SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

MICHEL ZISMAN

Cohomologie des variétés analytiques complexes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1957-1958), exp. nº 21, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A7_0>

21 avril et 12 mai 1958

COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

par Michel ZISMAN

1. Quelques rappels.

Soit V une variété analytique complexe de dimension complexe n [8] (toutes les variétés seront supposées dénombrables à l'infini).

Soit $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de V par des ouverts U_i homéomorphes à une boule ouverte de C^n (C = ensemble des complexes).

On désigne par :

$$f_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n, C)$$

la matrice jacobienne définie par le passage des coordonnées de U_i à celles de U_j

$$\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(2n, R)$$

la matrice réelle $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ (où $f_{ij} = A + iB$, $A, B \in GL(n, R)$).

L'ensemble $(f_{ij})_{i,j \in I}$ est un cocycle (cf [8]) qui définit un fibré analytique complexe noté $\mathcal{T}$, à fibre C^n.

L'ensemble $(\varphi_{ij})_{i,j \in I}$ est un cocycle qui définit un fibré analytique réel noté ${}_R\mathcal{T}$ à fibre R^{2n} : le fibré tangent réel de V.

Enfin soit ${}_R\mathcal{T}_C$ le fibré à fibre C^{2n} défini à partir de ${}_R\mathcal{T}$ par le plongement $GL(2n, R) \longrightarrow GL(2n, C)$.

On a alors les identifications canoniques

$${}_R\mathcal{T}_C \approx \mathcal{T} \oplus \overline{\mathcal{T}}$$

$$({}_R\mathcal{T}_C)^* \approx T \oplus \overline{T}$$

$$({}_R\mathcal{T}_C)^{*(r)} \approx \sum_{p+q=r} T^p \otimes \overline{T}^q$$

($\bar{\mathcal{T}}$ = fibré défini par le cocycle $\bar{f}_{ij}$ complexe conjugué de f_{ij} ; T dual de $\mathcal{T}$, $\sum$ est la somme de Whitney).

Une r-forme différentielle différentiable (appelée r-forme dans la suite pour simplifier) de $({}_R\mathcal{T}_C)^{*(r)}$ qui provient d'un élément de $T^p \otimes \bar{T}^q$ est dite de type (p , q) .

La différentielle extérieure $d : ({}_R\mathcal{T}_C)^{*(r)} \longrightarrow ({}_R\mathcal{T}_C)^{*(r+1)}$ se sépare en deux, compte tenu de l'identification précédente : on pose

$$d = d' + d''$$

où d' et d'' ont l'effet suivant sur les formes du type (p , q) :

$$d' : (p , q) \longrightarrow (p + 1 , q)$$
$$d'' : (p , q) \longrightarrow (p , q + 1) .$$

on a alors $d'd' = d''d'' = d'd'' + d''d' = 0$ pour des raisons de types puisque $dd = 0$.

2. Métrique hermitique (cf [4] et [5]).

a. Soient V_p une variété réelle, de dimension p, F l'ensemble des matrices (n , n) définies positives symétriques, F_1 l'ensemble des matrices (n , n) symétriques. On montre sans peine que F est homéomorphe à une boule ouverte de F_1 (car F est convexe et ouvert dans F_1) F est donc contractile. Appliquons alors le théorème (5.3) de [8].

PROPOSITION 1. - *Tout fibré sur* V *à fibre* F *a une section globale* C^∞ .

En particulier, le sous-fibré de ${}_R\mathcal{T}^* \otimes {}_R\mathcal{T}^*$ formé par les tenseurs covariants définis positifs symétriques a une section globale. Dans un système de coordonnées $(x^1 , \dots , x^p)$ cette section s'exprime à l'aide d'une matrice (g_{uv}) $(u , v = 1 , 2 , \dots , p)$, et la forme quadratique

$$ds^2 = \sum g_{uv} \, dx^u \, dx^v$$

est ce qu'on appelle une métrique riemannienne.

Si X et Y sont deux vecteurs tangents en un point x on peut alors définir leur produit scalaire : $\langle X , Y \rangle = \sum g_{uv}(x) X^u Y^v$, (X^u , Y^v) , $(u , v = 1 , 2 , \dots , p)$ étant les coordonnées de X , Y sur la base duale de la base (dx^u) de ${}_R\mathcal{T}^*$)

b. Soit maintenant V une variété analytique complexe de dimension complexe n, et V_{2n} la variété analytique réelle qu'elle définit canoniquement. Soit $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, et posons $\overline{z}^{\alpha} = z^{\alpha^*}$ où (z^{α}) est un système de coordonnées analytiques complexes de V. On peut prendre $(z^{\alpha}, z^{\alpha^*})$ comme système de coordonnées de V_{2n}. Une métrique riemannienne sur V_{2n} s'exprime alors par une matrice g telle que :

$$\left| \begin{array}{l} g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \quad g_{\alpha\beta^*} = g_{\beta^*\alpha}, \quad g_{\alpha^*\beta^*} = g_{\beta^*\alpha^*} \quad (g \text{ symétrique}) \\ g_{\alpha\beta^*} = \overline{g}_{\alpha^*\beta} \quad (g \text{ réelle}). \end{array} \right.$$

Soit X un vecteur tangent réel (i.e. $X \in {}_R\mathcal{T}$). Sur la base duale de $(dz^{\alpha}, dz^{\alpha^*})$, ses coordonnées sont X^{α}, $X^{\alpha^*} = \overline{X}^{\alpha}$. On pose $\mathcal{J} X$ = le vecteur de coordonnées $i X^{\alpha}$, $-i X^{\alpha^*}$. C'est un vecteur réel. $\mathcal{J}$ est un opérateur ${}_R\mathcal{T} \to {}_R\mathcal{T}$ tel que $\mathcal{J}^2 = -$ Identité.

DÉFINITION. - <u>On dit que la métrique riemannienne g de V_{2n} définit une métrique hermitique de V, si g est compatible avec $\mathcal{J}$, c'est-à-dire si</u>

$$\langle X, Y \rangle = \langle \mathcal{J} X, \mathcal{J} Y \rangle \qquad \underline{\text{pour tous}} \quad X, Y \in {}_R\mathcal{T}$$

PROPOSITION 2. - <u>Il existe toujours une métrique hermitique sur une variété analytique complexe</u> [4].

