

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES RIGUET

## **Décomposition du groupe symétrique suivant un double module cyclique et théorie du tissage**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 12, n° 1 (1958-1959), exp. n° 11, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1958-1959\\_\\_12\\_1\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_1_A10_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire P. DUBREIL  
 M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. FISOT  
 (ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

19 janvier 1959

Année 1958/59

-:-:-

DÉCOMPOSITION DU GROUPE SYMÉTRIQUE SUIVANT UN DOUBLE MODULE CYCLIQUE  
 ET THÉORIE DU TISSAGE

par Jacques RIGUET

Comment fonctionne un métier à tisser.

Un métier à tisser consiste en un ensemble de lices, c'est-à-dire de réglettes mobiles pourvues d'anneaux, disposées dans un cadre qui assure leur parallélisme, et susceptibles de prendre individuellement dans ce cadre une position supérieure ou une position inférieure, suivant que l'on tire ou non sur un certain fil qui leur est propre : lorsque le fil n'est pas tiré, la lice se trouve dans la position inférieure, c'est-à-dire qu'elle repose, grâce à la pesanteur, sur la partie inférieure du cadre ; lorsqu'un ouvrier tire sur le fil, la lice, tirée vers le haut, vient occuper la position supérieure.

(Sur la figure 1, on a représenté le cadre avec deux lices  $l_1$ ,  $l_2$  ; la lice  $l_1$  est pourvue d'un seul anneau, et la lice  $l_2$  de deux anneaux).

Arrivant de l'arrière du cadre, les fils de chaîne, constituants partiels du futur tissu, "entrent en lice" c'est-à-dire passent à travers les anneaux des lices (un fil ne passant qu'à travers un seul anneau) pour venir émerger à travers des fentes verticales ad hoc disposées sur le panneau avant du cadre. Ces fentes ont une longueur suffisante pour permettre aux fils de chaînes passant à travers elles de prendre une position sur le bord supérieur ou sur le bord inférieur, suivant que la lice portant l'anneau dans lequel passe le fil considéré est elle-même en position supérieure ou en position inférieure.

Ainsi, on voit qu'à chaque ensemble de positions supérieures ou inférieures des lices correspond un ensemble de positions supérieures et inférieures des fils de chaîne dans les fentes du panneau avant du cadre. Le tisserand peut donc "en jetant sa navette à travers les fils de chaîne" disposer un fil (appelé fil de trame) situé au-dessous des fils de chaîne en position supérieure mais au-dessus des fils de chaîne en position inférieure. Cela fait, il demandera aux ouvriers disposant de la commande des fils tirant sur les lices, de faire prendre à celles-ci

une nouvelle disposition à laquelle va correspondre un nouvel ensemble de positions supérieures et inférieures des fils de chaîne dans les fentes du panneau avant du cadre. Par un nouveau jet de navette un second fil de trame va venir s'insérer entre les fils de chaîne, etc.

Un tel métier s'appelle "métier à la tire" puisque les variations dans le dessin du tissu suivent les variations dans les "tires" des ouvriers sur les fils commandant les lices à chaque temps suivant un jet de navette.

La découverte de JACQUARD a consisté à automatiser ce travail de tire grâce à une bande de carton perforée divisée en autant de pistes qu'il y a de lices sur le cadre, chaque absence de perforation dans une piste de la bande provoquant, grâce au dispositif appelé depuis le "Jacquard", la commande de la lice correspondante.

Le déroulement de la bande doit évidemment être synchronisé avec le travail de la navette de façon que la lecture d'une nouvelle ligne de la bande perforée par le jacquard n'ait lieu qu'après un jet de navette.

La figure 2 schématise et exemplifie un tel métier Jacquard à quatre lices et huit fils de chaîne. On a supposé sur cette figure que c'était la présence et non l'absence de perforation sur une piste de la bande qui commandait la levée de la lice correspondante, ce qui est bien le cas si la commande se fait électriquement (et non mécaniquement comme par les anciens Jacquards que nous venons de décrire) et on a dessiné le tissu engendré par les huit premiers coups de navette correspondant aux huit lignes de perforations poinçonnées sur la bande perforée.

