Pierre Lefebvre

Sur les demi-groupes admettant des complexes nets d'un côté minimaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, n° 1 (1958-1959), exp. n° 2, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_1_A2_0>

SUR LES DEMI-GROUPES ADMETTANT DES COMPLEXES NETS D'UN CÔTÉ MINIMAUX

par Pierre LEFEBVRE

INTRODUCTION. - Cet exposé présente les premiers résultats obtenus dans l'étude d'une classe remarquable de demi-groupes : celle des demi-groupes possédant des complexes nets d'un côté minimaux. Ces résultats ont été résumés dans une note publiée le 28 juillet 1958 aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

Un demi-groupe est un ensemble D dans lequel est définie une opération associative : $x(yz) = (xy)z$; $\forall\ x , y , z \in D$.

Dans un demi-groupe quelconque D , un complexe H est dit net à droite si, pour tout $a \in D$ il existe $x \in D$ vérifiant $ax \in H$. On définit symétriquement un complexe net à gauche. Nous n'utilisons pas dans ce travail la notion de complexe net (c'est-à-dire net à droite et net à gauche). Remarquons que tout complexe contenant un complexe net d'un côté est net du même côté.

Un complexe K net à droite, par exemple, sera dit minimal, s'il ne contient aucun complexe net à droite différent de K .

La notion de complexe net, introduite par P. DUBREIL [6] à propos de la recherche des groupes homomorphes à un demi-groupe donné, est à l'origine de nombreux travaux. Parmi ceux-ci, ceux de A. H. CLIFFORD [2] [3] [4] , D. D. MILLER [4] et G. THIERRIN [15] ont plus particulièrement guidé notre recherche.

A. H. CLIFFORD et D. D. MILLER [4] ont étudié les demi-groupes possédant des éléments nets, ou, dans leur terminologie, des éléments zéroïdes. G. THIERRIN a repris dans sa thèse l'étude de ces demi-groupes, auxquels il donne le nom d'homogroupe.

Un homogroupe T est un demi-groupe possédant au moins un élément net à droite r ($\forall\ a \in D$, $\exists\ x \in D$, $ax = r$) et un élément net à gauche 1 ($\forall\ a \in D$, $\exists\ x \in D$, $ya = 1$). Parmi les nombreuses propriétés des homogroupes, rappelons seulement ici que l'ensemble R des éléments nets à droite est égal à l'ensemble L des éléments nets à gauche. L'ensemble commun N , appelé nodule de l'homogroupe, est un groupe, idéal bilatère minimum de T. On démontre par ailleurs aisément qu'un demi-groupe contenant un groupe comme idéal (bilatère) est un homogroupe.

Suivant alors une suggestion de P. DUBREIL [9], nous avons étudié les propriétés obtenues en remplaçant les éléments nets ou zéroïdes par des complexes nets d'un côté minimaux. Car tout élément du nodule d'un homogroupe est un complexe net, à droite et à gauche, réduit à cet élément, et évidemment minimal.

Nous avons alors obtenu, non seulement une généralisation satisfaisante de la notion d'homogroupe, mais la mise en évidence d'une classe de demi-groupes déjà étudiée par de nombreux auteurs, en particulier CLIFFORD (Semigroups containing minimal ideals [3]).

Dans ce travail, nous établissons d'abord quelques propriétés fondamentales des complexes nets à droite minimaux d'un demi-groupe. Les résultats correspondant au cas des complexes nets à gauche minimaux s'énoncent sans difficulté par dualité.

Nous démontrons ensuite que tous les complexes nets à droite minimaux d'un demi-groupe ont même puissance (au sens de la théorie des ensembles), que leur existence équivaut à celle des idéaux à droite minimaux, que leur réunion est égale à celle des idéaux du même côté minimaux, qui est l'idéal bilatère minimum du demi-groupe [3]. En supposant alors l'existence simultanée de complexes nets à droite minimaux et de complexes nets à gauche minimaux, nous démontrons que les réunions correspondantes sont égales entre elles, et égales à l'idéal bilatère minimum du demi-groupe, qui est dans ces conditions un demi-groupe complètement simple, réunion de groupes disjoints isomorphes.

Nous établissons enfin que, réciproquement, si un demi-groupe contient un idéal bilatère complètement simple, ce demi-groupe admet des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux (dont cet idéal est réunion).

Ce résultat généralise celui qu'on connaît pour les homogroupes.

Signalons encore que les résultats ici présentés deviennent triviaux lorsque le demi-groupe possède un zéro. Car il est immédiat, alors, que tout complexe net (d'un côté) contient zéro, et que tout complexe contenant zéro est net. Le complexe $\{0\}$ est le seul complexe net (d'un côté) minimal du demi-groupe.

Nous présenterons ultérieurement une étude concernant le cas des demi-groupes avec zéro, où les résultats obtenus avec des définitions appropriées ne sont pas triviaux.

1. Propriétés fondamentales des complexes nets à droite minimaux d'un demi-groupe.

Dans un mémoire récent [9] P. DUBREIL montre par un exemple (demi-groupe cyclique infini) qu'un demi-groupe ne possède pas nécessairement, sauf s'il est fini, des complexes nets (d'un côté) minimaux. Il donne à ce propos une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe net à droite soit minimal, qui est à l'origine des principaux résultats de ce travail.