On part d'une métrique riemannienne quelconque g, et on montre qu'on peut la transformer de façon à la rendre compatible avec $\mathcal{J}$. Un calcul simple montre alors que si g est hermitique :

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha^*\beta^*} = 0,$$

si bien que finalement

$$ds^2 = 2 \sum g_{\alpha\beta^*} \, dz^{\alpha} \, dz^{\beta^*}$$

On pose

$$\omega = i \sum g_{\alpha\beta^*} \, dz^{\alpha} \wedge dz^{\beta^*}$$

DÉFINITION. - <u>Une variété analytique complexe est dite kählérienne, s'il existe une métrique hermitique sur V telle que la forme ω associée soit un cocycle</u>, i.e. $d\omega = 0$.

Le théorème de de Rham permet alors d'associer à ω une classe de cohomologie de $H^2(V, R)$.

Notons que dans tous les cas ω est de type $(1,1)$.

c. l'opérateur $*$ (cf [4] et [5]). - On peut, par un changement de repère dans $R^{\mathcal{C}}$ et $R^{\mathcal{C}^*}$ donner à ds et ω les formes simplifiées

$$ds^2 = 2\,\theta^\alpha\,\theta^{\alpha^*} \qquad (\theta^{\alpha^*} = \overline{\theta}^\alpha)$$

$$\omega = i\,\theta^\alpha \wedge \theta^{\alpha^*}$$

θ^α n'étant plus la différentielle d'une fonction, mais une forme de Pfaff non fermée en général.

On définit alors sur les formes de type (p, q) un opérateur linéaire :

$$* : T^{(p)} \otimes \overline{T}^{(q)} \xrightarrow{\sim} T^{(n-q)} \otimes \overline{T}^{(n-p)}$$

par :

$$*(\theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_p} \otimes \theta^{\beta_1^*} \wedge \dots \wedge \theta^{\beta_q^*}) = \pm\, i^n \theta^{\beta'_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\beta'_{n-q}} \otimes \theta^{\alpha'_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha'_{n-p}}$$

où

$$\begin{cases} \alpha_1 \dots \alpha_p\ \alpha'_1 \dots \alpha'_{n-p} & \text{est une permutation de } 1, 2 \dots n \\ \beta_1 \dots \beta_q\ \beta'_1 \dots \beta'_{n-q} & \text{est une permutation de } 1, 2 \dots n \end{cases}$$

le signe $\pm$ étant égal à :

$$(-1)^n\,(-1)^{pn}\,(-1)^{I(\alpha)}\,(-1)^{I(\beta)} .$$

où $I(\alpha)$ (resp. $I(\beta)$) désigne la parité de la permutation des α (resp des β).

On montre sans peine que $** = (-1)^{p+q}$ Identité, ce qui montre bien que $*$ est un isomorphisme, car il a un inverse. On pose alors :

$$\delta = -*d* \qquad \delta d + d\delta = \Delta$$

$$\delta' = -*d'* \qquad \delta' d' + d'\delta' = \Delta'$$

$$\delta'' = -*d''* \qquad \delta'' d'' + d''\delta'' = \Delta'' .$$

le noyau de Δ est par définition l'ensemble des formes harmoniques.

d. produit scalaire sur les formes (on suppose dans ce paragraphe que V est compacte). - Soient $\alpha, \beta \in T^{(p)} \otimes \overline{T}^{(q)}$ on pose

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_V \alpha \wedge * \overline{\beta}$$

$(\overline{\beta} \in \overline{T}^{(p)} \otimes T^{(q)})$, $* \overline{\beta} \in T^{(n-p)} \otimes \overline{T}^{(n-q)}$ donc $\alpha \wedge * \overline{\beta} \in T^{n} \otimes \overline{T}^{n}$ i.e. $\alpha \wedge * \overline{\beta} \in {}_{R}\mathcal{C}_{C}^{*(2n)}$) (pour l'intégration des formes différentielles voir [4] et [5]).

On montre sans peine que

$$\left| \begin{array}{l} \langle \alpha , \beta \rangle = \langle \beta , \alpha \rangle \\ \langle \alpha , \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 0 , \end{array} \right.$$

si bien que l'on a affaire à un vrai produit scalaire.

Enfin on montre que $\langle \alpha , \delta \beta \rangle = \langle d \alpha , \beta \rangle$, et de même pour d' , δ' , d'' , δ'' (voir la démonstration plus loin dans un cas un peu plus général).

3. DÉFINITION DES ESPACES $H^{p}(V , \underset{\sim}{W})$ ET $H^{p,q}(V , W)$.

Soit W un espace fibré à fibres vectorielles, analytique complexe sur la variété V (de dimension complexe n). $\underset{\sim}{W}$ désignera le faisceau des germes de sections holomorphes de W . (D'une façon générale le signe $\sim$ placé sous un fibré désignera le faisceau des germes de sections holomorphes, ou C^{∞} suivant les cas, de ce fibré). En particulier, si W est le fibré trivial de fibre C , $\underset{\sim}{W}$ est le faisceau des germes de fonctions holomorphes, désigné dans l'exposé précédent par C_{ω} . On se propose d'étudier les groupes $H^{p}(V , \underset{\sim}{W})$.

On pose $H^{p,q}(V , W) = H^{q}(V , \underset{\sim}{W \otimes T^{(p)}})$.

En particulier $H^{0,q}(V , W) = H^{q}(V , \underset{\sim}{W})$.

<u>La</u> <u>d"-cohomologie</u>. - Soit $A^{p,q}$ le fibré des formes de type (p , q) . d'' induit un homomorphisme d'espaces fibrés, et par suite des faisceaux des germes de sections C^{∞} associés :

$$d'' : \underset{\sim}{A}^{p,q} \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{p,q+1}$$

Le noyau de $d'' : \underset{\sim}{A}^{p,0} \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{p,1}$ est $\underset{\sim}{T}^{(p)}$, le faisceau des germes de p-formes holomorphes. On a donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{T}^{(p)} \xrightarrow{d''} \underset{\sim}{A}^{p,0} \xrightarrow{d''} \underset{\sim}{A}^{p,1}$$

GROTHENDIECK [6] a montré que plus généralement

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{T}^{(p)} \xrightarrow{d''} \underset{\sim}{A}^{p,0} \xrightarrow{d''} \underset{\sim}{A}^{p,1} \xrightarrow{d''} \cdots \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{p,q} \xrightarrow{d''} \cdots \qquad (1)$$

est une suite exacte (voir aussi [1]).

