 , k_2 , k_3 d'un demi-amas admettant chacun un neutralisateur conjugué, leur composé admet un neutralisateur conjugué et on a :

$$[\overline{k_1\ k_2\ k_3}] = [\bar{k}_1\ \bar{k}_2\ \bar{k}_3]$$

VAGNER n'a pas considéré les éléments neutralisateurs conjugués.

d. <u>Elément biunitaire</u>. - Un élement hd est dit biunitaire à droite s'il s'admet comme élement neutralisateur à droite conjugué :

$$\forall\ k\ ,\ \ ([k\ hd\ hd] = k)$$

Définition symétrique pour un biunitaire à gauche h_s .

Si h est biunitaire à droite et à gauche il est biunitaire.

A l'intérieur des crochets on peut toujours supprimer ou introduire un couple d'élements neutralisateurs conjugués $u\,\bar{u}$ sans changer le composé :

$$\forall\ \ell \leq 2n+1\ ,\ \ [k_1\ \ldots\ k_\ell\ \ldots\ k_{2n+1}] = [k_1\ \ldots\ k_\ell\ \ u\,\bar{u}\ \ldots\ k^{o}_{2n+1}]$$

on ne peut pas faire la même opération, sans précaution, avec un couple d , d' d'éléments neutralisateurs unilatères conjugués, le résultat obtenu dépendra de la parité de ℓ .

e. <u>Couple d'éléments bicommutatifs</u>. - On dit d'un couple k_1 , k_2 que ses éléments "bicommutent" à droite, ou sont bicommutatifs à droite, si :

$$(1.5)\qquad \forall\ k\ ,\ \ [k\ k_1\ k_1\ k_2\ k_2] = [k\ k_2\ k_2\ k_1\ k_1]$$

Définition analogue pour des éléments bicommutatifs à gauche.

Si k_1 et k_2 bicommutent des deux côtés, ils sont bicommutatifs.

Un demi-amas dont tous les éléments bicommutent deux à deux est dit bicommutatif.

Deux élements u , $\bar{u}$ neutralisateurs conjugués sont **bicommutatifs, mais** deux éléments neutralisateurs unilatères conjugués ne bicommutent pas.

f. Elément idempotent. - k est dit idempotent si

$$k^{[3]} = k \tag{1.6}$$

ce qui entraîne $k^{[2n+1]} = k$.

3° Extension de l'opération ternaire de K à $\mathcal{P}(K)$.- $\forall\, t_1 , t_2 , t_3 \in \mathcal{P}(K)$, on définit $[t_1\; t_2\; t_3]$ par

$$\{t_1\; t_2\; t_3\} = \cup \{[k_1\; k_2\; k_3]\} , \quad (k_1 , k_2 , k_3) \in t_1 \times t_2 \times t_3 \tag{1.7}$$

Cette opération satisfait à la loi de pseudo-associativité (1.1), et organise ainsi $\mathcal{P}(K)$ en demi-amas.

$t \in \mathcal{P}(K)$ est stable dans K si

$$t^{[3]} \subset t , \tag{1.8}$$

t est alors un sous-demi-amas de K . Si t n'est pas stable, sa fermeture de stabilité est donnée par

$$F_s(t) = \bigcup_{n \in N} t^{[2n+1]} \qquad \text{avec} \qquad N = \{0 , 1 , \ldots\}$$

Idéaux dans K : $t \in \mathcal{P}(K)$ est dans K

$$\text{un idéal} \begin{cases} \text{à droite si } [t\, KK] \subset t \\ \text{à gauche si } [KK\, t] \subset t \\ \text{latéral si } [K\, t\, K] \subset t \\ \text{trilatère, ou simplement idéal, s'il est idéal des} \\ \text{trois façons.} \end{cases} \tag{1.9}$$

Il correspond, à ces quatre formes d'idéaux, quatre opérations de fermeture.