THÉORÈME 1.1. - *Pour qu'un complexe net à droite* K *d'un demi-groupe* D *soit minimal, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout* $k \in K$:

$$k(K \cdot\!\!{}^{\bullet}\, k) = \{k\}$$

où $K \cdot\!\!{}^{\bullet}\, k$ représente le résiduel ou quotient à droite de K par un élément k de K.

Condition suffisante. - Si $k(K \cdot\!\!{}^{\bullet}\, k) = \{k\}$, $\forall\ k \in K$, le complexe $K - \{k\}$ n'est pas net à droite dans D, et ceci, quel que soit $k \in K$. Sinon, il existe $x \in D$ tel que $kx \in K - \{k\}$, c'est-à-dire $x \in K \cdot\!\!{}^{\bullet}\, k$ et $kx = k$, en contradiction avec l'hypothèse.

Condition nécessaire. - Soit $y \in K \cdot\!\!{}^{\bullet}\, k$, c'est-à-dire $ky \in K$. Si $ky \neq k$, $ky \in K - \{k\}$. D'après l'hypothèse de minimalité, $K - \{k\}$ n'est pas net à droite dans D ; il existe donc $a \in D$ tel que $ax \notin K - \{k\}$ pour tout $x \in D$. Or il existe $x_1 \in D$ tel que $ax_1 \in K$, donc $ax_1 = k$ d'où $ax_1\, y = ky \in K - \{k\}$ en contradiction avec le résultat précédent.

En particulier, si K est à la fois un sous-demi-groupe de D et un complexe net à droite minimal, la condition précédente donne $kK = \{k\}$, c'est-à-dire que tout élément de K est permis à droite dans K.

Nous déduisons de ce théorème des propriétés auxquelles nous nous référerons constamment ; nous supposerons désormais que K représente un complexe net à droite minimal du demi-groupe D.

PROPRIÉTÉ 1.1. - *Pour tout élément* $k \in K$, *la relation* $kx \in K$ *entraîne* $kx = k$.
En effet, $kx \in K$ équivaut à $x \in K \cdot\!\!{}^{\bullet}\, k$.

PROPRIÉTÉ 1.2. - *Quel que soit* $k \in K$; *il existe* $x \in D$ *tel que* $kx = k$.

K étant net à droite, il existe $x \in D$ tel que $kx \in K$. De la propriété 1.1 résulte alors $kx = k$.

PROPRIÉTÉ 1.3. - _Quels que soient_ $m \in D$ _et_ $k \in K$, _il existe_ $x \in D$ _tel que_ $kmx = k$.

K étant net à droite, il existe $x \in D$ tel que $(km)x \in K$. De la propriété 1.1 résulte alors $(km)x = k(mx) = k$.

PROPRIÉTÉ 1.4. - _Si_ k_1 _et_ k_2 _sont deux éléments de_ K, _la relation_ $k_1 x_1 = k_2 x_2$ _entraîne_ $k_1 = k_2$.

En effet, d'après la propriété 1.3, il existe $t \in D$ tel que $k_1 x_1 t = k_1$.

D'où $k_2 x_2 t = k_2(x_2 t) = k_1$ c'est-à-dire $k_2(x_2 t) \in K$ donc, d'après la propriété 1.1, $k_2(x_2 t) = k_2$ et finalement $k_1 = k_2$.

Etant donné un élément k _quelconque_ d'un demi-groupe D, l'ensemble S_k des éléments x de D vérifiant $kx = k$ (éléments-unité à droite de k) est un sous-demi-groupe de D, éventuellement vide. Si k appartient à au moins un complexe net à droite minimal de D, on peut affirmer, d'après la propriété 1.2, que S_k n'est pas vide.

Notons que S_k d'après sa définition même, est indépendant du complexe net à droite minimal le contenant.

THÉORÈME 1.2.

1° _Si_ $k \in K$, _complexe net à droite minimal de_ D, S_k _est net à droite._

2° _Si_ K _est en outre un sous-demi-groupe, on a_ $K \subsetneqq S_k$.

3° K _étant un complexe net à droite minimal et un sous-demi-groupe, pour qu'on ait l'égalité_ $S_k = K$ _pour tout_ $k \in K$, _il faut et il suffit que_ K _soit unitaire à gauche._

(1°) Quel que soit $a \in D$, il existe, d'après la propriété 1.3, un élément t de D tel que $kat = k$, donc $at \in S_k$; S_k est net à droite.

(2°) Si K est un sous-demi-groupe de D, on a $kK = \{k\}$, quel que soit $k \in K$, donc $K \subsetneqq S_k$.

(3°) La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire, car si $kx = k_1$, avec $k, k_1 \in K$, on a $kx \in K$ donc $kx = k(= k_1)$ et $x \in S_k = K$; K est bien unitaire à gauche.

Le théorème suivant fournit une propriété essentielle des complexes nets à droite minimaux d'un demi-groupe.

THÉORÈME 1.3. - K étant un complexe net à droite minimal de D, le complexe Km est net à droite minimal, quel que soit $m \in D$.

Km est net à droite ; car si $a \in D$, il existe $x \in D$ vérifiant $ax \in K$, d'où

$$axm = a(xm) \in Km \text{ .}$$

Montrons qu'il est minimal, c'est-à-dire qu'on a, d'après le théorème 1.1,

$$km(Km \cdot^{\cdot} km) = \{km\}$$

pour tout élément $km \in Km$, $k \in K$.