Or chacun des $\underset{\sim}{A}^{p,q}$ est fin. (1) est donc une résolution fine de $\underset{\sim}{T}^{(p)}$ (rappelons que $\underset{\sim}{A}^{p,q} \approx \underset{\sim}{T^{(p)} \otimes \overline{T}^{(q)}}$) .

Plus généralement soit $A^{p,q}(W) = W \otimes T^{(p)} \otimes \overline{T}^{(q)}$. Si on désigne le fibré trivial de fibre C par C , $A^{p,q}(C) = A^{p,q}$.

DÉFINITION. - Une section de $\underset{\sim}{A}^{p,q}(W)$ i.e. une section C^{∞} de $A^{p,q}(W)$ est appelée une forme de type (p , q) à valeurs dans W .

LEMME 1. - d'' opère sur $\underset{\sim}{A}^{p,q}(W)$.

En effet soit r la dimension des fibres de W . La restriction de W à un ouvert U, soit W_U , est homéomorphe à $U \times C^r$. Dans U , une forme de type (p , q) à valeurs dans W s'exprime donc par un système de r formes de type (p , q) . Appliquons l'opérateur d'' à chacune de ces formes. On obtient ainsi un système de r formes de type $(p , q + 1)$. Ce système est indépendant de la représentation de W_U comme produit. En effet, W étant un fibré analytique complexe, si U' est un autre ouvert tel que $W_{U'} \approx U' \times C^r$, au-dessus de $U \cap U'$, les formules du changement de cartes font intervenir des applications $U \cap U' \longrightarrow GL(r , C)$ holomorphes. Or la suite exacte (1) montre en particulier que d'' s'annule sur les fonctions holomorphes.

C.Q.F.D.

d'' induit donc bien une application notée encore d'' : $\underset{\sim}{A}^{p,q}(W) \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{p,q+1}(W)$.

La suite

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \underset{\sim}{W \otimes T^{(p)}} \xrightarrow{d''} \underset{\sim}{A}^{p,0}(W) \xrightarrow{d''} \dots \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{p,q}(W) \xrightarrow{d''} \dots$$

est exacte comme on le voit facilement et chaque $\underset{\sim}{A}^{p,q}(W)$ est fin. (2) est donc une résolution fine de $\underset{\sim}{W \otimes T^{(p)}}$). Appliquons alors le théorème (6,2) de l'exposé 8, [10] :

$\Gamma(F)$ désignant le groupe des sections au-dessus de V du faisceau F , le complexe gradué

$$\Gamma(\underset{\sim}{A}^{p,0}(W)) \xrightarrow{d''} \Gamma(\underset{\sim}{A}^{p,1}(W)) \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \Gamma(\underset{\sim}{A}^{p,q}(W)) \longrightarrow \dots$$

a pour cohomologie, la cohomologie de V à coefficient dans le faisceau $\underset{\sim}{W \otimes T^{(p)}}$.

$\Gamma(\underset{\sim}{A}^{p,q}(W))$ étant l'ensemble des formes de type (p , q) à valeurs dans W , définies sur tout V , on a démontré :

THÉORÈME 1. - $H^{p,q}(V , \underset{\sim}{W})$ s'identifie au q-ième groupe de cohomologie des formes à valeurs dans W , définies sur V , ayant p pour premier type, l'opérateur

<u>différentiel sur ces formes étant</u> d'' .

COROLLAIRE. - $H^{p,q}(V, \underset{\sim}{W}) = 0$, si p ou $q > n$.

En effet les formes de type (p, q) où p ou q est $> n$ sont identiquement nulles.

4. <u>Le cas où</u> V <u>est compacte-Dualité</u>.

a. Dans toute la suite, V est supposée compacte. Les notations sont celles du paragraphe 3.

Soit W^* le dual de W . Si (f_{ij}) est un cocycle pour W , $({}^t f_{ij}^{-1})$ est un cocycle pour W^* . Si on considère W (qui est un fibré analytique complexe) comme étant seulement C^∞ , on peut réduire son groupe structural de $GL(r, \mathbb{C})$ à $U(r)$. Autrement dit, il existe des applications C^∞ : $h_i : U_i \longrightarrow GL(r, C)$ telles que

$$h_i\, f_{ij}\, h_j^{-1} : U_i \cap U_j \longrightarrow U(r) .$$

On pose

$$g_i = {}^t\bar{h}_i\, h_i : U_i \longrightarrow GL(r, C) .$$

au-dessus de U_i , tout $\alpha \in W_{U_i}$ peut s'écrire $\alpha = (u, t)$, $u \in U_i$, $t \in C^r$.

Posons alors

$$\psi(\alpha) = \psi(u, t) = (u, \overline{g_i(u)t}) .$$

Un calcul immédiat montre alors que dans un changement de carte, l'élément $\psi(\alpha)$ se comporte comme un élément de W^* . ψ est donc une application C^∞ : $W \longrightarrow W^*$. On voit de plus que c'est un <u>anti-isomorphisme</u>. (C'est-à-dire que pour tout $x \in V$, l'application induite sur les fibres $\Psi_x : W_x \longrightarrow W_x^*$ est une application additive biunivoque telle que $\Psi_x(\lambda X) = \bar{\lambda}\,\Psi_x(X)$, $\lambda \in C$, $X \in W_x$) .

b. Soit $\alpha \in \Gamma(\underset{\sim}{A}^{p,q}(W))$, $\beta \in \Gamma(\underset{\sim}{A}^{r,s}(W^*))$.

On définit sans difficulté le <u>produit extérieur</u> $\alpha \wedge \beta \in \Gamma(A^{p+r,q+s}(C))$ qui, lorsque $W = C$ se réduit au produit extérieur ordinaire.