### Description algébrique.

Nous venons de voir que le fonctionnement d'un métier à tisser est scandé par les jets de navette. On peut donc considérer un métier à tisser comme une machine à temps discret avec deux entrées : un programme variable, constitué par la bande perforée, un programme fixe "fiché à la main" constitué par ce qu'en terme de métier, on appelle le remettage c'est-à-dire le passage des fils à travers les anneaux de telles ou telles lices, et une sortie constituée par le tissu résultant de l'entrecroisement des fils de chaîne et des fils de trame.

Ainsi donc, nous avons à considérer quatre ensembles :

- un temps discret  $T$  que nous pouvons identifier à l'ensemble des entiers positifs
- un ensemble  $L$  de lices

- un ensemble  $C$  de fils de chaîne
- un ensemble  $D$  de fils de trame

et quatre relations binaires :

- une relation de commande par bande  $P \subset L \times T$  définie par  $(\ell, t) \in P \iff$  la bande commande à la lice  $\ell$  de se lever au temps  $t$  (en terme de métier d'être "en fonds" au temps  $t$ ) ;
- une relation de remettage  $\Sigma \subset C \times L$  définie par  $(c, \ell) \in \Sigma \iff$  le fil de chaîne  $c$  est entré en lice  $\ell$  ;
- une relation de tissage  $\Phi \subset T \times D$  définie par  $(t, d) \in \Phi \iff$  le fil de trame  $d$  est lancé entre les fils de chaîne entre les temps  $t$  et  $t + 1$  ;
- une relation de tissu  $R \subset C \times D$  définie par  $(c, d) \in R \iff$  le fil de chaîne  $c$  est situé au-dessus du fil de trame  $d$ .

$P$  est une relation arbitraire. Mais  $\Sigma$  doit être une relation fonctionnelle puisqu'un fil ne peut jamais passer à travers des anneaux appartenant à des lices différentes (le nombre de lices est ainsi toujours inférieur au nombre de fils de chaîne) et  $\Phi$  doit être une relation biunivoque entre les temps représentés par les différentes lignes de la bande d'entrée et les différents fils de trame, cette biunivocité assurant en somme le synchronisme entre entrée et sortie.

La sortie  $R$  est fonction de deux entrées  $\Sigma$  et  $P$  : plus précisément on a

$$R = \overline{\Phi} P \Sigma$$

c'est-à-dire la relation  $R$  est la composée des trois relations  $\overline{\Phi}$ ,  $P$ ,  $\Sigma$ .  $\overline{\Phi}$  étant biunivoque, on peut identifier les ensembles  $T$  et  $D$  et prendre pour  $\overline{\Phi}$  l'identité. On a alors simplement

$$R = P \Sigma$$

On sait que la composition des relations binaires peut être représentée par la multiplication des matrices à éléments 0 et 1, ou encore pour employer une notation usuelle parmi les tisserands par la multiplication de matrices à cases noires et blanches.

On a dessiné (figure 3) les trois tableaux à cases noires et blanches représentant exactement les relations en présence dans l'exemple de la figure 2. On voit que la matrice du tissu s'obtient à partir du tissu lui-même en remplaçant un croisement  $\begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array}$  par une case noire et un croisement  $\begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array}$  par une case blanche, les matrices du remettage et de la bande s'obtenant de manière évidente. La figure 4 donne la coupe du tissu pour les deux premiers fils de chaîne.

On peut se poser trois problèmes :

- un problème d'analyse : connaissant  $\Sigma$  et  $P$ , trouver  $R$ . Il se réduit immédiatement à trouver le composé  $P\Sigma$  de deux relations binaires  $P$  et  $\Sigma$ .
- un problème de programmation (ou de synthèse) : comment programmer c'est-à-dire se donner  $P$  et  $\Sigma$  de manière à ce que la machine produise un tissu donné  $R$ . Il se réduit à trouver une factorisation d'une relation binaire donnée  $R$  en un produit d'une relation par une relation fonctionnelle.