Soit y tel que $kmy \in Km$ ou $kmy = k_1 m$ pour un $k_1 \in K$.

D'après la propriété 1.4, on a $k_1 = k$, d'où $kmy = km$ pour tout $y \in Km \cdot^{\cdot} km$

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des complexes nets à droite minimaux. Soit $R = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ la réunion de ces complexes. Nous énonçons, comme conséquence immédiate du théorème 1.3 :

COROLLAIRE 1.1. - Dans un demi-groupe D contenant des complexes nets à droite minimaux, la réunion R de ces complexes est un idéal à droite de D.

REMARQUE 1.1. - Nous montrons plus loin qu'en fait, R est un idéal bilatère de D.

REMARQUE 1.2. - Si un demi-groupe D est simple à droite (et même simple), ou bien R est vide, ou bien $R = D$.

Nous donnons à la fin du paragraphe 3 un exemple important de ce dernier cas.

2. Etude de certaines correspondances entre complexes nets (d'un côté) minimaux.

A. Nous considérons dans ce paragraphe deux complexes K et K' de D, que nous supposons d'abord seulement nets à droite.

Quel que soit $a \in D$, il existe x, $x' \in D$ tels que $ax \in K$; $ax' \in K'$.

Nous définissons alors entre ces deux complexes plusieurs correspondances de la manière suivante :

1° Une application f, en général multiforme [8], de K dans K', définie sur K : l'image $f(k)$ d'un élément k de K étant l'ensemble des éléments k' de K' tels qu'il existe $x \in D$ vérifiant $kx = k'$:

$$f(k) = \{k' \; ; \; k' \in K' \; ; \; \exists \; x \in D \; ; \; kx = k'\}$$

2° L'application inverse de f, définie seulement sur $f(K) \subseteq K'$: l'image $f^{-1}(k')$ d'un élément k' de K' étant l'ensemble des éléments k de K tels qu'il existe $x \in D$ vérifiant $kx = k'$:

$$f^{-1}(k') = \{k \; ; \; k \in K \; ; \; \exists \; x \in D \; ; \; kx = k'\}$$

3° Une application φ, en général multiforme, de K' dans K, définie sur K' : l'image $\varphi(k')$ d'un élément k' de K' étant l'ensemble des éléments k de K tels qu'il existe $x' \in D$ vérifiant $k'x' = k$:

$$\varphi(k') = \{k \; ; \; k \in K \; ; \; \exists \; x' \in D \; ; \; k'x' = k\}$$

4° L'application inverse de φ, définie seulement sur $\varphi(K') \subseteq K$: l'image $\varphi^{-1}(k)$ d'un élément k de K étant l'ensemble des éléments k' de K' tels qu'il existe $x' \in D$ vérifiant $k'x' = k$:

$$\varphi^{-1}(k) = \{k' \; ; \; k' \in K' \; ; \; \exists \; x' \in D \; ; \; k'x' = k\}$$

B. Nous supposons maintenant que l'un des complexes K ou K' est minimal. Nous ferons le raisonnement en supposant K' <u>net à droite minimal</u>.

Nous avons alors les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 2.1. - <u>Pour tout élément</u> k' <u>de</u> K', <u>complexe net à droite minimal de</u> D : $f\varphi(k') = \{k'\}$.

Si $k'_1 \in f\varphi(k')$, il existe d'après la définition de f, $x_1 \in D$ vérifiant $k'_1 = kx_1$ pour un $k \in \varphi(k')$.

$k \in \varphi(k')$ entraîne qu'il existe $x' \in D$ avec $k = k'x'$.

On a donc $k'_1 = k'x'x_1$ c'est-à-dire, d'après la propriété 1.1, $k'_1 = k'$.

COROLLAIRE 2.1. - $f(K) = K'$. <u>Autrement dit, l'application</u> f <u>applique</u> K <u>sur</u> K'.

COROLLAIRE 2.2. - <u>L'application</u> f^{-1} <u>est définie sur</u> K'.

COROLLAIRE 2.3. - <u>Pour tout élément</u> k' <u>de</u> K' : $f^{-1}(k') \supseteq \varphi(k')$

Les corollaires 2.1 et 2.2 sont immédiats ; pour 2.3, on sait [8], que pour une application quelconque f d'un ensemble E dans un ensemble E', on a, pour toute partie A de E : $f^{-1} f(A) \supseteq A$.

Donc : $f^{-1}(k') = f^{-1}\, f\, \varphi(k') \supsetneqq \varphi(k')$

PROPRIÉTÉ 2.2. - Les images $\varphi(k')$; $k' \in K'$ sont disjointes.

Autrement dit : $k_1' \neq k_2'$, k_1' , $k_2' \in K'$ entraîne $\varphi(k_1') \cap \varphi(k_2') = \emptyset$.

Sinon, il existerait $k \in K$ commun aux images de deux éléments distincts k_1' , k_2' de K' .

C'est-à-dire, d'après les définitions, $k = k_1'\, x_1' = k_2'\, x_2'$, ce qui conduit d'après la propriété 1.3 à $k_1' = k_2'$ en contradiction avec l'hypothèse $k_1' \neq k_2'$.

COROLLAIRE 2.4. - L'application φ est semi-uniforme [8], c'est-à-dire $\varphi(k_1') \cap \varphi(k_2') \neq \emptyset$ entraîne $\varphi(k_1') = \varphi(k_2')$.