On a

(3) $$d''(\alpha \wedge \beta) = d''\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\, \alpha \wedge d''\beta$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{(p+q)(r+s)} \beta \wedge \alpha \,. \tag{4}$$

Si $r = n - p$, $s = n - q$, $\alpha \wedge \beta \in \Gamma(\underset{\sim}{A}^{n,n}(C)) = \Gamma(\underset{\sim}{A}^{n,n})$. On peut donc intégrer dans ce cas $\alpha \wedge \beta$ sur V : on pose

$$i(\alpha, \beta) = \int_V \alpha \wedge \beta \,.$$

LEMME 2. - $i(\alpha, \beta)$ <u>ne dépend que des classes de</u> α <u>et</u> β <u>dans la</u> d''<u>-cohomologie</u>.

En effet, soit $\alpha = d''\gamma$, $d''\beta = 0$

$$i(\alpha, \beta) = \int_V \alpha \wedge \beta = \int_V d''(\gamma \wedge \beta) = \int_V d(\gamma \wedge \beta) = 0$$

La deuxième égalité résulte de (3), la troisième est vraie pour des raisons de type, la quatrième résulte de la formule de Stoke. i passe donc à la cohomologie et, compte tenu du théorème 1, définit une application bilinéaire à valeurs dans C.

$$i : H^{p,q}(V, W) \times H^{n-p,n-q}(W^*) \longrightarrow C$$

Nous montrerons à la fin de cet exposé que i <u>est une dualité</u>

c. Considérons les deux anti-isomorphismes

$$\#: W \otimes T^{(p)} \otimes \overline{T}^{(q)} \longrightarrow W^* \otimes T^{(n-p)} \otimes \overline{T}^{(n-q)}$$

$$\tilde{\#}: W^* \otimes T^{(r)} \otimes T^{(s)} \longrightarrow W \otimes T^{(n-r)} \otimes \overline{T}^{(n-s)}$$

définis par

$$\#(w \otimes \alpha) = \Psi(w) \otimes (* \bar{\alpha}) \quad w \in W, \quad \alpha \in T^{(p)} \otimes \overline{T}^{(q)}$$

$$\tilde{\#}(w^* \otimes \alpha) = \Psi^{-1}(w^*) \otimes (* \bar{\alpha}) \quad w^* \in W^*, \quad \alpha \in T^{(r)} \otimes \overline{T}^{(s)}$$

comme $** = (-1)^{p+q}$ id, on a aussi $\tilde{\#}\# = (-1)^{p+q}$ identité.

Les opérateurs $\#$ et $\tilde{\#}$ induisent des opérateurs

$$\#: \underset{\sim}{A}^{p,q}(W) \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{n-p,n-q}(W^*)$$

$$\tilde{\#}: \underset{\sim}{A}^{r,s}(W^*) \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{n-r,n-s}(W)$$

On pose $\delta'' = -\tilde{\#} d'' \#$ (cet opérateur généralise au cas d'un fibré W, l'opérateur δ'' défini dans le paragraphe 2 pour $W = C$).

Enfin, pour $\alpha, \beta \in \Gamma(\underset{\sim}{A}^{p,q}(W))$ on pose

$$\langle \alpha, \beta \rangle = i(\alpha, \#\beta) = \int_V \alpha \wedge \#\beta$$

LEMME 3. - $\langle \alpha , \delta'' \beta \rangle = \langle d'' \alpha , \beta \rangle$

En effet :

$$\langle \alpha , \delta''\beta \rangle = - \int_V \alpha \wedge \# \tilde{\#} \; d'' \# \beta = (-1)^{p+q+1} \int_V \alpha \wedge d'' \# \beta$$

$$\langle d'' \alpha , \beta \rangle - \langle \alpha , \delta'' \beta \rangle = \int_V d'' \alpha \wedge \# \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge d'' \# \beta = \int_V d''(\alpha \wedge \# \beta) = \int_V d(\alpha \wedge \# \beta) = 0$$

C.Q.F.D.

On pose $\Delta'' = \delta'' d'' + d'' \delta''$, le noyau de Δ'' étant <u>l'ensemble des formes harmoniques à valeur dans</u> W .

Le lemme 3 montre alors que l'ensemble des formes harmoniques est celui des formes α telles que $d'' \alpha = \delta'' \alpha = 0$.

Enfin pour toute forme α , $\langle \alpha , \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. $\langle \, , \rangle$ est donc un vrai produit scalaire.

Une généralisation du théorème de Hodge-de Rham [5] fournit le

THÉORÈME 2. - $\Gamma(\underset{\sim}{A}^{p,q}(W)) = d''(\Gamma(\underset{\sim}{A}^{p,q-1}(W))) \oplus \delta''(\Gamma(\underset{\sim}{A}^{p,q+1}(W))) \oplus B^{p,q}(W)$

(où $\oplus$ désigne la somme directe et $B^{p,q}(W)$ l'ensemble des formes harmoniques de type (p , q) à valeurs dans W).

Ce qui précède montre alors que les trois ensembles du second membre sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \, , \rangle$. Le théorème 2, joint au théorème 1, donne alors

PROPOSITION 3. - $H^{p,q}(V , W) \approx B^{p,q}(W)$:

Du fait que Δ est un opérateur différentiel elliptique du second ordre et que V est compact, KODAÏRA [3] déduit que les $B^{p,q}(W)$ sont <u>des espaces vectoriels de dimension finie sur</u> $\mathbf{C}$.

Comme d'une part on a les mêmes résultats pour le faisceau $\underset{\sim}{A}^{p,q}(W^*)$ et que d'autre part $\#$ est un anti-isomorphisme

$$\# : \; B^{p,q}(W) \longrightarrow B^{n-p,n-q}(W^*) ,$$

la proposition 3 montre que

$$H^{p,q}(V , W) \approx H^{n-p,n-q}(V , W^*) ,$$

en particulier

$$H^q(V\,,\,\underset{\sim}{W}) \approx H^{n,n-q}(V\,,\,W^*) = H^{n-q}(V\,,\,\underset{\sim}{K\otimes W^*})$$

où $K = T^{(n)}$ est un fibré linéaire.

En résumé :

THEOREME 3. - Sur une variété compacte V de dimension complexe n, les $H^{p,q}(V\,,\,W)$ sont nuls pour $p\,,\,q > n$; ce sont des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps des complexes, et $i\,:\;H^{p,q}(V\,,\,W)\times H^{n-p,n-q}(V\,,\,W^*)\longrightarrow C$ est une dualité.