Pour $t \in \mathcal{P}(K)$ nous aurons

la fermeture idéale de t $\begin{cases} \text{à droite} & F_{ID}(t) = t \cup [t\ KK] \\ \text{à gauche} & F_{IS}(t) = t \cup [KK\ t] \\ \text{latéral} & F_{IL}(t) = t \cup [K\ t\ K] \cup [KK\ t\ KK] \\ \text{trilatère} & F_T(t) = t \cup [t\ KK] \cup [KK\ t] [K\ t\ K] \cup [KK\ t\ KK] \end{cases}$

4° <u>Demi-amas produit cartésien de deux demi-amas</u>. - Soient K et L deux demi-amas, définissons sur le produit cartésien d'ensembles $K \times L$ une opération ternaire par

$$\forall\ (k_1 , \ell_1) , (k_2 , \ell_2) , (k_3 , \ell_3) \in K \times L ,$$

(1.10) $$[(k_1 , \ell_1)(k_2 , \ell_2)(k_3 , \ell_3)] = ([k_1 , k_2 , k_3] , [\ell_1\ \ell_2\ \ell_3])$$

Cette opération vérifie (1.1) et fait de $K \times L$ un demi-amas dit demi-amas produit cartésien de K par L.

On étend cette structure de demi-amas de $K \times L$ à $\mathcal{P}(K \times L)$.

Une relation binéaire entre élements de K et de L, $\Theta \in \mathcal{P}(K \times L)$ est alors stable si

(1.11) $$\Theta^{[3]} \subset \Theta$$

NOTATION. - Pour $\Theta \in \mathcal{P}(K \times L)$ nous noterons par $\Theta \langle k \rangle$ l'ensemble des ℓ tels que $(k , \ell) \in \Theta$.

5° <u>Homomorphisme</u>. - K et L étant deux demi-amas, $\Theta \in \mathcal{P}(K \times L)$ applique homomorphiquement K dans L si et seulement si $\mathcal{E} = \Theta \circ \Theta^{-1}$ est une équivalence stable dans K tout comme en théorie d'opération binaire.

Si $\mathcal{E}$ est une équivalence stable dans K et si t_1 , t_2 , t_3 sont trois classes modulo $\mathcal{E}$ nous observons que $[t_1\ t_2\ t_3]$ est contenu dans une classe t. Posant

(1.12) $$[[t_1\ t_2\ t_3]] = t$$

nous définissons dans l'ensemble quotient $K/\mathcal{E}$ une opération ternaire.

L'application de K sur $K/\mathcal{E}$ définie par

$$k \longrightarrow \mathcal{E}\langle k \rangle$$

est un homomorphisme K/ε est donc un demi-amas (muni de l'opération (1.12)), dit demi-amas quotient de K par ε.

6° Demi-amas libre. - Soient M un ensemble quelconque et $L(M)$ l'ensemble des séquences de longueur impaire d'éléments de M. Dans $L(M)$ on définit une opération ternaire par

$$[(m_{\alpha_1} \dots m_{\alpha_{2p+1}})(m_{\beta_1} \dots m_{\beta_{2q+1}})(m_{\gamma_1} \dots m_{\gamma_{2r+1}})] \tag{1.13}$$
$$= m_{\alpha_1} \dots m_{\alpha_{2p+1}} m_{\beta_{2q+1}} \dots m_{\beta_1} m_{\gamma_1} \dots m_{\gamma_{2r+1}}$$

Cette opération satisfait à (1.1), et organise $L(M)$ en demi-amas dit demi-amas libre sur M.

THÉORÈME. - Tout demi-amas peut être plongé dans un demi-amas possédant un élément biunitaire unique.

