Lucio Lombardo-Radice

Quelques résultats nouveaux et quelques problèmes ouverts dans la théorie des quasicorps

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1957-1958), exp. nº 20, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A6_0>

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58

-:-:-:-

14 avril 1958

QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX ET QUELQUES PROBLÈMES OUVERTS DANS LA THÉORIE DES QUASICORPS

par Lucio LOMBARDO-RADICE

1. Les quasicorps et les systèmes Σ qui leur sont associés.

On appelle quasicorps droit (PICKERT [12]) un ensemble Q, possédant au moins deux éléments distincts : 0, 1, dans lequel sont définies deux opérations, appelées "addition" et "multiplication" (on emploie les symboles de l'addition et de la multiplication usuelles), satisfaisant les axiomes suivants :

(A) Q_+, c'est-à-dire l'ensemble Q vis-à-vis de l'addition, est un groupe abélien, dont 0 est l'élément neutre.

(M_0) $0.a = a.0 = 0$, quel que soit $a \in Q$.

(M) Vis-à-vis de la multiplication, $Q - 0$ est un "loop", c'est-à-dire un quasigroupe au sens de DUBREIL ([3], p. 45) ; les axiomes des quotients sont vérifiés, il existe un élément neutre, $1 \neq 0$, c'est-à-dire un élément-unité pour la multiplication.

(D_d) Distributivité à droite : $a(b + c) = ab + ac$.

(E) Si m_1, m_2, $c \in Q$, $m_1 \neq m_2$, alors l'équation :

$$- m_1 x + m_2 x = c ,$$

possède une (et par conséquent une seule) solution x.

L'axiome (E) est conséquence des précédents dans le cas fini (PICKERT [12], LOMBARDO-RADICE [6]).

Si on remplace la distributivité à droite par la distributivité à gauche, (D_g), on définit les quasicorps gauches.

Nous nous occuperons dorénavant surtout du cas fini. Dans le cas fini, on appelle ordre du quasicorps Q le nombre q, de ses éléments. Or, l'ordre q d'un quasicorps (droit ou gauche) fini Q est nécessairement une puissance,

$q = p^t$, d'un nombre premier p (LOMBARDO-RADICE [6], ANDRÉ [1]). On appelle p la caractéristique de Q parce que tout élément de Q_+ a pour période p . Par conséquent, Q_+ est un groupe abélien élémentaire d'ordre p^t ; c'est-à-dire, Q_+ est la somme directe de t groupes cycliques d'ordre p . Les dites propriétés de Q_+ , dans le cas fini, sont conséquences particulières d'un théorème plus général, suivant lequel, dans un quasicorps (droit ou gauche) Q , fini ou infini, ou bien tout élément est apériodique, ou bien tous les éléments possèdent une même période p , p étant un nombre premier ; dans le premier cas Q contient un sous-quasicorps isomorphe au champ de Galois, γ_p , avec p élément, dans le deuxième cas un sous-quasicorps isomorphe au corps des nombres rationnels (LOMBARDO-RADICE [6], [7]).

La classification des quasicorps finis associatifs a été accomplie par H. ZASSENHAUS [14] (les "endlichen Fastkörper" de ZASSENHAUS étant précisément les quasicorps finis, droits ou gauches, associatifs). Dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où la multiplication n'est pas associative, le problème de la classification des quasicorps est encore ouvert, même dans le cas fini. On peut ramener le problème de la classification des quasicorps, disons droits, finis ou infinis, à un problème "groupal", de la façon suivante (LOMBARDO-RADICE [6]).

La correspondance :

$$x \longrightarrow S_a(x) = ax \ , \quad a \in Q \ , \quad a \neq 0 \ ,$$

étant un automorphisme de Q_+ (à cause de (M) , (D_d)) , on peut associer à Q (fini ou bien infini) un système Σ d'automorphismes tel que :

1° Σ contient l'identité (si et seulement si $a = 1$, $S_a = I$ = automorphisme identique) ;

2° Σ est simplement transitif sur les éléments de Q différents de zéro (c'est une conséquence de (M)).