5. La caractéristique χ.

a. V étant compacte, d'après le théorème 3, il n'y a qu'un nombre fini de $H^{p,q}(V\,,\,W)$ non nuls, et chacun d'eux est un espace vectoriel de dimension finie, On pose alors :

$$h^{p,q}(V\,,\,W) = \dim H^{p,q}(V\,,\,W)$$

$$h^{p,q}(V) \qquad = \dim H^{p,q}(V\,,\,C)$$

$$\chi^p(V\,,\,W) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\, h^{p,q}(V\,,\,W)\,,\qquad \chi^o(V\,,\,W) = \chi(V\,,\,W)$$

$$\chi^p(V) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\, h^{p,q}(V)\,,\qquad\qquad \chi^o(V) \quad = \chi(V)$$

$\chi^p(V\,,\,W)$ (resp. $\chi(V\,,\,W)$ resp. $\chi^p(V)$ resp. $\chi(V)$) n'est autre que la caractéristique d'Euler-Poincaré de V dans la cohomologie à valeur dans le faisceau $\underset{\sim}{W\otimes T^{(p)}}$ (resp $\underset{\sim}{W}$, resp $\underset{\sim}{T}^{(p)}$, resp C_ω)

Enfin on considère les polynômes

$$\chi_y(V\,,\,W) = \sum_{p=0}^{n} \chi^p(V\,,\,W)\, y^p$$

$$\chi_y(V) \qquad = \sum_{p=0}^{n} \chi^p(V)\, y^p$$

on a évidemment

$$\chi(V) = \chi_o(V)$$

DEFINITION. - On donne au polynôme $\chi_y(V\,,\,W)$ le nom de χ_y-caractéristique du fibré W, à $\chi(V)$ le nom de genre arithmétique de V.

b. Cas où V est kählérienne.

De $d\omega = o$, on tire ([4]) que $\Delta'' = \Delta/2$ sur les formes différentielles à valeur dans C. Les formes harmoniques pour Δ'' le sont aussi pour Δ, donc

Δ'' commute au passage à l'imaginaire conjugué. Si $\alpha \in B^{p,q}(C)$, l'application $\alpha \to \bar{\alpha}$ est donc un anti-isomorphisme $B^{p,q}(C) \xrightarrow{\sim} B^{q,p}(C)$ comme $H^{p,q}(V\,,\,C) \approx B^{p,q}(C)$ on a donc :

$$h^{p,q}(V) = h^{q,p}(V)$$

En particulier $h^{o,q}(V) = h^{q,o}(V)$.

Mais

$$h^{q,o}(V) = \dim H^{o}(V\,,\,\underset{\sim}{T}^{(q)}) = g_q$$

où g_q désigne le nombre des q-formes définies sur tout V , holomorphes et linéairement indépendantes.

Dans le cas kählérien on a donc

PROPOSITION 4. - $\chi(V) = \sum_{q=o}^{n} (-1)^q \, g_q$.

Le théorème de Hodge-de Rham classique montre d'autre part que:

PROPOSITION 5. - $H^r(V\,,\,C) \approx \sum_{p+q=r} B^{p,q}(C)$.

(où $H^r(V\,,\,C)$ est la cohomologie ordinaire de V à coefficients dans le faisceau constant C).

Un élément de $H^r(V\,,\,C)$ qui provient d'un élément de $B^{p,q}(C)$ par l'identification de la proposition 5 sera dit de type $(p\,,\,q)$.

Des homomorphismes $Z \to R \to C$, on déduit les homomorphismes $H^r(V\,,\,Z) \to H^r(V\,,\,R) \to H^r(V\,,\,C)$.

Un élément de $H^r(V\,,\,Z)$, qui donne dans $H^r(V\,,\,C)$ un élément de type $(p\,,\,q)$, sera encore appelé de type $(p\,,\,q)$.

Enfin, si $b_r(V)$ désigne le r-ième nombre de Betti de V, i.e. $b_r(V) = \dim H^r(V,C)$ on a, d'après la proposition 5 :

$$b_r(V) = \sum_{p+q=r} h^{p,q}(V) \ .$$

c. <u>Quelques lemmes.</u>

Il est commode de dire qu'un faisceau F est de type $(\mathfrak{F})$ si $H^p(V\,,\,F) = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de p , et si $\dim H^p(V\,,\,F) < +\infty$. On peut alors définir la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi(F) = \sum (-1)^p \, H^p(V\,,\,F)$$

LEMME 4. - Soit $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ un suite exacte de faisceaux sur V ; si deux des trois faisceaux sont de type $(\mathfrak{F})$ le troisième l'est aussi et

$$\chi(F) = \chi(F') + \chi(F'')$$

c'est une application immédiate de la suite exacte de cohomologie associée à une suite exacte de trois faisceaux.

LEMME 5. - Soit $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow \dots \rightarrow F_n \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux de type $(\mathfrak{F})$ sur V, alors

$$\sum (-1)^i \chi(F_i) = 0 .$$

En effet soit N_i le noyau de $F_i \rightarrow F_{i+1}$ chacune des suites

$$0 \rightarrow N_i \rightarrow F_i \rightarrow N_{i+1} \rightarrow 0$$

est exacte. Le lemme 5 est alors une application immédiate du lemme 4.

LEMME 6. - Soit $0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow W'' \rightarrow 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels analytiques complexes sur V, la suite

$$0 \rightarrow \underset{\sim}{W'} \rightarrow \underset{\sim}{W} \rightarrow \underset{\sim}{W''} \rightarrow 0$$

est aussi exacte.

La démonstration est immédiate dès que l'on a remarqué qu'une section de $\underset{\sim}{W}$ (resp $\underset{\sim}{W'}$, resp $\underset{\sim}{W''}$) au-dessus de U n'est autre qu'une section holomorphe de W (resp W', resp W'') au-dessus de U. La réciproque du lemme 6 est vraie, mais la démonstration est plus compliquée dans ce cas.

d. Premières propriétés de χ_y.

PROPOSITION 6. - $\chi_{-1}(V) = \sum (-1)^{p+q} h^{p+q}(V) =$ caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologie de V à coefficients dans C.