Soient K un demi-amas quelconque et e un symbole élément. Considérons dans le demi-amas libre $L(K \cup e)$ engendré par $K \cup e$ l'intersection $\mathcal{E}_0$ de toutes les relations d'équivalences stables ε satisfaisant à

$$\begin{aligned} k_1 k_2 k_3 &\equiv [k_1 k_2 k_3] && (\mathrm{mod}\ \varepsilon) \\ kee &\equiv eek \equiv k && (\mathrm{mod}\ \varepsilon) \\ eee &\equiv e && (\mathrm{mod}\ \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Il y a des équivalences ε. En particulier, la relation d'équivalence θ, dont les restrictions aux sous-ensembles suivants de $L(K \cup e)$:

$$\{e\}\ ,\ K\ ,\ KeK\ ,\ eKe$$

sont des égalités et dont les autres éléments d'une classe $\theta\langle x\rangle$ s'obtiennent en utilisant (1.14), est une ε.

ε_0 est stable comme les ε.

Dans le demi-amas quotient $L(K \cup e)/\varepsilon_0$ chaque classe contient au plus un élément de $K \cup e$; identifions chaque classe contenant un élément de cette sorte avec cet élément.

Le demi-amas $L(K \cup e)/\varepsilon_0$ admettra ainsi e pour élément biunitaire **unique,** et K pour sous-demi-amas.

Ce qui établit la proposition.

7° <u>Une involution dans les demi-amas</u>. - Soit un demi-amas K possédant un couple d'éléments neutralisateurs conjugués u , $\bar{u}$. Considérons l'application φ de K dans K , définie par :

$$\forall k, \quad \varphi(k) = [u\, k\, \bar{u}] \tag{1.15}$$

On a

$$[u\ \varphi(k)\ \bar{u}] = [u[u\, k\, \bar{u}]\,\bar{u}] = [u\, \bar{u}\, k\, u\, \bar{u}] = k$$

qui montre que φ est une involution de K sur K .

Nous dirons que $[u\, k\, \bar{u}]$ est $u\,\bar{u}$-<u>inverse de</u> k , et nous le noterons par k^{-1} si aucune confusion n'est à craindre.

On définit de même

$$\text{le } \bar{u}\, u\text{-inverse de } k = [\bar{u}\, k\, u] \ .$$

Dans le cas où $u = \bar{u} = e$ (c'est-à-dire où e est un biunitaire de K) , $k^{-1} = [e\, k\, e]$ sera dit le e-inverse de k .

L'involution φ est alors un anti-automorphisme de K sur K .

En effet

$$([k_1\ k_2\ k_3])^{-1} = [e[k_1\ k_2\ k_3]\,e] = [e\ k_3\ ee\ k_2\ ee\ k_1\ e]$$

$$= [[e\ k_3\ e]\,[e\ k_2\ e]\,[e\ k_1\ e]] = [k_3^{-1}\ k_2^{-1}\ k_1^{-1}]$$

qui établit la proposition.

Nous reviendrons sur ces involutions en étudiant les relations entre demi-amas et demi-groupes involutifs.

2. <u>Amas. Amas généralisé. Groupe ternaire.</u>

1° <u>Amas</u>. - C'est un demi-amas dont tous les éléments sont biunitaires :

$$\forall k_1\ , k_2 \in K\ , \quad [k_1\ k_2\ k_2] = [k_2\ k_2\ k_1] = k_1 \tag{2.1}$$

Ceci entraîne l'idempotence de tout élément.

2° Amas généralisé. - C'est un demi-amas idempotent dont tout couple d'éléments bicommutent des deux côtés :

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \forall\, k\,,\, k_1\,,\, k_2 \in K\,, \\ [k\, k_1\, k_1\, k_2\, k_2] = [k\, k_2\, k_2\, k_1\, k_1] \\ [k_1\, k_1\, k_2\, k_2\, k] = [k_2\, k_2\, k_1\, k_1\, k] \\ \qquad k^{[3]} = k \end{cases}$$

Un amas est un amas généralisé particulier.