En effet, d'après la propriété 2.2, $\varphi(k_1') \cap \varphi(k_2') \neq \emptyset$ entraîne $k_1' = k_2'$.

PROPRIÉTÉ 2.3. - Pour tout $k \in \varphi(K') \subseteq K$, $\varphi^{-1}(k)$ est définie et uniforme.

En effet, la propriété $\varphi(x) \between \varphi(y) \Rightarrow x = y$ caractérise visiblement, parmi les applications semi-uniformes, celles qui sont inverses d'applications uniformes.

C. Par dualité, nous énonçons les conclusions correspondant au cas où K est net à droite minimal.

PROPRIÉTÉ 2.1'. - Pour tout élément k de K , complexe net à droite minimal de D : $\varphi f(k) = \{k\}$.

COROLLAIRE 2.1'. - $\varphi(K') = K$. Autrement dit, l'application φ applique K' sur K .

COROLLAIRE 2.2'. - L'application φ^{-1} est définie sur K .

COROLLAIRE 2.3'. - Pour tout élément k de K ; $\varphi^{-1}(k) \supsetneqq f(k)$.

PRORPIÉTÉ 2,2'. - Les images $f(k)$, $k \in K$ sont disjointes.

COROLLAIRE 2.4'. - L'application f est semi-uniforme.

PROPRIÉTÉ 2.3'. - Pour tout $k' \in f(K) \subseteq K'$, $f^{-1}(k')$ est définie et uniforme.

D. Si nous supposons alors K et K' nets à droite minimaux, la synthèse des deux ensembles de propriétés précédemment démontrées conduit aux résultats suivants :

PROPRIÉTÉ 2.4. - $f(K) = K'$; $\varphi(K') = K$; f^{-1} et φ^{-1} sont définies respectivement sur K' et sur K .

PROPRIÉTÉ 2.5. - f^{-1} et φ^{-1} sont uniformes.

PROPRIÉTÉ 2.6. - $f^{-1}(k') = \varphi(k')$; $\varphi^{-1}(k) = f(k)$.

Cette dernière propriété résulte de ce que les premiers membres des relations $f^{-1}(k') \supseteqq \varphi(k')$ et $\varphi^{-1}(k) \supseteqq f(k)$ ne contiennent qu'un seul élément.

Autrement dit, f et φ sont des applications biunivoques, inverses l'une de l'autre.

Nous énoncerons :

THÉORÈME 2.1. - Entre deux complexes nets à droite minimaux K et K' d'un demi-groupe D , on peut établir une correspondance biunivoque.

Cette correspondance est définie par $k' = f(k)$ s'il existe $x \in D$ tel que $k' = kx$, ou par $k = \varphi(k')$ s'il existe $x' \in D$ tel que $k = k'x'$.

Nous poserons $f = C_K^{K'}$, $\varphi = f^{-1} = C_{K'}^{K}$.

REMARQUE. - L'application C_K^K existe d'après le raisonnement général, et c'est l'identité d'après la propriété 1.2.

En particulier :

THÉORÈME 2.2. - Si les deux complexes nets à droite minimaux K et K' sont des sous-demi-groupes, $C_K^{K'}$ est un isomorphisme.

On sait (théorème 1.1) que les éléments d'un sous-demi-groupe net à droite minimal sont permis à droite dans ce sous-demi-groupe.

Si k_1 , $k_2 \in K$ ont pour images dans K' : k_1' , k_2' on a $k_1 k_2 = k_1$, $k_1' k_2' = k_1'$.

La propriété en résulte.

Il est souvent utile de pouvoir reconnaître si un élément $k' \in K'$ est l'image d'un élément $k \in K$ dans $C_K^{K'}$. Le théorème suivant fournit une réponse rapide.

THÉORÈME 2.3. - Si K et K' sont des complexes nets à droite minimaux du demi-groupe D , les relations $k' = kx$ et $k = k'x'$ pour $k \in K$, $k' \in K'$, x , $x' \in D$ sont équivalentes.

En se reportant à la définition des applications f et φ, et en tenant compte des égalités $f = \varphi^{-1}$, $\varphi = f^{-1}$ on voit que :

$k' = kx$ entraîne $k' = f(k)$ d'où $k = f^{-1}(k') = \varphi(k') = k'x'$ pour un $x' \in D$.

$k = k'x'$ entraîne $k = \varphi(k')$ d'où $k' = \varphi^{-1}(k) = f(k) = kx$ pour un $x \in D$.

REMARQUE. - Dans un homogroupe, les propriétés précédentes signifient qu'il n'existe pas de complexes nets (d'un côté) minimaux contenant plus d'un élément.

On le démontre directement en notant que, dans un homogroupe, tout complexe net (d'un côté) coupe le module, idéal bilatère de D (Cf. le lemme 4.1). Autrement dit, tout complexe net (d'un côté) contient un élément net, lequel est un complexe net minimal de l'homogroupe.

Les applications f et φ précédemment définies permettent aussi de démontrer la théorème suivant :

THÉORÈME 2.4. - <u>Dans un demi-groupe contenant des complexes nets à droite minimaux, tout complexe net à droite contient au moins un complexe net à droite minimal.</u>

Soient K' un complexe net à droite, et K un complexe net à droite <u>minimal</u> arbitraire. Dans l'application f de K dans K', les ensembles $f(k)$ sont disjoints (propriété 2.2'). Nous choisissons dans chaque image $f(k)$ un représentant, soit k'_1.