Si V est kählérienne, la démonstration résulte immédiatement de la proposition 5 :

$$\chi_{-1}(V) = \sum_r (-1)^r \sum_{p+q=r} h^{p,q}(V) = \sum_r (-1)^r b_r(V) .$$

Dans le cas général (V compacte, analytique complexe) on a la suite exacte

$$0 \rightarrow C \rightarrow C_\omega \rightarrow \underset{\sim}{T}^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \underset{\sim}{T}^{(n)} \rightarrow 0$$

les homomorphismes $\underset{\sim}{T}^{(i)} \rightarrow \underset{\sim}{T}^{(i+1)}$ étant induits par d. Tous ces faisceaux sont de type $(\mathfrak{F})$ (pour C cela résulte du théorème 5 de [7], pour les autres

cela résulte du théorème 3). On peut donc appliquer le lemme 5 :
$\chi(C) = \sum (-1)^i \chi(\underset{\sim}{T}^{(i)})$ dans les notations de ce lemme. Mais $\chi(\underset{\sim}{T}^{(i)})$ est par définition égal à $\chi^i(V)$ donc

$$\chi(C) = \sum (-1)^i \chi^i(V) = \chi_{-1}(V) .$$

PROPOSITION 7. – $\chi_{+1}(V)$ = Indice de V . (pour V kählérienne compacte).

Définissons d'abord l'indice d'une variété de dimension paire $2n$, orientable.

Soit $x \in H^n(V, R)$, et $[V]$ un générateur de $H_{2n}(V, R)$ définissant l'orientation de V . $x^2 \in H^{2n}(V, R)$ (le produit étant le cup-produit) et $x^2([V]) \in R$. On définit ainsi une forme quadratique sur l'espace vectoriel sur le corps des réels $H^n(V, R)$. L'indice de cette forme quadratique (nombre de carrés positifs – le nombre de carrés négatifs) est l'indice de V . Si n est impair , l'indice est nul : en effet le cup-produit étant anticommutatif $x^2 = 0$, si n est impair pour tout $x \in H^n(V, R)$. Si n est impair,
$\chi_1(V) = \sum_p \chi^p(V) = 0$ car la dualité (théorème 3) montre que

$$\chi^p(V) = (-1)^n \chi^{n-p}(V) = - \chi^{n-p}(V)$$

(dans le cas où n est impair $X_1(V)$ = indice de V , même si V n'est pas kählérienne).

Dans le cas n pair la démonstration fait intervenir une décomposition de Lepage des formes harmoniques (cf [4]). On renvoie à [2] pour la démonstration.

PROPOSITION 8. – $\chi_y(V \times V') = \chi_y(V)\, \chi_y(V')$ (V et V' compactes).

En effet

$$h^{p,q}(V \times V') = \sum_{\substack{r+u=p \\ s+v=q}} h^{r,s}(V)\, h^{u,v}(V')$$

(en effet $A^{p,q}(V \times V') = \sum_{\substack{r+u=p \\ s+v=q}} A^{r,s}(V) \otimes A^{u,v}(V')$ où $A^{p,q}(V \times V')$, $A^{r,s}(V)$, $A^{u,v}(V')$ désignent les fibrés du paragraphe 3 au-dessus de $V \times V'$, V , V').

Donc en posant

$$\pi_{y,z}(V) = \sum h_{p,q}(V)\, y^p z^q$$

$$\pi_{y,z}(V \times V') = \pi_{y,z}(V)\, \pi_{y,z}(V') .$$

Mais $\pi_{y,-1} = \chi_y$ donc la proposition 8 est démontrée.

PROPOSITION 9. - Soit $0 \to W' \to W \to W'' \to 0$ une suite exacte de fibrés à fibres vectorielles sur V compacte. Alors

$$\chi_y(V , W) = \chi_y(V , W') + \chi_y(V , W'')$$

En effet la suite $0 \to W' \otimes T^{(p)} \to W \otimes T^{(p)} \to W'' \otimes T^{(p)} \to 0$ est encore exacte ; donc, d'après les lemmes 6 et 4,

$$\chi^p(V , W) = \chi^p(V , W') + \chi^p(V , W'') \qquad p = 0 , 1 \dots n .$$

d'où la proposition.

PROPOSITION 10. - Soient W un fibré vectoriel sur V , à fibre C^r , dont le groupe structural peut être réduit (comme fibré analytique complexe) au groupe $\Delta(r , C)$, les fibrés diagonaux vectoriels de fibré C étant $A_1 , \dots , A_r$ ([9], paragraphe (3-3)), et W' un fibré vectoriel quelconque. On a :

$$\chi(V , W' \otimes W) = \chi(V , W' \otimes A_1) + \dots + \chi(V , W' \otimes A_r) .$$

Démonstration par récurrence sur r . Si $r = 1$, la formule est évidente (car $W = A_1$). Supposons donc le résultat vrai pour $r' < r$, et démontrons-le pour r . On peut réduire le groupe structural de W/A_1 à $\Delta(r - 1 , C)$. Ses fibrés diagonaux sont $A_2 , \dots , A_r$, et la suite

$$0 \to W' \otimes A_1 \to W' \otimes W \to W' \otimes (W/A_1) \to 0$$

est exacte. On déduit alors la formule cherchée des lemmes 6 et 4 et de l'hypothèse de récurrence qui s'applique au fibré W/A_1 .

6. Diviseurs.

DÉFINITION. - Soit $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de V par des ouverts. On appelle diviseur, un ensemble de fonctions (f_i) , f_i étant méromorphe non identiquement nulle dans U_i , tel que $\frac{f_i}{f_j}$ soit holomorphe sans zéros dans $U_i \cap U_j$

Si $\{U'_{j'}\}_{j' \in I'}$ est un autre recouvrement de V , $(f_{i'})$ un diviseur défini dans ce recouvrement, on dit que (f_i) et $(f_{i'})$ définissent le même diviseur de V si $\frac{f_i}{f_{i'}}$ est sans zéro ni pole dans $U_i \cap U'_{i'}$, quels que soient $i \in I$, $i' \in I'$.

Définition équivalente à l'aide des faisceaux.