Inversement, donnons-nous un groupe abélien Q_+ , et un système Σ d'automorphismes de Q_+ , simplement transitif sur les éléments $\neq 0$ de Q_+ et contenant l'identité. Fixons un élément $u \in Q_+$, $u \neq 0$, et appelons S_a $(a \neq 0)$ l'automorphisme S de Σ pour lequel on a : $S(u) = a$ (la définition est univoque, en conséquence, de l'hypothèse 2)).

Posons alors :

(M) $a.b = c$ $(a , b \neq 0)$,

si, et seulement si :

(M') $S_a \circ S_b(u) = S_a(S_b(u)) = c$

($S_a \circ S_b$ est le produit en sens groupal de S_a et S_b ; on doit procéder de droite à gauche, au point de vue opératoire). Posons encore :

(M_o) $0.a = a.0 = 0$ (a quelconque en Q_+).

Avec les définitions (M), (M_o) on introduit dans l'ensemble Q_+ une deuxième opération (une "multiplication") ; on démontre que de cette manière on transforme Q_+ dans un quasicorps (droit) Q (LOMBARDO-RADICE [6], voir aussi PICKERT [12], p. 94).

Les théorèmes qu'on vient de rappeler permettent de ramener la classification des quasicorps (droits) finis ou infinis à la construction de tous les systèmes possibles Σ, simplement transitifs et contenant l'identité, d'un groupe abélien dont tout élément est apériodique, ou bien d'un groupe abélien tel que chaque élément possède la même période p, p étant un nombre premier. Il faut toutefois observer que la correspondance entre les quasicorps Q et les systèmes Σ n'est pas, en général, biunivoque, plusieurs systèmes Σ, relatifs à un même groupe abélien Q_+, pouvant donner naissance à des quasicorps isomorphes (on en donnera un exemple bientôt ; voir n° 3).

Si le quasicorps Q est fini, d'ordre $q = p^t$, le système Σ associé à Q contient $q - 1$ automorphismes, et inversement.

2. Considérations sur la construction des systèmes Σ associés aux quasicorps (droits) finis.

Au point de vue additif, un quasicorps droit fini est un groupe abélien élémentaire Q_+ d'ordre p^t, dont chaque élément $\neq 0$ a la période p, p étant un nombre premier (n° 1). Cela signifie que le sous-groupe $\{a\}$, engendré par $a \neq 0$, $a \in Q_+$, est isomorphe à γ_p^+, si on appelle γ_p le corps fini avec p éléments (corps fondamental de caractéristique p). Par conséquent, les éléments de Q_+ peuvent être identifiés avec les t-uples ordonnés de nombres de γ_p :

$$a = (a_1 , \dots , a_t) ,$$

puisque chaque élément $a \in Q_+$ peut s'écrire, d'une et d'une seule façon, sous la forme :

$$a = a_1 u_1 + \dots + a_t u_t ,$$

si on choisit une "base" $u_1 , \dots , u_t$ dans Q_+ .

Si :

$$a = (a_1 , \dots , a_t) \in Q_+ , \quad b = (b_1 , \dots , b_t) \in Q_+ ,$$

on a alors :

$$a + b = (a_1 + b_1 , \dots , a_t + b_t) \in Q_+$$

l'addition des entiers a_i , b_i étant faite modulo p . En conclusion, on peut concevoir Q_+ comme un espace vectoriel V_t à t dimensions sur γ_p .

D'après des théorèmes bien connus, les automorphismes de $V_t = Q_+$ s'identifient avec les transformations linéaires homogènes régulières (t.ℓ.h.r.) de V_t .
C'est-à-dire :

Chaque t.ℓ.h.r., A , de V_t , est un automorphisme de $V_t = Q_+$; inversement, chaque isomorphisme, α , de Q_+ est une t.ℓ.h.r., A , de V_t .

La t.ℓ.h.r. A étant donnée par le système :

$$x_i' = \sum a_{ij} x_j , \quad i , j = 1 , \dots t , \quad |A| \neq 0 ,$$

on peut identifier la transformation A avec sa matrice (A) .