3° Groupe ternaire. - Nous appellerons ainsi un demi-amas K dont tout élément possède un neutralisateur conjugué (bilatère) :

$$\forall\, k \in K\,,\ \exists\ \overline{k} \in K$$

tel que

$$(2.3)\qquad \forall\, k_1 \in K\,,\ \ [k_1\, k\, \overline{k}] = [k_1\, \overline{k}\, k] = [\overline{k}\, k\, k_1] = [k\, \overline{k}\, k_1] = k_1$$

THÉORÈME. - Dans un demi-amas K l'existence pour tout élément d'un neutralisateur (bilatère) conjugué est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations:

$$(2.4)\qquad \begin{cases} (1) & [k_1\, k_2\, x] = k_3 \\ (2) & [x\, k_1\, k_2] = k_3 \\ (3) & [k_1\, x\, k_2] = k_3 \end{cases}$$

où k_1 , k_2 , k_3 sont des éléments quelconques de K , aient chacune une solution unique en x .

a. La condition est suffisante. - En effet pour chacune des équations (2.4) la solution est donnée par

$$(2.5)\qquad \begin{cases} (1)' & x = [\overline{k}_2\, \overline{k}_1\, k_3] \\ (2)' & x = [k_3\, \overline{k}_2\, \overline{k}_1] \\ (3)' & x = [\overline{k}_2\, k_3\, \overline{k}_1] \end{cases}$$

où $\overline{k}_1$, $\overline{k}_2$, $\overline{k}_3$ sont les neutralisateurs de k_1 , k_2 , k_3 respectivement.

b. La condition est nécessaire. - Supposons les équations (2.4) résolubles d'une façon unique, avec $k_1 = k_2 = k_3 = k$; nous en concluons que, quel que soit k , il existe $\overline{k}$, $\overline{k}'$ uniques tels que :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} (1)'' & k = [k\ k\ \overline{k}] \\ (2)'' & k = [\overline{k}'\ k\ k] \end{cases}$$

Composons membre à membre (1)" à gauche avec k_1 , k_2 quelconques appartenant à K :

$$(4) \qquad [k_1\ k_2\ k] = [[k_1\ k_2\ k]\ k\ \overline{k}]$$

et observons qu'en raison de la résolubilité de (2.4) quels que soient h et k il existe toujours k_1 et k_2 tels que $h = [k_1\ k_2\ k]$ de sorte que
(4) $\rightarrow$ $\forall$ h , $k \in K$, $\exists$ $\overline{k}$ unique ne dépendant que de k tel que

$$(5) \qquad h = [h\ k\ \overline{k}]$$

En utilisant (2)" on obtient de façon analogue

$$(6) \qquad h = [\overline{k}'\ k\ h]$$

(5) et (6) $\Rightarrow$ (7)

$$(7) \qquad k' = [\overline{k}'\ k\ \overline{k}] = \overline{k}$$

Dans (5) en remplaçant k par $[k\ k\ \overline{k}]$, elle devient

$$(8) \qquad h = [h\ [\ k\ k\ \overline{k}]\ \overline{k}] = [h\ \overline{k}\ k\ k\ \overline{k}] = [h\ \overline{k}\ k]$$

La résolubilité de (2.4) entraîne donc bien l'existence pour tout k de $\overline{k}$ unique tel que (2.3) ait lieu, c'est-à-dire l'existence d'un neutralisateur (bilatère) conjugué à k .

Un amas est un groupe ternaire particulier : C'est un groupe ternaire idempotent (VAGNER n'ayant pas envisagé les éléments neutralisateurs conjugués n'a pas considéré les groupes ternaires).

3. Demi-groupe involutif et liaison entre demi-amas et demi-groupe involutif.

1° Demi-groupe involutif. - C'est un demi-groupe (binaire) G muni d'un anti-automorphisme involutif (J. RIGUET a proposé le nom de demi-groupe de VAGNER).