Soient M le faisceau des germes de fonctions méromorphes non identiquement nulles sur V (l'opération étant la multiplication des fonctions), et C^*_ω le faisceau des germes de fonctions holomorphes non identiquement nulles sur V (l'opération étant encore la multiplication) C^*_ω est un sous-faisceau de $\mathbf{M}$. Soit $\mathcal{D}$ le quotient de M par C^*_ω. On a une suite exacte :

$$0 \to C^*_\omega \xrightarrow{h} G \to \mathcal{D} \to 0$$

$\mathcal{D}$ est le faisceau des germes de diviseurs. Un diviseur est une section globale de $\mathcal{D}$, i. e. un élément de $H^0(V, \mathcal{D})$. $H^0(V, \mathcal{D})$ est un groupe commutatif que l'on écrit <u>additivement</u> (l'addition des diviseurs correspond donc à la <u>multiplication</u> des fonctions f_i). Ecrivons le début de la suite exacte de cohomologie :

(3) $$H^0(V, G) \xrightarrow{h^*} H^0(V, \mathcal{D}) \xrightarrow{\delta} H^1(V, C^*_\omega)$$

Si f est une fonction méromorphe sur tout G (i.e un élément de $H^0(V, G)$ h^*f est donc un diviseur que l'on note (f).

DÉFINITION. - <u>On dit que deux diviseurs sont linéairement dépendant si leur différence est l'image par</u> h^* <u>d'un élément de</u> $H^0(V, G)$.

L'ensemble des classes d'équivalence de diviseurs est donc isomorphe à $H^0(V, \mathcal{D})/h^* H^0(V, G)$, c'est-à-dire à un sous groupe de $H^1(V, C^*_\omega)$ puisque la suite (3) est exacte. Mais $H^1(V, C^*_\omega)$ est l'ensemble des fibrés analytiques complexes sur V à fibre C^* (cf [8]). A toute classe de diviseurs, δ fait donc correspondre un C^*-fibré. Si D est un diviseur, on désigne par $[D]$ le C^*-fibré $(\delta D)^{-1}$ (si F est un C^*-fibré, on écrit F^{-1} au lieu de F^*, F^n au lieu de $\underbrace{F \otimes \dots \otimes F}_{n \text{ fois}}$; $F^{-n} = \underbrace{F^{-1} \otimes \dots \otimes F^{-1}}_{n \text{ fois}}$; avec ces notations, le produit tensoriel est l'opération du groupe commutatif $H^1(V, C^*_\omega)$, comme on le voit immédiatement en se reportant aux formules du paragraphe (1.1) de [9]). Enfin on désigne par $\{D\}$ le fibré vectoriel à fibre C associé à $[D]$. Si D est donné par des fonctions f_i, un cocycle pour $[D]$ est $g_{ij} = f_i/f_j$ dans $U_i \cap U_j$.

DÉFINITIONS. - <u>Un diviseur est dit holomorphe</u> (ou non négatif) <u>si les</u> f_i <u>sont toutes holomorphes</u>.

<u>Un diviseur est dit sans singularité, s'il est holomorphe, et s'il existe un recouvrement</u> $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}$ <u>tel que, pour tout</u> i <u>ou bien</u> $f_i \equiv 1$, <u>ou bien il existe dans</u> U_i <u>des coordonnées locales analytiques complexes telles que</u> f_i <u>soit l'une des coordonnées</u>.

Dans ce dernier cas, l'ensemble des x de V tels que $f_i(x) = 0$ pour tous les

i tels que $x \in U_i$ est une variété analytique complexe de dimension $n-1$ fermée dans V. Réciproquement, une sous-variété analytique complexe fermée dans V définit un diviseur de V. On désignera dans la suite par le même symbole le diviseur sans singularité et la sous-variété qu'il définit.

7. <u>Etude de</u> $\chi_y(V, W)$ <u>en fonction d'un diviseur</u> S <u>sans singularité</u>.

a. Notons (s_i) les fonctions qui définissent S dans $\underset{\sim}{U} = \{U_i\}$. $s_{ij} = s_i/s_j$ est le cocycle qui définit $[S]$. L'ensemble des fonctions $s_i : U_i \to C$ forme donc une section globale holomorphe du fibré à fibre linéaire $\{S\}$. Soit s cette section. s s'annule sur et seulement sur la sous-variété S. Notons $(W \otimes \{S\})_S$ la restriction à la sous-variété S du fibré $W \otimes \{S\}$, $(\underset{\sim}{W \otimes \{S\}})_S$ le faisceau des germes de sections holomorphes du fibré $(W \otimes \{S\})_S$, $(\underset{\sim}{W \widehat{\otimes} \{S\}})_S$ le prolongement trivial à V du faisceau $(\underset{\sim}{W \otimes \{S\}})_S$.

LEMME 7. - <u>La suite de faisceaux sur</u> V :

$$0 \to \underset{\sim}{W} \to \underset{\sim}{W \otimes \{S\}} \to (\underset{\sim}{W \widehat{\otimes} \{S\}})_S \to 0$$

<u>est exacte</u>.

Si s' est une section locale de W, au-dessus d'un ouvert U, $s' \otimes s$ est une section locale de $W \otimes \{S\}$ au-dessus de U. Cela définit le premier des homomorphismes de la suite exacte. Le deuxième est défini à partir de la restriction à S des sections locales de $W \otimes \{S\}$. Pour la démonstration du lemme voir [2].

PROPOSITION 11. - $\chi(V, W) = \chi(V, W \otimes \{S\}^{-1}) + \chi(S, W_S)$

$$\chi(V) = \chi(V, \{S\}^{-1}) + \chi(S).$$

(W_S désigne la restriction à S du fibré W).

En effet remarquons d'abord que S étant une sous-variété fermée d'une variété compacte est elle-même compacte, et que par conséquent $\chi(S)$, $\chi(S, W_S)$ peuvent être définies. La proposition 11 résulte alors de l'application à la suite exacte du lemme 7 (où l'on a remplacé W par $W \otimes \{S\}^{-1}$) du lemme 4, et de la proposition (3.2) de [10].

b. Désignons par $\mathcal{C}(V)$, $\mathcal{C}(S)$, (resp. $T^p(V)$, $T^p(S)$) les fibrés vectoriels tangents (resp. des p-formes différentielles holomorphes) au-dessus de V, S ; l'indice S au-dessous d'un fibré désignant encore la restriction à S de ce fibré.