### Périodicités.

Pratiquement, il arrive souvent que la bande d'entrée est circulaire, autrement dit, que la relation  $P^{-1}$  est périodique de période  $\Theta_T$

$$P^{-1}(t + \Theta_T) = P^{-1}(t) \quad .$$

Il en résulte une périodicité de trame de tissu dont le dessin redevient semblable si l'on effectue une translation  $\tau^s$  le long de  $s$  fils de trame.  $s$  est évidemment un diviseur de  $\Theta_D$ . On l'appelle rapport de chaîne. C'est le plus petit entier  $\mu$  tel que  $\tau^{-\mu} R = R$ . Pratiquement, il arrive aussi, fréquemment, que le remettage soit lui aussi périodique, de période  $\Theta_L$  et qu'il en résulte une périodicité de chaîne du tissu dont le dessin redevient semblable si l'on effectue une translation  $\sigma^r$  le long de  $r$  fils de chaîne.  $r$  est évidemment un diviseur de  $\Theta_L$ . On l'appelle rapport de trame. C'est le plus petit entier  $\lambda$  tel que  $R\sigma^{-\lambda} = R$  (cf. fig. 5).

Un tissu de rapport de chaîne  $r$  et de rapport de trame  $s$  sera appelé un (r, s)-tissu.

Soit  $C_0$  l'ensemble des  $r$  premiers fils de chaîne consécutifs et  $D_0$  l'ensemble des  $s$  premiers fils de trame consécutifs, et soit  $R_0$  la restriction de  $R$  à  $C_0 \times D_0$ . Alors  $R_0$  caractérise entièrement le dessin du tissu  $R$ .

### Tissus de dessins identiques.

Désignons par  $\hat{R}$  le tissu recouvrant le plan obtenu en disposant côte à côte en long et en large des relations isomorphes à  $R_0$  ( $\hat{R}$  est en somme le tissu  $R$  "étendu à l'infini").  $R$  apparaît ainsi comme un morceau découpé dans  $\hat{R}$ .

Il est alors naturel de dire que deux tissus  $R$  et  $R'$  ont des dessins identiques si  $\hat{R} = \hat{R}'$ . Cela veut dire en effet que l'on peut amener les fils de chaîne de  $R$  et de  $R'$  et les fils de trame de  $R$  et de  $R'$  à être superposés

sur une certaine bande qui découpe sur  $R$  et  $R'$  des motifs identiques (cf. un exemple sur les figures 6, 7 et 8).

On peut encore dire que deux tissus  $R$  et  $R'$  sont identiques si et seulement si, il existe une translation permettant d'amener  $R_0$  sur  $R'_0$ , en d'autres termes s'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $R'_0$  est isomorphe à  $\tau^{-q} R_0 \sigma^p$  ( $\sigma$  désignant comme dans les pages précédentes la translation élémentaire permettant de passer d'un fil de chaîne au suivant et  $\tau$  la translation élémentaire permettant de passer d'un fil de trame au suivant). Dans l'exemple donné par les figures 6, 7 et 8, on peut prendre  $p = q = 2$ .

Pratiquement, on se donnera un  $(r, s)$ -tissu non pas par  $R_0$  mais par la relation binaire  $M \subset [1, r] \times [1, s]$  qui lui est isomorphe.

Soit donc  $\mathcal{M}_{r,s}$  l'ensemble des relations binaires sur  $[1, r] \times [1, s]$ . On désignera par  $\alpha$ , respectivement  $\beta$  la permutation circulaire  $(1, 2, \dots, r)$  respectivement  $(1, 2, \dots, s)$ .

PROPOSITION. - Deux éléments  $M$  et  $M'$  de  $\mathcal{M}_{r,s}$  donnent naissance à des  $(r, s)$ -tissus de dessins identiques si et seulement si  $M' \in [\beta] M [\alpha]$ ,  $[\alpha]$  et  $[\beta]$  désignant respectivement les groupes cycliques engendrés par  $\alpha$  et  $\beta$ .