Pour construire tous les systèmes possibles $\sum$, auxquels sont associés des quasicorps (droits) finis d'ordre $q = p^t$, il faut alors, et il suffit, de construire tous les systèmes possibles $\sum$, formés par $q - 1$ t.ℓ.h.r. de V_t :

(1) contenant l'identité ;

(2) simplement transitifs sur les éléments $(x_1 , \dots , x_t) \neq (0 , \dots , 0)$ de V_t .

En conséquence de (2) , il existe une, et une seule, t.ℓ.h.r. $S \in \sum$, telle que :

$$S(1 , 0 , \dots , 0) = b = (b_1 , \dots , b_t) \neq (0 , 0 , \dots , 0) ;$$

désignons-la par le symbole S_b . La matrice associée à S_b est du type suivant :

$$(S_b) = \begin{pmatrix} b_1 & \beta_{12} & \dots & \beta_{1t} \\ b_2 & \beta_{22} & \dots & \beta_{2t} \\ \vdots & & \dots & \\ b_t & \beta_{t2} & \dots & \beta_{tt} \end{pmatrix}$$

Il faut déterminer les β_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, t \,;\; j = 2, \ldots, t)$ de façon que :

(0) $(S_b) \neq 0$;

(1) $S_{(1,0,\ldots,0)} = S_1 =$ identité ;

(2') $S_b(z) \neq S_c(z)$, si $b \neq c$, quel que soit $z \neq 0$, $z \in V_t$ (à cause de la simple transitivité) ; c'est-à-dire de façon que :

$$\begin{vmatrix} b_1 - c_1 & \beta_{12} - \gamma_{12} & \ldots & \beta_{1t} - \gamma_{1t} \\ b_2 - c_2 & \beta_{22} - \gamma_{22} & \ldots & \beta_{2t} - \gamma_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_t - c_t & \beta_{t2} - \gamma_{t2} & \ldots & \beta_{tt} - \gamma_{tt} \end{vmatrix} \neq 0$$

(condition nécessaire et suffisante pour que le système :

$$b_1 x_1 + \beta_{12} x_2 + \ldots + \beta_{1t} x_t = c_1 x_1 + \gamma_{12} x_2 + \ldots + \gamma_{1t} x_t$$

$$\ldots$$

$$b_t x_1 + \beta_{t2} x_2 + \ldots + \beta_{tt} x_t = c_t x_1 + \gamma_{t2} x_2 + \ldots + \gamma_{tt} x_t ,$$

n'ait pas de solutions différentes de la solution nulle).

Dans le cas fini, la condition (2') est équivalente à (2). En effet, dans ce cas, (2') nous assure qu'un élément $X = (x_1, \ldots, x_t) \neq 0$ est transporté par les $q - 1$ transformations S_b du système S dans $q - 1$ éléments non nuls de V_t différents entre eux. Cela signifie que, étant donnés deux éléments x, y non nuls de V_t, il existe une et une seule transformation $S \in \Sigma$ telle que : $S(x) = y$: Σ est simplement transitif sur les éléments $\neq 0$ de V_t.

En utilisant les conditions (1), (2') au lieu de (1), (2), la construction effective des systèmes Σ relatifs à un groupe abélien élémentaire donné Q_+, d'ordre $q = p^t$, peut être ramenée au problème suivant :

(Σ) Déterminer les éléments β_{ij} des $q - 1$ matrices ($b = (b_1, \ldots, b_t)$ parcourt $V_t - 0$), de façon que les conditions (0), (1), (2') soient satisfaites.

3. Le cas $t = 2$, $q = p^2$.

Dans le cas $t = 2$, $q = p^2$, soient :

$$S_{(x,y)} = \begin{pmatrix} x & \xi(x, y) \\ y & \eta(x, y) \end{pmatrix}$$

les $q - 1$ matrices d'un système Σ (n° 2, fin ; (x, y) parcourt $V_{2,p} - (0, 0)$, où $V_{2,p}$ est l'espace vectoriel à deux dimensions sur γ_p ; $S_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\xi(1, 0) = 0$, $\eta(1, 0) = 1$).

Considérons alors, dans le plan affine $S^+_{2,p}$ (sur γ_p) la correspondance σ :

$$\sigma : \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases},$$

c'est-à-dire la correspondance : $\sigma(x, y) = (\xi, \eta)$.