LEMME 8. - $0 \to \mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(V)_S \to \{S\}_S \to 0$ <u>est une suite exacte de fibrés au-dessus de</u> S .

En effet soit $j : S \to V$ l'injection canonique. Si

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n , C)$$

est un cocycle pour $\mathcal{C}(V)$,

$$j^* g_{ij} = g_{ij} \circ j : (j^{-1} U_i) \cap j^{-1} U_j \to GL(n , C)$$

est un cocycle pour $\mathcal{C}(V)_S$. S étant sans singularité, on peut supposer que la dernière coordonnée de V dans U_i (resp. U_j) est f_i resp. (f_j) , les autres étant $z_1, z_2 , \dots , z_{n-1}$ (resp. $z'_1 , \dots , z'_{n-1}$) . La dernière ligne de la matrice $j^* g_{ij}$ est donc

$$\left(\frac{\partial z_n}{\partial z'_1}\right)_{f_j=0} , \dots , \left(\frac{\partial z_n}{\partial z'_n}\right)_{f_j=0}$$

soit $0 , \dots , 0 , \dfrac{f_i}{f_j}(x)$, x étant le point de coordonnées $(z'_1 , \dots , z'_{n-1} , 0)$ de U_j . Par conséquent le fibré $\mathcal{C}(V)_S$ a un groupe structural qui peut être réduit à $GL(n - 1 , 1 ; C)$: il admet pour sous-fibré le fibré $\mathcal{C}(S)$ (car la matrice $(n - 1 \times n - 1)$ qui figure en haut et à gauche de g_{ij} est un cocycle pour $\mathcal{C}(S)$), et pour fibré quotient $\{S\}_S$ (car la matrice 1×1 en bas et à droite est f_i/f_j).

C.Q.F.D.

LEMME 9. - $0 \to T^{p-1}(S) \otimes \{S\}_S^{-1} \to T^{(p)}(V)_S \to T^{(p)}(S) \to 0$ <u>est une suite exacte de fibrés au-dessus de</u> S .

En effet, du lemme 8 ou tire, en remplaçant chaque fibré par son dual, la suite $0 \to \{S\}_S^{-1} \to T(V)_S \to T(S) \to 0$. On a d'autre part deux homomorphismes canoniques :

$$T^{(p)}(V)_S \to T^p(S) \to 0 \quad \text{et} \quad T^{(p-1)}(V)_S \otimes \{S\}_S^{-1} \to T^{(p)}(V)_S$$

ce dernier s'annule sur le noyau de l'homomorphisme surjectif

$$T^{p-1}(V)_S \otimes \{S\}_S^{-1} \to T^{p-1}(S) \otimes \{S\}_S^{-1} \to 0$$

et induit par conséquent un homomorphisme

$$T^{p-1}(S) \otimes \{S\}^{-1} \to T^p(V)_S \quad ,$$

qui est le premier homomorphisme de la suite en question. En regardant ce qui se passe dans les fibres, on voit immédiatement que cette suite est exacte.

PROPOSITION 12. - $\chi_y(V, W) = \chi_y(V, W \otimes \{S\}^{-1}) + \chi_y(S, W_S) + y\chi_y(S, (W \otimes \{S\}_S))$ (cette formule est due à KODAÏRA et SPENCER).

Multiplions tensoriellement par W_S les termes de la suite exacte du lemme 9 . Appliquons alors le lemme 4 : on obtient

$$\chi(S, W_S \otimes T^p(V)_S) = \chi^{p-1}(S, W_S \otimes \{S\}^{-1}) + \chi^p(S, W_S)$$

on applique alors la proposition 11, où W est remplacé par $W \otimes T^p(V)$ (en remarquant que $W_S \otimes T^p(W)_S = (W \otimes T^p(V))_S$) et l'on obtient la formule cherchée.

Un calcul formel (donne par récurrence sur p) la formule suivante

$$(4) \qquad \chi^p(S, W_S) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [\chi^{p-i}(V, W \otimes \{S\}^{-i}) - \chi^{p-i}(V, W \otimes \{S\}^{-i+1})]$$

REMARQUE. - Par définition même de la caractéristique le premier membre est nul si $p \geqslant n$ (car S est une variété de dimension $n-1$) ; mais le second membre ne s'annule pas identiquement pour $p \geqslant n$. Il existe donc des relations non triviales entre les χ qui figurent au second membre. Ces relations subsistent-elles lorsque $\{S\}$ est remplacé par un fibré à fibre linéaire quelconque ? Nous verrons que la réponse est positive lorsque V est algébrique.

De l'expression (4), on tire

$$(5) \qquad \chi_y(S, W_S) = \sum_{i=0}^{\infty} (-y)^i [\chi_y(V, W \otimes \{S\}^{-i}) - \chi_y(V, W \otimes \{S\}^{-i-1})]$$

où la série formelle du second membre est en fait un polynôme, en vertu des relations dont on vient de parler.

Dans un prochain exposé, on donnera à l'expression (5) une forme symbolique permettant de définir plus généralement des "caractéristiques virtuelles" et d'obtenir des formules plus maniables que celles de la proposition 12. Dans le cas où V est algébrique ces formules nous permettront de calculer complètement $\chi(V)$ en fonction des classes de Chern de V : c'est ce résultat qu'on désignera sous le nom de théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, Annals of Math., t. 64, 1956, p. 83-330 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[2] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, Heft 9).

[3] KODAÏRA (K.). - On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 39, 1953, p. 865-868.

[4] LICHNEROWICZ (André). - Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. - Paris, Dunod, 1955 (Travaux et Recherches mathématiques, 2).

[5] de RHAM (Georges). - Variétés différentiables ... . - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., n° 1222).

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux analytiques sur l'espace projectif, Séminaire H. Cartan, t. 6, 1953/54, n° 18.

[7] ZISMAN (Michel). - Homologie et cohomologie de Čech, II., Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, n° 14.

[8] ZISMAN (Michel). - Espaces fibrés, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, n° 17.

[9] ZISMAN (Michel). - Espaces fibrés à fibre vectorielle, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, n° 21.

[10] ZISMAN (Michel). - Cohomologie à coefficients dans un faisceau, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 11, 1957/58, n° 8.