Par exemple, sur la figure 9,  $M' = \beta^{-2} M \alpha$ .

En général, si  $R'_0$  est isomorphe à la relation déduite de  $R_0$  par translation de  $p$  unités vers la droite et de  $q$  unités vers le haut, on a  $M' = \beta^{-q} M \alpha^p$ .

COROLLAIRE. - Il y a autant de  $(r, s)$ -tissus de dessins différents que de classes de décomposition de  $(R)_{r,s}$  suivant le double module  $[\beta]$ ,  $[\alpha]$  avec  $\alpha = (1, 2, \dots, r)$ ,  $\beta = (1, 2, \dots, s)$ .

En effet, la relation  $R_2 \in [\beta] R_1 [\alpha]$  est une relation d'équivalence qui donne immédiatement cette décomposition.

On appelle tissu principal un tissu pour lequel  $R_0$  est biunivoque. Pour un  $(r, s)$ -tissu principal, on a alors nécessairement  $r = s$ .

On a alors immédiatement :

Il y a autant de  $(r, r)$ -tissus principaux de dessins différents que de classes de décomposition du groupe symétrique d'ordre  $r$ ,  $\mathcal{S}_r$ , suivant le double module  $[\alpha]$  avec  $\alpha = (1, 2, \dots, r)$ .

Soit  $G$  un groupe fini,  $H$  et  $K$  deux sous-groupes. On sait que si l'on désigne par  $(G : H, K)$  le nombre de classes de la décomposition suivant le double module  $H, K$  on a, d'après FROBENIUS, en désignant par  $\mathcal{C}$  l'ensemble

des classes d'éléments conjugués de  $G$  :

$$(G : H, F) = \frac{\#G}{\#H \cdot \#F} \sum_{C \in \mathcal{C}} \frac{\#(C \cap H) \cdot \#(C \cap F)}{\#C} \quad (1)$$

Lorsque  $K = [a]$  = sous-groupe cyclique engendré par  $a$  d'ordre  $p$ , on a  $C \cap H \neq \emptyset$ , si et seulement si, il existe un diviseur  $d$  de  $p$ , tel que  $C = C_{a^{p/d}}$  <sup>(2)</sup>.

On peut donc écrire :

$$(G : [a], K) = \frac{\#G}{\#[a] \cdot \#K} \sum_{d/p} \frac{\#(K \cap C_{a^{p/d}}) \cdot \#[a] \cap C_{a^{p/d}}}{\#C_{a^{p/d}}}$$

Par ailleurs, SYSOEV [2] remarque que les éléments d'ordre  $p$  dans un groupe cyclique de cet ordre étant en nombre égal à  $\varphi(p)$ , on a dans le cas de  $G = \mathbb{C}_r$

$$(\mathbb{C}_r : [a], K) = \frac{r!}{p \cdot \#K} \sum_{d/p} \frac{\#(K \cap C_{a^{p/d}}) \cdot \varphi(p)}{\#C_{a^{p/d}}}$$

Mais si  $\pi_g$  est la partition de  $r$  associée à la permutation  $g$  on sait que  $\#C_g = h(\pi_g)$  en posant, si  $\pi = (\lambda_1^{\alpha_1}, \dots, \lambda_s^{\alpha_s})$ ,

$$h(\pi) = \frac{(\alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_s \lambda_s)!}{\lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_s^{\alpha_s} \alpha_1! \dots \alpha_s!}$$

On a donc dans le cas où  $F = [a]$  :

$$(\mathbb{C}_r : [a], [a]) = \frac{r!}{p^2} \sum_{d/p} \frac{\varphi(p)^2}{h(\pi_{a^{p/d}})}$$

### Nombre d'éléments de la décomposition d'index donné.

Considérons la décomposition d'un groupe fini  $G$  suivant le double module  $H, F$ . Alors tout élément  $HxK$  de la décomposition est réunion de sous-ensembles disjoints de la forme  $Hg$ . Leur nombre, qui est égal à  $\frac{\#K}{\#(K \cap H)}$  (cf. [1], Satz 64, p. 63) est appelé index de  $HxK$  par rapport à  $H$ .