On a $k'_1 \in f(k)$ donc $k'_1 = kx_1$ pour $x_1 \in D$.

Nous définissons ainsi une application $f_1(k)$ de K sur un sous-ensemble K'_1 de K'. Par définition, f_1 est biunivoque. Montrons que K'_1 est net à droite minimal. Pour tout $a \in D$, il existe au moins un $x \in D$ tel que $ax = k \in K$, d'où $axx_1 = kx_1 = k'_1 \in K'_1$: K'_1 est net à droite. Si $k'_1 x = k'_2$, avec $k'_1 = f_1(k_1)$ et $k'_2 = f_1(k_2)$, on a $k'_1 = k_1 x_1$ $k'_2 = k_2 x_2$, d'où $k_1 x_1 x = k_2 x_2$, donc $k_1 = k_2$ puisque K est minimal.

Finalement $f_1(k_1) = f_1(k_2)$ d'où $k'_1 = k'_2$; la minimalité de K'_1 en résulte. Bien entendu, un complexe net donné peut contenir plusieurs complexes nets minimaux : il suffit pour le voir de prendre comme complexe net une réunion de complexes nets minimaux.

3. Exemples.

1° Considérons le demi-groupe fini $D = (a , b , c , d , e)$ donné par sa table de multiplication [13].

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	d	d
b	b	b	b	e	e
c	b	b	c	e	e
d	d	d	d	a	a
e	e	e	e	b	b

Dans ce demi-groupe, les complexes nets à droites minimaux sont : (a , b), (a , e), (b , d), (d , e). Les complexes nets à gauche minimaux sont des éléments zéroïdes à gauche : ce sont les complexes réduits aux éléments : (a), (b), (d), (e).

2° Les demi-groupes complètement simples ont été étudiés par de nombreux auteurs : REES [10], CLIFFORD [2], CROISOT [5]. Nous verrons par la suite qu'ils jouent un rôle très important dans notre théorie des demi-groupes admettant à la fois des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux. D'après une remarque faite dans l'introduction, nous pouvons nous limiter ici au cas "sans zéro".

On sait alors qu'un demi-groupe complètement simple peut être représenté de la façon suivante : G étant un groupe, J et K deux ensembles d'indices et $(j , k) \to p_{k,j}$ une application de $J \times K$ dans G, les éléments de D sont les triples $(a ; j , k)$ avec $a \in G$, $j \in J$, $k \in K$; la loi de composition étant donnée par :

$$(a ; j , k)(a' ; j' , k') = (ap_{k,j'} a' ; j , k')$$

Rappelons que D est réunion de groupes isomorphes (disjoints) [10].

On vérifie aisément que les complexes nets à droite minimaux, par exemple, sont les ensembles $\{(a ; j , k)\}_{j \in J}$ où j décrit J, les éléments $a \in G$ et $k \in K$ associés à chaque $j \in J$ étant arbitrairement choisis. La puissance commune de ces ensembles est celle de J. Notons que la réunion de ces complexes est égale au demi-groupe tout entier. On caractérise de même les complexes nets à gauche minimaux, dont la puissance est celle de K et la réunion égale à D.

3° Les demi-groupes de Baer et Lévi [1] [14] sont des demi-groupes admettant la division à gauche, tels qu'aucun élément n'admette d'élément-unité à droite. Chaque élément est net à gauche, c'est-à-dire complexe net à gauche minimal ; et il n'y a pas de complexes nets à droite minimaux, puisque la propriété 1.2 entraîne l'existence d'éléments-unité à droite pour les éléments de ces complexes.

4° Dans un demi-groupe libre, dont les éléments sont les "mots" formés à partir d'un ensemble fini ou non Λ, aucun élément n'admet d'élément-unité à droite ou à gauche. Les demi-groupes libres ne contiennent donc ni complexes nets à droite minimaux, ni complexes nets à gauche minimaux.

4. Etude de la réunion des complexes nets à droite minimaux d'un demi-groupe.

Nous savons déjà que R, réunion des complexes nets à droite minimaux, supposée non vide, d'un demi-groupe D, est un idéal à droite dans D (Corollaire 1.1).

THÉORÈME 4.1. - Quel que soit K, complexe net à droite minimal de D, on a $R = KD$.

1° $KD \subseteq R$ est immédiat puisque tout complexe Km, $m \in D$, est net à droite minimal.

2° $R \subseteq KD$. Soit k' un élément quelconque de R ; k' appartient à au moins un complexe net à droite minimal K' différent ou non de K. Dans $C_K^{K'}$ (et le cas échéant dans C_K^K), on a $k' = f(k) = kx$, $x \in D$ qui démontre l'inclusion.

COROLLAIRE 4.1. - K et K' étant deux complexes nets à droite minimaux quelconques de D, on a :

$$KD = K'D \quad (= R)$$

COROLLAIRE 4.2. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément a de D appartienne à au moins un complexe net à droite minimal est que, pour un $k \in K$ net à droite minimal quelconque, on ait : $a = kx$.

COROLLAIRE 4.3. - L'idéal à droite engendré dans D par un élément quelconque k de R est contenu dans R et est égal à kD.

Soit $k \in K \subseteq R$. L'idéal à droite engendré par k est $R_k = k \cup kD$ [7].