Soit ψ cette involution. Nous avons $\forall\ g\ ,\ g_1\ ,\ g_2 \in G$,

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \psi(\psi(g)) = g \\ \psi(g_1\ g_2) = \psi(g_2)\ \psi(g_1) \end{cases}$$

On note symboliquement

$$\psi(g) = g^{-1}$$

si aucune confusion n'est à craindre. Nous dirons que g^{-1} est le ψ-inverse de g .

Pour $\chi \in \mathcal{P}(G)$ on appelle ψ-inverse χ^{-1} de χ le sous ensemble

$$(3.2)\qquad \chi^{-1} = \bigcup_{g \in \chi} \{ g^{-1} \}$$

χ sera dit involutivement invariant si

$$(3.3)\qquad \chi^{-1} = \chi$$

Un sous-ensemble de G est un sous-demi-groupe involutif s'il est un sous-demi-groupe involutivement invariant.

2° Produit Cartésien de deux demi-groupes involutifs G et H . - Sur le produit cartésien d'ensembles $G \times H$, on définit une opération binaire associative et un anti-automorphisme involutif par

$$(3.4)\qquad \begin{cases} (g_1\ ,\ h_1)(g_2\ ,\ h_2) = (g_1\ g_2\ ,\ h_1\ h_2) \\ (g\ ,\ h)^{-1} = (g^{-1}\ ,\ h^{-1}) \end{cases}$$

en utilisant les opérations et les involutions dans G et H respectivement elles font de $G \times H$ un demi-groupe involutif.

On dit qu'un sous-ensemble $\rho \subset G \times H$ est involutivement invariant si

$$\rho^{-1} = \rho$$

On démontre la proposition :

$$(\rho^{-1} = \rho) \Longleftrightarrow (\rho < g^{-1} > = (\rho < g >)^{-1}), \quad \forall g \tag{3.5}$$

Un demi-groupe arbitraire ne peut pas être érigé en demi-groupe involutif par la définition d'un anti-automorphisme involutif. En particulier on ne peut pas définir un anti-automorphisme involutif sur un demi-groupe ne possédant que des éléments neutres d'un seul côté puisqu'un élément neutre à droite par exemple serait transformé par l'involution en élément neutre à gauche donc en élément neutre bilatère.

Le demi-groupe doit, pour pouvoir supporter un anti-automorphisme involutif, jouir d'une certaine symétrie par rapport à son opération.

Ajoutons qu'on peut définir plusieurs anti-automorphismes involutifs sur certains demi-groupes.

3° Liaison entre un demi-groupe involutif et un demi-amas. - Soit G un demi-groupe involutif. Définissons sur G l'opération algébrique ternaire :

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G, \quad [g_1\ g_2\ g_3] = g_1\ g_2^{-1}\ g_3 \tag{3.6}$$

Elle vérifie (1.1) et fait de G un demi-amas que nous noterons K_G.

Si G possède un élément neutre e on peut revenir de K_G à G en posant $\forall g, g_1, g_2 \in K_G$:

$$\begin{cases} g_1\ g_2 = [g_1\ e\ g_2] \\ g^{-1} = [e\ g\ e] \end{cases} \tag{3.7}$$

Comme on le vérifie le demi-groupe involutif qu'on obtient ainsi est bien G. D'où

THÉORÈME. - Si un demi-groupe involutif G possède un élément neutre e il peut être représenté par un demi-amas admettant e pour élément biunitaire.

Dans le cas où G ne possède pas d'élément neutre, on peut encore le considérer comme demi-amas, mais il ne s'agit plus d'une représentation parfaite car on ne sait pas revenir de ce demi-amas à G.

Partons à présent d'un demi-amas K.

THÉORÈME. - Si un demi-amas K possède un couple d'éléments neutralisateurs conjugués il peut être considéré comme un demi-groupe involutif ayant un élément neutre.