Désignons par  $N(k)$  le nombre d'éléments de la décomposition de  $G \bmod H, K$  dont l'index par rapport à  $H$  est égal à  $k$ . Si  $a$  est un élément de  $G$  d'ordre  $p$ , on a le théorème suivant :

(1) La notation  $\#X$  désignant le nombre d'éléments du sous-ensemble  $X$ .

(2) On désigne par  $C_g$  la classe contenant l'élément  $g \in G$ .

$$\text{THÉORÈME. - } \# \text{ norm } [a^d] = \sum_{\ell/d} p^\ell N(\ell)$$

généralisant un théorème connu (cf. [1], Satz 66, p. 63) et se démontrant de façon tout à fait semblable.

SYSOEV remarque (loco citato) que ce théorème permet de donner l'expression de  $N(k)$   $k$  étant un diviseur de  $p$ , en procédant de la manière suivante : en appliquant la formule

$$\frac{\# G}{\# (G \cap [a^d])} = \frac{\# G}{\# \text{ norm}_G [a^d]}$$

il vient d'après les résultats précédents :

$$\varphi\left(\frac{p}{d}\right) \frac{r!}{h\left(\frac{p}{d}\right)} = \sum_{\ell/d} p^\ell N(\ell) \quad .$$

En appliquant la formule d'inversion des fonctions numériques, il vient :

$$N(k) = \frac{r!}{pk} \sum_{\ell/k} \mu(\ell) \varphi\left(\frac{p\ell}{k}\right) \frac{1}{h\left(\frac{p\ell}{k}\right)}$$

#### Cas particuliers : Application aux dénombrements des tissus.

Lorsque  $a$  est une permutation circulaire  $\Sigma$  on peut expliciter  $h(\varphi)$ , car  $\varphi$  est alors de la forme  $\lambda^r$ . On trouve :

$$G_r([\Sigma], [\Sigma]) = \frac{1}{r^2} \sum_{d/r} \varphi^2(d) d^{r/d} \left(\frac{r}{d}\right)!$$

$$N(k) = \frac{1}{rk} \sum_{\ell/k} \mu(\ell) \varphi\left(\frac{r\ell}{k}\right) \left(\frac{r\ell}{k}\right)^{k/\ell} \left(\frac{k}{\ell}\right)!$$

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] SPEISER (Andreas). - Gruppentheorie. - Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956.
- [2] SYSOEV (A. E.). - O razložení simmetričeskikh grupp po dvojnemu cikličeskomu modulju i o ego priložení k teorii tkackikh perepleténij, Uspekhi Mat. Nauk. SSSR, t. 11, 1956, p. 209-214.