σ est :

(a) une transformation (correspondance biunivoque) de $S_{2,p} - (0, 0)$ en soi, telle que :

(b) la droite unissant deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) et la droite unissant les deux points correspondants $(\xi_1, \eta_1) = \sigma(x_1, y_1)$, $(\xi_2, \eta_2) = \sigma(x_2, y_2)$ ne sont jamais parallèles ;

(c) $(1,0) = (0,1)$. - En effet, la condition (2') (voir n° 2) devient dans notre cas :

$$(2'') \qquad \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \neq \frac{\xi(x_1, y_1) - \xi(x_2, y_2)}{\eta(x_1, y_1) - \eta(x_2, y_2)} ;$$

en langage géométrique, la condition (2') se traduit par la condition (b). La condition (a) est équivalente à (0), tandis que la condition (c) équivaut à (1).

Dans une recherche, que je n'ai pas encore achevée, je me propose de déterminer toutes les transformations σ, jouissant des propriétés (a), (b), (c). Ici, j'expose seulement les tous premiers résultats.

1° Les transformations σ linéaires homogènes donnent lieu à des systèmes Σ, auxquels sont associés des quasicorps isomorphes au champ de Galois γ_q $(q = p^2)$.

Soit, en effet :

$$\begin{cases} \xi = a_1 x + a_2 y \\ \eta = b_1 x + b_2 y \end{cases}.$$

A cause de la condition (c) on doit avoir : $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. La condition (b) (c'est-à-dire (2")) se traduit par l'irréductibilité, sur γ_p , de l'équation :

$$(2''') \qquad a_2 t^2 - b_2 t - 1 = 0 \quad \left(t = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) ,$$

Pour chaque couple de valeurs (a_2 , b_2) donnant lieu à une équation (2"') on obtient un système Σ , et par conséquent un quasicorps droit, qui est aussi un quasicorps gauche et associatif, et par conséquent un corps isomorphe à γ_{p^2} .

2° (M. HAAL [5] , voir aussi PICKERT [12], PANELLA [11]). On obtient les quasicorps (propres) bien connus de M. HALL en posant :

(1) $\xi = ((r - x)x + 1)y^{-1}$; $\eta = r - x$,

dans le cas où : $y \neq 0$, l'équation : $x^2 - rx - s = 0$ étant irréductible sur γ_p ;

(2) $\xi = 0$, $\eta = x$, si $y = 0$.

3° Avec les formules :

$$\xi = - \frac{y}{x^2 + y^2} ; \quad \eta = \frac{x}{x^2 + y^2} ,$$

on obtient un système $\sigma(\Sigma)$ si et seulement si $p = 3$; dans ce cas le quasicorps (droit) associé au système Σ est le quasicorps "exceptionnel" d'ANDRÉ [2] , c'est-à-dire le seul quasicorps de HALL (voir [5]) qui soit associatif ; pour ce quasicorps on a $p = 3$, $r = 0$, $s = -1$ (pour la démonstration du fait que le quasicorps exceptionnel est le seul quasicorps de Hall associatif (voir [13]).

En principe, les conditions (a), (b), (c) permettent la construction effective de tous les systèmes $\sigma(\Sigma)$ possibles pour un ordre $q = p^2$ donné ; elles nous font voir, en effet, quels sont les choix successifs admissibles pour les valeurs ultérieures des fonctions ξ , η , étant donné un groupe de valeurs "compatibles". C'est-à-dire : on a une règle pour effectuer les choix successifs des matrices (Σ) nécessaires pour construire un système Σ . Du point de vue des calculs effectifs, on peut, nous semble-t-il d'après notre expérience, les effectuer sans l'aide de machines à calculer seulement pour les toutes premières valeurs de p^2 . En effectuant les calculs dans le cas $p^2 = 9$, j'ai trouvé le résultat suivant :

Dans le cas $p = 3$, $t = 2$ $(q = 9)$ il y a dix systèmes possibles Σ de transformations linéaires homogènes régulières de l'espace vectoriel $V_{2,3}$, c'est-à-dire dix systèmes possibles Σ d'automorphismes du groupe abélien élémentaire d'ordre 9 :

1° 3 systèmes Σ donnant lieu au corps γ_9 ;

2°, 3°, 4° un système pour chacun des 3 quasicorps droits de Hall, H_1 , H_2 , H_3 d'ordre 9 (voir (2) ; dans le cas $q = 9$ il y a seulement 3 quasicorps de Hall distincts, associés aux trois équations irréductibles de 2^d degré en γ_3).