DÉMONSTRATION. - Soient u, $\bar{u}$ un couple de neutralisateurs conjugués du demi-amas K. Définissons dans K l'opération binaire :

$$(3.8) \qquad \forall\ k_1, k_2 \in K, \quad k_1 k_2 = [k_1\ u\ k_2]$$

que nous associerons à la $u\,\bar{u}$-inversion définie par (1.15)

(3.8) est associative :

$$k_1(k_2\ k_3) = [k_1\ u\ [k_2\ u\ k_3]] = [[k_1\ u\ k_2]\ u\ k_3] = (k_1\ k_2)k_3$$

(1.15) est un anti-automorphisme involutif pour le demi-groupe (binaire) ainsi défini :

$$\forall\ k_1, k_2 \in K, \quad (k_1\ k_2)^{-1} = [u\ [k_1\ u\ k_2]\ \bar{u}] = [u\ k_2\ u\ k_1\ \bar{u}]$$

$$= [u\ k_2\ \bar{u}\ u\ u\ k_1\ \bar{u}] = [[u\ k_2\ \bar{u}]\ u\ [u\ k_1\ \bar{u}]] = k_2^{-1}\ k_1^{-1}$$

qui établit le théorème.

Nous noterons par $K u \bar{u}$ le demi-groupe involutif ainsi construit.

$K u \bar{u}$ admet $\bar{u}$ pour élément neutre :

$$\forall\ k \in K, \quad k\,\bar{u} = [k\ u\ \bar{u}] = k\ ; \quad \bar{u}\,k = [\bar{u}\ u\ k] = k$$

Mais le demi-amas $\mathcal{K}_{Ku\bar{u}}$, construit à partir de $K u \bar{u}$ en définissant l'opération ternaire par $[[k_1\ k_2\ k_3]] = k_1\ k_2^{-1}\ k_3$, ne redonne pas le demi-amas K dont on est parti.

On trouve

$$k_1\ k_2^{-1}\ k_3 = [k_1\ u\ [u\ k_2\ \bar{u}]\ u\ k_3] = [k_1\ uu\ k_2\ k_3] \neq [k_1\ k_2\ k_3]$$

On ne peut donc pas dire que le demi-groupe involutif $K u \bar{u}$ représente le demi-amas K, il y a une vraie représentation dans le cas plus restreint établi par VAGNER :

THÉORÈME. - <u>Si un demi-amas</u> K <u>possède un élément biunitaire il peut être considéré comme un demi-groupe involutif ayant un élément neutre.</u>

La démonstration se fait en prenant $u = \bar{u} = e$. Nous désignerons le demi-groupe involutif ainsi construit par K_e.

THÉORÈME. - <u>Si un demi-amas</u> K <u>possède deux couples</u> u_1, $\bar{u}_1$ <u>et</u> u_2, $\bar{u}_2$ <u>de neutralisateurs conjugués, les deux demi-groupes involutifs</u> $k_{u_1\bar{u}_1}$ <u>et</u> $K_{u_2\bar{u}_2}$ <u>sont liés par un isomorphisme involutif.</u>

Pour simplifier nous noterons par le même symbole les multiplications dans $K_{u_1\bar{u}_1}$ et $K_{u_2\bar{u}_2}$.

Appliquons $K_{u_1\bar{u}_1}$ dans $K_{u_2\bar{u}_2}$ par φ définie par :

$$\varphi(k) = [k\ u_1\ \bar{u}_2] \tag{3.9}$$

Nous aurons

$$[\varphi(k)\ u_2\ \bar{u}_1] = [[k\ u_1\ \bar{u}_2]\ u_2\ \bar{u}_1] = k$$

qui montre que φ est une application biunivoque de $K_{u_1\bar{u}_1}$ sur $K_{u_2\bar{u}_2}$. Son inverse φ^{-1} est définie par