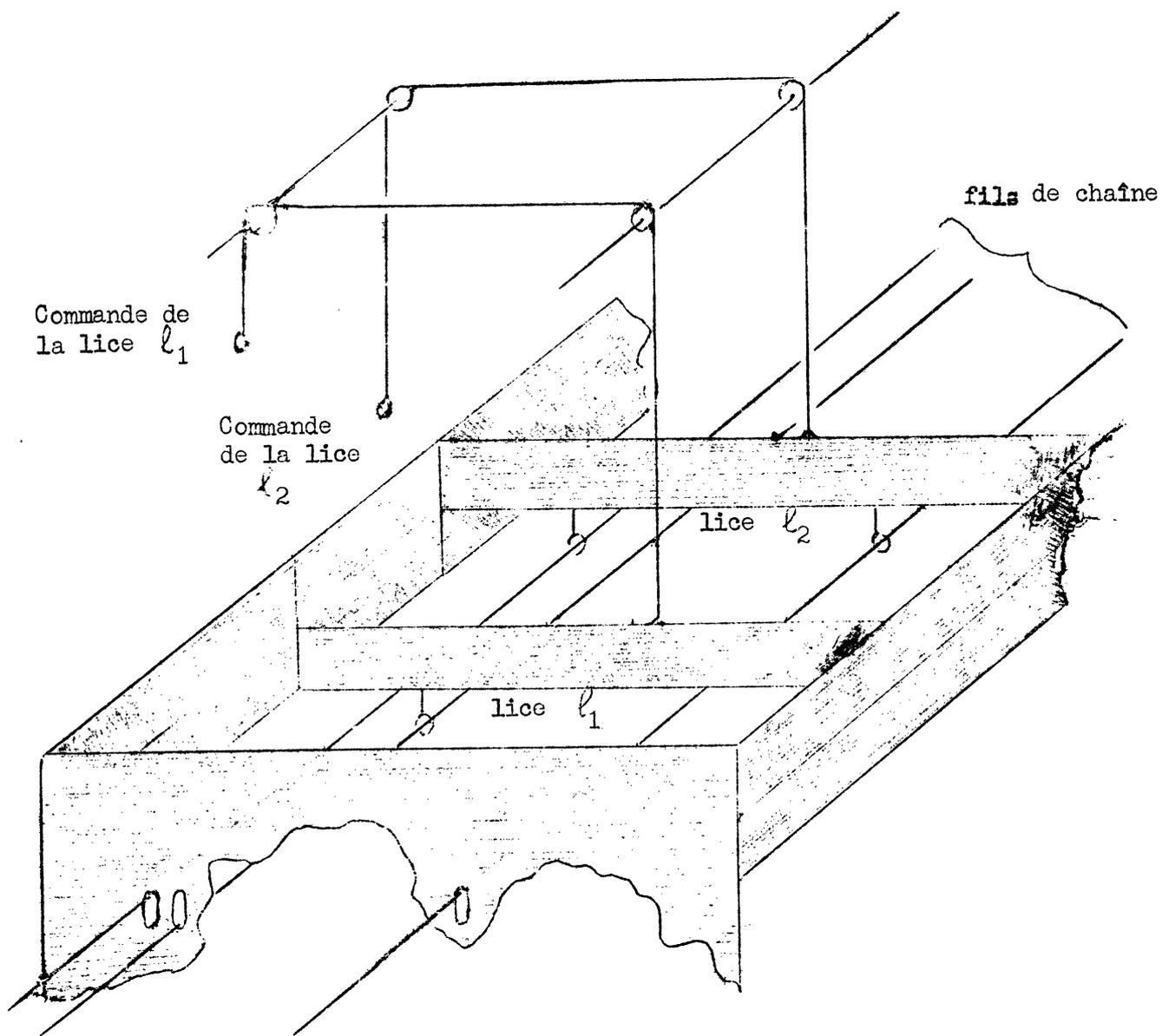


Fig. 1

On a représenté seulement deux lices  $l_1$  et  $l_2$ . La lice  $l_2$  seule est tirée, et se trouve donc en position supérieure, alors que la lice  $l_1$  se trouve en position inférieure.