On a $k \in R$ par hypothèse et $kD \subseteq R$ d'après la relation $R = KD$. D'où $R_k \subseteq R$.

Comme il existe (propriété 1.2) $x \in D$ vérifiant $k = kx$, on a finalement $R_k = kD$.

Il se trouve d'ailleurs que cette réunion des complexes nets à droite minimaux de D a d'autres liens remarquables avec les idéaux à droite de D.

THÉORÈME 4.2. - L'idéal à droite engendré par tout élément k de R est minimal.

Nous ferons ici une adaptation de la démonstration de S. SCHWARZ [11] pour le théorème 1.3 de son mémoire. Soit $k \in K \subseteq R$. Considérons l'idéal à droite engendré par k dans D

$$R_k = k \cup kD = kD \subseteqq R$$

Si R_k n'est pas minimal, il contient un idéal à droite propre V : $V \subset R_k$.

Soit $k' \in V$. L'idéal à droite $R_{k'}$ engendré par k' dans D vérifie : $R_{k'} \subseteqq V \subset R_k$. Nous avons donc nécessairement $k' \neq k$. Puisque $k' \in R_k = kD$, on a $k' = kx$ pour un $x \in D$.

Si K' désigne un complexe net à droite minimal contenant k', les propriétés de la correspondance $C_K^{K'}$ (théorème 2.3) permettant alors d'écrire $k = k'x'$ pour un $x' \in D$, donc $k \in k' D = R_{k'}$.

R_k étant par définition le plus petit idéal à droite contenant k, la relation précédente entraîne $R_k \subseteqq R_{k'}$ en contradiction avec $R_{k'} \subseteqq V \subset R_k$. L'idéal à droite R_k est donc minimal.

COROLLAIRE 4.4. - R <u>est réunion d'idéaux à droite minimaux de</u> D.

COROLLAIRE 4.5. - <u>Si un demi-groupe contient des complexes nets à droite minimaux, il contient des idéaux à droite minimaux.</u>

Avant de démontrer la réciproque de cette dernière proposition, nous établirons :

LEMME 4.1. - <u>La condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe d'un demi-groupe</u> D <u>soit net à droite est qu'il coupe tout idéal à droite de ce demi-groupe</u>.

<u>La condition est nécessaire.</u> - Soient K net à droite et I idéal à droite de D. Si $i \in I$, il existe $x \in D$ tel que $ix \in K$; or $ix \in I$.

<u>La condition est suffisante.</u> - Si un complexe K coupe tout idéal à droite de D, il est net à droite. Car si $a \in D$, $aD \cap K \neq \emptyset$ signifie qu'il existe $x \in D$ tel que $ax \in K$.

Nous pouvons alors énoncer :

THÉORÈME 4.3. - <u>Si un demi-groupe</u> D <u>contient des idéaux à droite minimaux, il contient des complexes nets à droite minimaux.</u>

Nous désignerons par $N = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ la réunion des idéaux à droite minimaux de D, indexés par l'ensemble A.

Notons d'abord, d'après CLIFFORD [3] que tout idéal à droite de D contient au moins un idéal à droite minimal.

Tout complexe obtenu en choisissant dans chaque idéal I_α un élément i_α et un seul, est net à droite, car il coupe, d'après la remarque précédente, tous les idéaux à droite de D. Et il est minimal, puisque la condition du lemme 4.1 est nécessaire.

THÉORÈME 4.4. - Dans un demi-groupe, l'existence des complexes nets à droite minimaux est équivalente à celle des idéaux à droite minimaux.

Ce théorème résulte immédiatement du corollaire 4.5 et du théorème 4.3.

THÉORÈME 4.5. - La réunion R des complexes nets à droite minimaux d'un demi-groupe D est égale à la réunion N des idéaux à droite minimaux de D : c'est l'idéal bilatère minimum de D.

En effet, d'après le lemme 4.1, le procédé du théorème 4.3 fournit tous les complexes nets à droite minimaux de D. La propriété $R = N$ résulte alors immédiatement du procédé de formation de ces complexes.

On sait en outre [3] que la réunion des idéaux à droite minimaux d'un demi-groupe est l'idéal bilatère minimum de ce demi-groupe (appelé noyau par certains auteurs).

REMARQUE 4.1. - En fait, R est la somme des idéaux à droite minimaux de D, qui sont alors tous de la forme $I = kD$, k étant un élément quelconque d'un complexe net à droite minimal K arbitrairement choisi.

Si I est un idéal à droite minimal quelconque de D, nous savons que I coupe K. Soit $k \in I \cap K$. L'idéal à droite kD est contenu dans I puisque $k \in I$. D'où $kD = I$. Les idéaux kD $(k \in K)$ sont disjoints ; car une relation de la forme $kx = k_1 x_1$ avec $k , k_1 \in K$, $k \neq k_1$, $x , x_1 \in D$ est impossible d'après la propriété 1.4.

Nous pourrons écrire désormais : $R = \sum_{k \in K} kD$.

REMARQUE 4.2. - Nous pouvons déduire directement de ce résultat que R est idéal bilatère de D. Il suffit de prouver que c'est un idéal à gauche.

Soit $k_1 = kx \in kD \subseteq R$; c étant un élément quelconque de D : $ck_1 \in ckD$ qui est encore [3] un idéal à droite minimal de D. D'après la remarque précédente, on a $ckD \subseteq R$ et on peut même affirmer qu'il existe $k^* \in K$ tel que $ckD = k^* D$.