$$\varphi^{-1}(k) = [k\ u_2\ \bar{u}_1] \tag{3.10}$$

Cherchons le transformé par φ du produit

$$k_1\ k_2 \in K_{u_1\bar{u}_1}$$

$$\varphi(k_1\ k_2) = [[k_1\ u_1\ k_2]\ u_1\ \bar{u}_2] = [k_1\ u_1\ k_2\ u_1\ \bar{u}_2] = [k_1\ u_1\ \bar{u}_2\ u_2\ k_2\ u_1\ \bar{u}_2] =$$

$$= [[k_1\ u_1\ \bar{u}_2]\ u_2 [k_2\ u_1\ \bar{u}_2]] = \varphi(k_1)\ \varphi(k_2)$$

dans $K_{u_2\bar{u}_2}$ qui montre que φ est un isomorphisme.

Cherchons le transformé par φ du $u_1 \overline{u}_1$-inverse d'un élément k de $K_{\overline{u}_1\overline{u}_1}$:

$$\varphi([u_1\ k\ \overline{u}_1]) = [[u_1\ k\ \overline{u}_1]\ u_1\ \overline{u}_2] = [u_1\ k\ \overline{u}_2]$$
$$= [u_2\ \overline{u}_2\ [u_1\ k\ \overline{u}_2]] = [u_2\ [k\ u_1\ \overline{u}_2]\ \overline{u}_2]$$
$$= [u_2\quad \varphi(k)\ \overline{u}_2]$$

qui signifie que l'isomorphisme est involutif.

Un cas restreint du théorème est celui où $u_1 = \overline{u}_1 = e_1$, $u_2 = \overline{u}_2 = e$ (cas considéré par VAGNER). Nous n'énonçons pas le théorème.

THEORÈME. - <u>Un groupe ternaire</u> K <u>peut être considéré comme groupe de plusieurs façons. Tous ces groupes sont isomorphes entre eux.</u>

DÉMONSTRATION. - u , $\overline{u}$ étant un couple d'éléments neutralisateurs conjugués de K , le demi-groupe involutif $K_{u\overline{u}}$ est un groupe car :

1° Il admet $\overline{u}$ pour élément neutre

2° à tout élément k correspond un inverse dont l'expression est $[\overline{u}\ \overline{k}\ \overline{u}]$; $\overline{k}$ étant le neutralisateur conjugué de k .

En effet

$$k\,[\overline{u}\ \overline{k}\ \overline{u}] = [k\ u\ \overline{u}\ \overline{k}\ \overline{u}] = \overline{u}$$

$$[\overline{u}\ \overline{k}\ \overline{u}]\,k = \overline{u}$$

Observons que $[\overline{u}\ \overline{k}\ \overline{u}\ ] = [\overline{u\ k\ u}]$.

Dans le groupe $K_{u\overline{u}}$ l'inverse $[\overline{u\ k\ u}]$ d'un élément k (au sens de la théorie des groupes) est donc différent du $u\overline{u}$-inverse de k , soit $[u\ k\ \overline{u}]$ que nous avons précédemment défini. Ces deux éléments ne sont confondus que si K est un amas.

4. <u>Groupes généralisés et liaison avec les amas généralisés.</u>

Soit G un demi-groupe quelconque. On y définit une relation binaire symétrique γ satisfaisant à

$$\gamma = (g_1\ ,\ g_2)((g_1\ g_2\ g_1 = g_1)\ \text{ et }\ (g_2\ g_1\ g_2 = g_2)) \tag{4.1}$$

(On a noté par $(\acute{g}_1 , \grave{g}_2)$ l'ensemble des g_1 , g_2 tels que γ est dite relation d'inversion généralisée).

Si $\gamma < g > \neq \emptyset$, ses éléments seront appelés "inverses généralisés de g" , et g sera dit "généralement inversible". Pour alléger le texte nous remplacerons les termes précédents par :

"γ-inverse de g" et "γ-inversible"

Tout élément idempotent de G est γ-inversible, et est son propre γ-inverse.