5° 4 systèmes Σ donnant lieu à quatre quasicorps droits, différents des précédents, mais isomorphes entre eux, et isomorphes au dernier quasicorps droit d'ordre 9 , H_4 , donné par M. HALL à la fin de son mémoire [5] .

Notre résultat confirme le résultat énoncé, sans démonstration, par M. HALL à la fin de [5] , c'est-à-dire :

Il y a quatre types de quasicorps droits propres $(\neq \gamma_9)$ non isomorphes d'ordre 9.

Observation. - Un changement de base en $V_{2,t}$ est une transformation linéaire homogène régulière :

$$K = (k_{i,j}) \quad ,$$

faisant passer des coordonnées x , y aux nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} x' = k_{11}\, x + k_{12}\, y \\ y' = k_{21}\, x + k_{22}\, y \end{cases} \quad , \qquad |K| \neq 0 \; .$$

Avec le changement de base (de coordonnées), K , on obtient, à partir d'un système Σ , un nouveau système : $\Sigma' = K \Sigma K^{-1}$, qui est encore un système d'automorphismes de $V_{2,t}$ contenant l'identité et simplement transitif sur les éléments non nuls de $V_{2,t}$. Σ et Σ' donnent lieu, évidemment, à deux quasicorps droits isomorphes entre eux (voir n° 1 , règle (M') , pour la définition de la multiplication). Dans notre exemple, c'est-à-dire dans le cas des systèmes Σ de $V_{2,3}$, on a $\Sigma = K \Sigma K^{-1}$ pour tout changement de base, pour les automorphismes Σ appartenant aux classes 2°, 3°, 4°, tandis qu'en opérant tous les changements de base possibles on obtient, à partir d'un Σ de la classe 1) (de la classe 5)), deux autres systèmes $\Sigma' \neq \Sigma$ (resp. trois), tels que $\Sigma' = K \Sigma K^{-1}$.

4. Quasicorps droits géométriquement isomorphes. Sous-plans d'un plan linéaire sur un quasicorps droit (plan de translation).

D'après des théorèmes bien connus, on peut associer à un quasicorps droit Q un "plan de translation" $\pi(Q)$, c'est-à-dire un plan projectif possédant toutes les homologies spéciales ayant pour axe la "droite à l'infini", ℓ_∞. $\pi(Q)$ est le plan linéaire à coordonnées dans Q, c'est-à-dire :

(a) les points de $\pi(Q) - \ell_\infty$ (plan "affine" sur Q) sont les couples ordonnés d'éléments de Q ;

(b) les droites de $\pi(Q) - \ell_\infty$ sont les ensembles de points satisfaisant à une équation : (α) $x = k$, ou (β) $y = mx + b$ $(k, m, b \in Q$. On passe de la façon usuelle du plan affine au plan projectif ; voir M. HALL [5], PICKERT [12], DUBREIL-LESIEUR-CROISOT [4].

Nous appellerons (avec G. F. PANELLA [11]) deux quasicorps droits Q, Q' isomorphes géométriquement si, et seulement si, les plans $\pi(Q)$, $\pi(Q')$ sont isomorphes. Tandis que l'isomorphisme algébrique (ordinaire) entre Q et Q' entraîne l'isomorphisme géométrique, il est possible que deux quasicorps droits qui ne sont pas isomorphes algébriquement soient isomorphes géométriquement.

J. ANDRÉ [2] a démontré que deux quasicorps droits associatifs sont isomorphes géométriquement si et seulement si ils le sont au sens ordinaire (algébrique).