REMARQUE 4.3. - La démonstration du théorème 4.3 fournit également une autre démonstration de l'équipotence des complexes nets à droite minimaux de D.

En effet, il résulte immédiatement de leur formation à partir des idéaux à droite minimaux que ces complexes ont même puissance : celle de l'ensemble de ces idéaux.

La notion de demi-groupe inversif (à droite ou à gauche) introduite par R. CROISOT [5] permet de donner une propriété intéressante de R.

Rappelons qu'un demi-groupe inversif à droite est un demi-groupe vérifiant la condition (C) : pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = x^2 u$.

THÉORÈME 4.6. - Si un demi-groupe D contient des complexes nets à droite minimaux, la réunion R de ces complexes est un sous-demi-groupe inversif à droite de D.

R est un idéal de D, donc un sous-demi-groupe. Montrons que, pour tout $k \in R$, il existe $u \in R$ tel que $k = k^2 u$. Soit $k \in R$; k appartient à au moins un complexe net à droite minimal K. On sait que pour tout $m \in D$, il existe $x \in D$ tel que $kmx = k$ (propriété 1.3). Prenons $m = k^2$; l'égalité précédente s'écrit $k.k^2.x = k$ ou encore $k = k^2(kx)$ avec $kx \in R$. La condition (C) est vérifiée pour R.

Dans [5] R. CROISOT démontre qu'un demi-groupe inversif à droite est réunion de demi-groupes simples. Or tout demi-groupe simple dans R l'est dans D, car tout idéal dans D est idéal dans R. D'où :

COROLLAIRE 4.6. - Si un demi-groupe D contient des complexes nets à droite minimaux, la réunion R de ces complexes est réunion de sous-demi-groupes simples de D.

Nous énoncerons maintenant les principaux résultats concernant les demi-groupes admettant des complexes nets à gauche minimaux.

5. Cas des demi-groupes admettant des complexes nets à gauche minimaux.

THÉORÈME 5.1. - L'existence des complexes nets à gauche minimaux dans un demi-groupe D est équivalente à celle des idéaux à gauche minimaux.

Si L est la réunion des complexes nets à gauche minimaux, et N celles des idéaux à gauche minimaux, on a $L = N$, idéal bilatère minimum de D.

L est un sous-demi-groupe inversif à gauche, réunion de sous-demi-groupes simples de D.

6. Cas des demi-groupes admettant à la fois des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux.

Rappelons que nous avons en vue, dans cet exposé, principalement le cas des demi-groupes sans zéro. Les résultats obtenus, appliqués au cas "avec zéro" sont sans grand intérêt. Une étude de ce cas sera présentée ultérieurement.

On sait [3] que, s'il existe à la fois des idéaux à droite minimaux et des idéaux à gauche minimaux, la réunion des idéaux à droite minimaux est égale à celle des idéaux à gauche minimaux ; l'ensemble commun est l'idéal bilatère minimum du demi-groupe. De plus, cet idéal est un demi-groupe complètement simple [10] réunion de groupes disjoints isomorphes.

En tenant compte des résultats précédents, nous obtenons :

THÉORÈME 6.1. - Dans un demi-groupe admettant à la fois des complexes nets à droite minimaux, dont la réunion est R, et des complexes nets à gauche minimaux, dont la réunion est L, on a :

$$R = L$$

L'ensemble commun N $(N = R = L)$ est l'idéal bilatère minimum du demi-groupe, sous-demi-groupe complètement simple de D et réunion de groupes disjoints isomorphes.

Autrement dit, le demi-groupe contient un demi-groupe complètement simple, réunion de groupes isomorphes, comme idéal (bilatère minimum).

REMARQUE 6.1. - On peut démontrer directement l'égalité $R = L$.

Tout idéal à gauche étant un complexe net à droite, L par exemple contient un complexe net à droite minimal K. De $K \subseteq L$, on déduit $KD = R \subseteq LD \subseteq L$.

L'inclusion $L \subseteq R$ se démontre de la même façon.

REMARQUE 6.2. - On peut rattacher les résultats précédents à ceux de O. STEINFELD [12], obtenus en utilisant la notion de quasi-idéal (intersection d'un idéal à droite et d'un idéal à gauche). L'existence simultanée de complexes nets à droite minimaux et de complexes nets à gauche minimaux équivaut à celle de quasi-idéaux minimaux.

REMARQUE 6.3. - On retrouve également une partie du théorème 6.1 en notant [5] qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe N soit réunion de groupes est qu'il soit inversif à droite et à gauche.

REMARQUE 6.4. - Dans l'exemple (1), on a $R = L = (a , b , d , e)$. Les groupes sont (a , d) et (b , e). Dans l'exemple (2), on a $R = L = D$ (D est lui-même un demi-groupe complètement simple.

REMARQUE 6.5. - Le théorème 6.1 s'applique à tout demi-groupe fini : car l'existence des complexes nets (d'un côté) minimaux, ou, ce qui revient au même, des idéaux (d'un côté) minimaux, est alors assurée.

7. Demi-groupes contenant un idéal bilatère complètement simple.

Nous étudions dans ce paragraphe une réciproque du théorème 6.1.

LEMME 7.1. - Si N est un idéal bilatère d'un demi-groupe D, les complexes nets (d'un côté) minimaux de D sont ceux du sous-demi-groupe N.