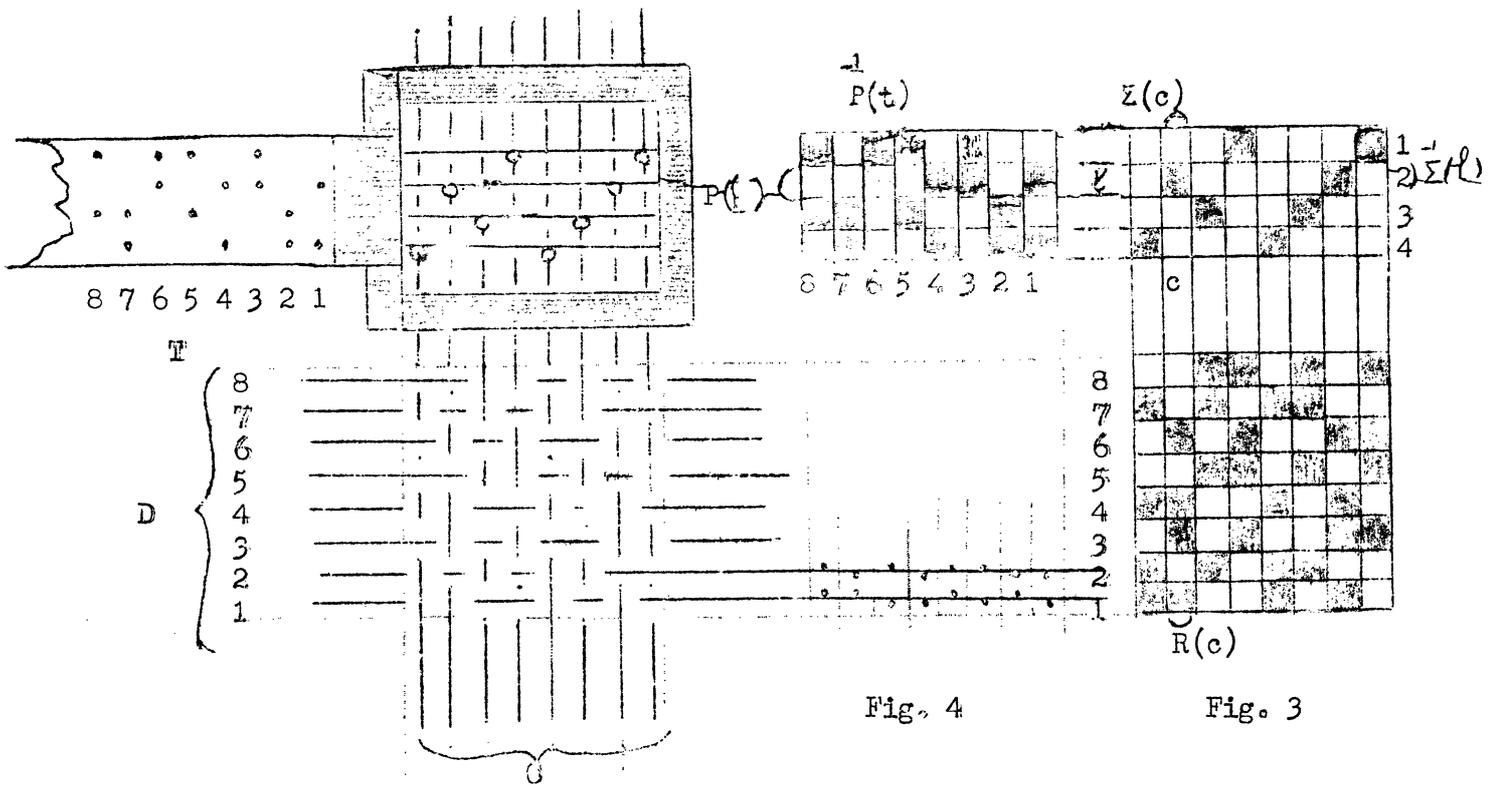


Fig. 2

Fig. 4

Fig. 3

C : ensemble des fils de chaîne  
 D : ensemble des fils de trame  
 T : temps  
 L : ensemble des lices