Si G contient un élément neutre e et si un élément $g \in G$ est inversible (au sens de la théorie des demi-groupes), il est γ-inversible.

PROPOSITION. - Si g_1 et g_2 sont γ-inverses l'un de l'autre, le produit $g_1 \, g_2$ est un idempotent :

$$(g_1 \, g_2 \, g_1 = g_1) \Rightarrow ((g_1 \, g_2)^2 = g_1 \, g_2)$$

1° Demi-groupe idempotemment commutatif. - G est dit idempotemment commutatif si tous les idempotents commutent entre eux. Dans ce cas l'ensemble I des idempotents est un sous-demi-groupe de G.

THÉORÈME. - Dans un demi-groupe idempotemment commutatif G, un élément ne peut pas avoir plus d'un γ-inverse.

En effet soient g' et g'' deux γ-inverses de g. Les éléments $gg', gg'', g'g$, $g''g$ sont des idempotents donc commutent entre eux, d'où

$$gg'' = gg'gg'' = gg'' \, gg' = gg' \quad \text{ce qui entraîne} \quad g'' = g''gg'$$

$$g'g = g'gg''g = g''gg'g = g''g \quad \text{ce qui entraîne} \quad g' = g''gg'$$

soit finalement

$$g' = g''$$

Dans le cas d'un demi-groupe idempotemment commutatif nous noterons encore par g^{-1} l'unique γ-inverse de g, si aucune confusion n'est à craindre.

THÉORÈME. - Si g_1 et g_2 sont γ-inversibles dans un demi-groupe idempotemment commutatif $g_1 \, g_2$ est γ-inversible et son γ-inverse est $g_2^{-1} \, g_1^{-1}$.

En effet :

$$g_1 \; g_2 \; g_2^{-1} g_1^{-1} \; g_1 \; g_2 = g_1 \; g_1^{-1} \; g_1 \; g_2 \; g_2^{-1} \; g_2 = g_1 \; g_2$$

$$g_2^{-1} \; g_1^{-1} \; g_1 \; g_2 \; g_2^{-1} \; g_1^{-1} = g_2^{-1} \; g_2 \; g_2^{-1} \; g_1^{-1} \; g_1 \; g_1^{-1} = g_2^{-1} \; g_1^{-1}$$

Ce théorème entraîne la proposition suivante :

PROPOSITION. - Dans un demi-groupe idempotemment commutatif l'ensemble des éléments γ-inversibles forme un sous-demi-groupe.

2° Groupe généralisé. - C'est un demi-groupe idempotemment commutatif dont tous les éléments sont γ-inversibles.

L'anti-automorphisme involutif que constitue la γ-inversion sera dit **involution canonique** du groupe généralisé.

Un groupe est un groupe généralisé possédant un idempotent unique.

THÉORÈME. - Tout groupe généralisé G considéré comme demi-amas K_G est un amas généralisé.

Inversement si un amas généralisé K contient un élément biunitaire e, le demi-groupe involutif K_e est un groupe généralisé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (Reinhold). - Zur Einführung des Scharbegriffs, J. für reine und ang. Math., t. 160, 1929, p. 199-207.

[2] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. - New York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 25).

[3] CERTAINE (Jeremiah). - The ternary operation $(abc) = ab^{-1}c$ of a group, Bull. Amer. math. Soc., t. 49, 1943, p. 869-877.

[4] PRÜFER (Heinz). - Theorie der Abelschen Gruppen, I : Grundeigenschaften, Math. Z., t. 20, 1924, p. 165-187.

[5] RIGUET (Jacques). - Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bull. Soc. math. France, t. 76, 1948, p. 114-155.

[6] VAGNER (V. V.). - Teorija obobščennykh grud i obobščennykh grupp, Recueil math. Akad. nauk SSSR (Mat. Sbornik), N. S., t. 32 (74), 1953, p. 545-632.