En effet, tout complexe net (d'un côté) de D coupe N, idéal bilatère de D.

Montrons que l'intersection est nette (du même côté) dans D. Soit par exemple K net à droite dans D. Si $a \in D$, $t \in N$, il existe $x \in D$ tel que $atx \in K$, avec $atx \in N$, c'est-à-dire $atx \in K \cap N$.

Autrement dit, tout complexe net à droite minimal dans D est nécessairement contenu dans N.

En outre, tout complexe net (d'un côté) dans N est net (du même côté) dans D.

Si $K_N \subseteqq N$ est net à droite dans N et si $a \in D$, $t \in N$, on a $at \in N$ et il existe $x \in N \subseteqq D$ tel que $atx \in K_N$. Ceci termine la démonstration du lemme.

THÉORÈME 7.1. - Si un demi-groupe D contient un idéal bilatère complètement simple N, il admet des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux. N est idéal bilatère minimum de D, et réunion des complexes nets à droite minimaux (des complexes nets à gauche minimaux).

La démonstration de ce théorème est immédiate en appliquant le lemme 7.1 et les résultats obtenus dans l'étude des complexes nets (d'un côté) minimaux d'un demi-groupe complètement simple.

8. Cas des homogroupes.

Un homogroupe est un demi-groupe dans lequel les complexes nets à droite minimaux et les complexes nets à gauche minimaux ne possèdent qu'un élément.

Nous voyons d'abord en appliquant les théorèmes précédents que tout élément net à droite, par exemple, est net à gauche.

Notons bien qu'il existe [4] des demi-groupes possédant seulement des éléments nets d'un côté. Pour que la propriété précédente soit vraie, il est nécessaire et suffisant qu'il existe au moins un élément net à droite et un élément net à gauche.

Montrons que la réunion des éléments nets forme un groupe.

Nous savons déjà que c'est une réunion de groupes. Supposons qu'il existe deux idempotents nets bilatères e et e'. Ces éléments, étant des complexes nets minimaux, peuvent être mis en correspondance comme dans le cas général, et cela de deux manières différentes, puisqu'ils sont minimaux comme complexes nets à gauche et comme complexes nets à droite. On a, par exemple $e' = ex$, $e = ye'$. D'où :

$$t = ee' = e.ex = ex = e'$$

$$t = ee' = ye'.e' = ye' = e \quad \text{et} \quad e = e' \quad .$$

On pourrait également étudier ce cas particulier en utilisant les décompositions de R (ou L) en idéaux à droite minimaux (ou idéaux à gauche minimaux). La résultat est encore presqu'immédiat.

REMARQUE. - Les demi-groupes avec zéro sont des homogroupes dont le nodule est réduit à ce zéro.

Nous noterons encore que la proposition "Tout demi-groupe abélien fini est un homogroupe" démontrée par G. THIERRIN [15] peut être étendue.

THÉORÈME 8.1. - Si un demi-groupe abélien contient un idéal minimal (ou un complexe net minimal), c'est un homogroupe.

Dans un demi-groupe abélien, les idéaux d'un côté sont bilatères. Les complexes nets (sans distinction de côté) sont formés en prenant un élément dans chaque idéal bilatère minimal ; un tel idéal étant unique, les complexes nets ne possèdent qu'un élément. Le demi-groupe est un homogroupe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (R.) et LEVI (F.). - Vollständige irreduzibele Systeme von Gruppenaxiomen, Sitz. Heidelberg. Akad. Wiss. Abh., t. 2, 1932, p. 3-12 (Beitr. z. Algebra, 18).

[2] CLIFFORD (A. H.). - Semigroups admitting relative inverses, Annals of Math., Series 2, t. 42, 1941, p. 1037-1049.

[3] CLIFFORD (A. H.). - Semigroups containing minimal Ideals, Amer. J. Math., t. 70, 1948, p. 521-526.

[4] CLIFFORD (A. H.) et MILLER (D. D.). - Semigroups having zeroid elements, Amer. J. Math., t. 70, 1948, p. 117-125.

[5] CROISOT (Robert). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 70, 1953, p. 361-379.

[6] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes, I., Mém. Acad. Sc. Inst. France, t. 63, 1941, p. 1-52.

[7] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes, III., Bull. Soc. math. France, t. 81, 1953, p. 289-306.

[8] DUBREIL (Paul). - Algèbre, Tome 1 : Equivalences, opérations, groupes, anneaux, corps, 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[9] DUBREIL (Paul). - Quelques problèmes d'algèbre liés à la théorie des demi-groupes, Colloque d'algèbre supérieure [1956. Bruxelles]. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques) ; p. 29-44.

[10] REES (D.). - On semigroups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400.

[11] SCHWARZ (Štefan). - On the structure of simple semigroups without zero, Czechoslovak math. J., t. 1 (76) , 1951, p. 41-53.

[12] STEINFELD (Otto). - Über die Quasiideale von Halbgruppen, Publ. math. Debrecen, t. 4, 1955-1956, p. 262-275.

[13] TAMURA (Takayuki). - All semigroups of order at most 5, J. Gakugei Tokushima Univ., t. 6, 1955, p. 19-39.

[14] TEISSIER (Mlle Marianne). - Sur les demi-groupes admettant l'existence du quotient d'un côté, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 1120-1122.

[15] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).