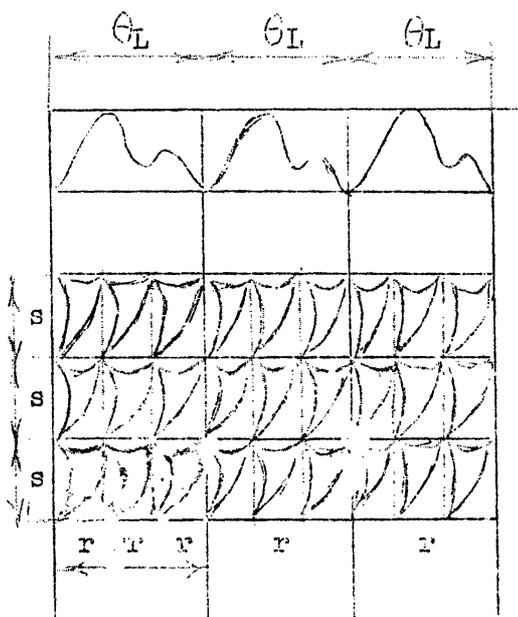


Fig. 5

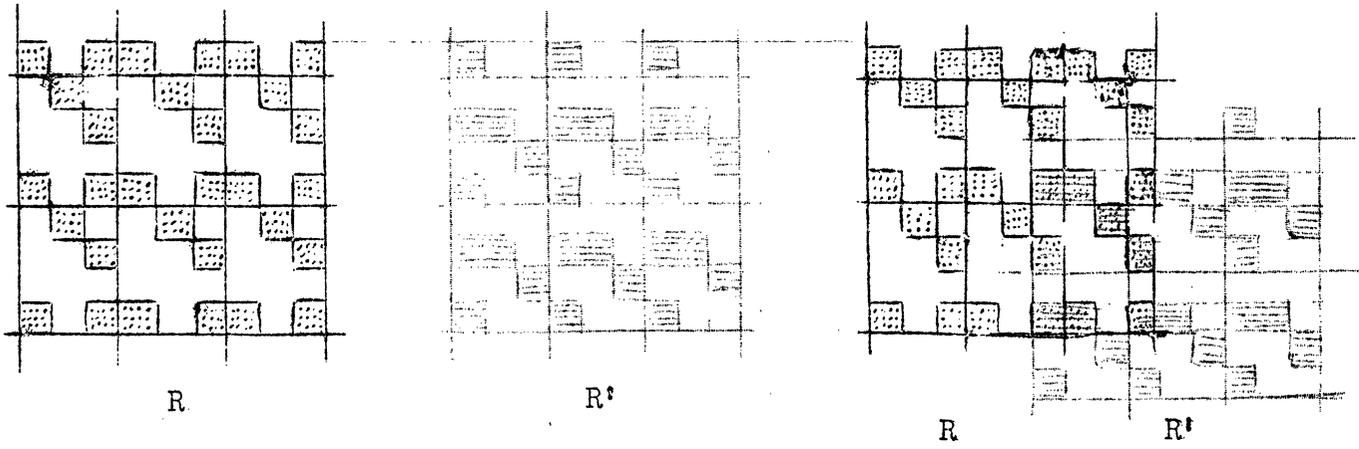
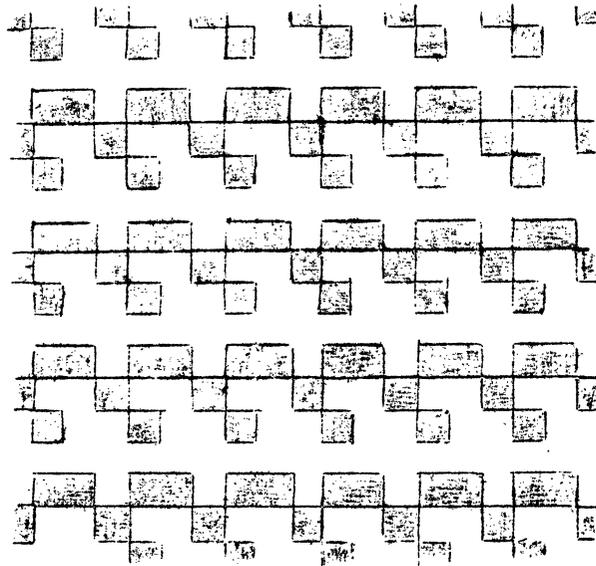


Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8



$$\hat{R} = \hat{R}^c$$

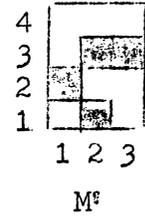
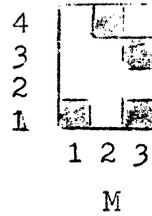
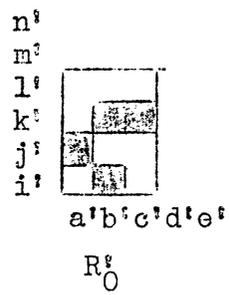
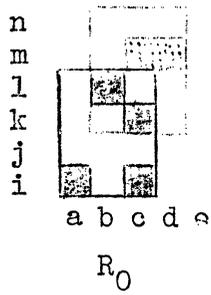


Fig. 9