G.F. PANELLA [11] a démontré, au contraire, que deux quasicorps droits de Hall, $Q(\gamma_p, r, s)$, $Q'(\gamma_p, r' s')$, ayant même ordre p^2, sont toujours isomorphes géométriquement ($Q(\gamma_p, r, s)$ est le quasicorps droit de Hall obtenu à partir de l'équation : $z^2 = rz + s$ irréductible sur γ_p ; si $(r, s) \neq (r', s')$, Q et Q' ne sont pas isomorphes au sens algébrique).

Le théorème que nous venons d'énoncer est un cas particulier d'un théorème plus général, dû aussi à PANELLA, et qui n'a pas encore été publié, par lequel :

Etant donné un corps F, possédant des polynômes irréductibles de degré 2^d et deux quasicorps de Hall sur F : $Q(F, r, s)$, $Q'(F, r', s')$, une condition suffisante pour que Q, Q' soient géométriquement isomorphes est que les deux polynômes irréductibles sur F : $z^2 - rz - s$, $z'^2 - r' z' - s'$, soient projectivement équivalents.

A notre opinion, il faudrait étudier les liens existants entre les théorèmes cités d'André et de Panella, qui donnent une réponse à la question de l'isomorphisme géométrique dans certains cas particuliers, et les théorèmes plus généraux de Skornjakov, donnant les relations algébriques qui existent entre les quasicorps associés aux différents répères (affines) d'un plan de translation donné.

Une autre question se pose : la détermination de tous les sous-plans d'un plan de translation donné. R. MAGARI [9] a résolu ce dernier problème dans le cas du plan "exceptionnel" d'André (voir n° 3 , 3), tandis que G.F. PANELLA [10] a démontré que, dans une certaine classe de plans de translations finis, est vérifiée la proposition configurationelle T_2' , introduite par LOMBARDO-RADICE [8] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDRÉ (Johannes). - Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe, Math. Z., t. 60, 1954, p. 156-186.

[2] ANDRÉ (Johannes). - Projektive Ebenen über Fastkörpern, Math. Z., t. 62, 1955, p. 137-160.

[3] DUBREIL (Paul). - Algèbre, I : Equivalences, opérations, groupes, anneaux, corps, 1re éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1946 (Cahiers scientifiques, n° 20).

[4] DUBREIL-JACOTIN (Mme M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, n° 21).

[5] HALL (Marshall). - Projective planes, Trans. Amer. math. Soc., t. 54, 1943, p. 229-277.

[6] LOMBARDO-RADICE (Lucio). - Piani grafici finiti a coordinate di Veblen-Wedderburn, Ricerche Mat. Napoli, t. 2, 1953, p. 266-273.

[7] LOMBARDO-RADICE (Lucio). - Sui piani microdesarguesiani affini, Atti della Acc. naz. Lincei, t. 15, 1953, p. 264-271.

[8] LOMBARDO-RADICE (Lucio). - Su alcuni caratteri dei piani grafici, Rend. Sem. mat. Univ. Padova, t. 24, 1955, p. 312-345.

[9] MAGARI (Roberto). - Le configurazioni parziali chiuse contenute nel piano, P , sul quasicorpo associativo di ordine 9, Boll. Unione mat. Ital., t. 13, 1958, p. 128-140.

[10] PANELLA (Gianfranco). - Lo S_4 lineare affine come piano sopra un quasicorpo, in relazione alla proposizione configurazionale T_2' , Rivista Mat. Univ. Parma, t. 8, 1957.

[11] PANELLA (Gianfranco). - Un insieme di piani di traslazione isomorfi, Reticoli e geometrie proiettive [Convegno internazionale, Palerme et Messine. 1957]. - Roma, Ed. Cremonese, 1958 ; p. 109-119.

[12] PICKERT (Gunter). - Projektive Ebenen. - Berlin, Springer, 1955 (die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ... , Band 80).

[13] SEGRE (Beniamino). - Lezioni di geometria moderna, I : Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi. - Bologna, Zanichelli, 1948.

[Une traduction en langue anglaise est en préparation ; dans cette nouvelle édition, il y aura un Appendice sur les Plans projectifs finis, par L. LOMBARDO-RADICE].

[14] ZASSENHAUSS (Hans). - Über endliche Fastkörper, Abhandl. math. Sem. Hamb-Univ., t. 11, 1936, p. 187-220.