Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

P. Lévy-Bruhl

Valuations centrées dans un domaine local. Transformés quadratiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1957-1958), exp. nº 19, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58

-:-:-:-

24 mars 1958

VALUATIONS CENTRÉES DANS UN DOMAINE LOCAL. TRANSFORMÉS QUADRATIQUES

par Mme LÉVY-BRUHL

L'introduction de la théorie algèbrique des valuations, dans l'étude des variétés algèbriques et absolues, est un aspect caractéristique de la géométrie algébrique moderne : elles sont utilisées, en particulier dans les problèmes relatifs à l'uniformisation locale et à la résolution des singularités des variétés de dimension inférieure ou égale à 3, sur un corps de base de caractéristique 0, par O. ZARISKI, de caractéristique quelconque, mais parfait, par ABHYANKAR. Les valuation interviennent en effet dans les fondements de la théorie arithmétique des transformations birationnelles et des correspondances algébriques, en particulier des transformations monoïdales quadratiques.

Si V_i et V_{i+1} sont deux variétés localement normales sur un même corps de définition k, si T est une transformation birationnelle sur k, sans points fondamentaux sur V_{i+1}, le lieu fondamental de T sur V_i est défini par un idéal F. Si F est premier, T est monoïdale ; si de plus F définit un point O_i de V_i, T est monoïdale quadratique (ou une dilatation). Supposons par exemple que V_i soit une surface non singulière en O_i, elle a en ce point des paramètres uniformisants x_i, y_i. Si O_{i+1} appartient à la courbe rationnelle non singulière $T(O_i)$ dont les points sont en correspondance $(1,1)$ avec les tangentes en O_i à V_i, V_{i+1} a en O_{i+1} pour paramètres uniformisants x_{i+1}, y_{i+1}, liés à x_i, y_i par

$$x_{i+1} = y \quad \text{et} \quad y_{i+1} = \frac{x_i}{y_i} - c_i \qquad c_i \in k$$

ou

$$x_{i+1} = x_i \quad \text{et} \quad y_{i+1} = \frac{y_i}{x_i} - c_i' \qquad c_i' \in k$$

(Ceci est une conception algébrique de la notion des points O_i, O_{i+1} infiniment voisins pour une surface V sans singularité).

L'usage des transformations monoïdales provient du fait que le centre W_i défini par l'idéal F est transformé en une hypersurface W_{i+1} de V_{i+1}, les points simples se transformant en points simples. Enfin elles peuvent simplifier un point singulier de V_i sur W_i, pourvu que ce point soit simple sur W_i.

A chaque point P d'une variété V est associé l'anneau local du point P $O_k(P , V)$, sous-anneau du corps des fonctions rationnelles sur V définies sur k. A chaque sous-variété W, lieu de P, est attaché l'anneau local $O_k(W , V)$, V est k-normale sur W si $O_k(W , V)$ est intégralement clos. W est simple sur V, si $O_k(W , V)$ est régulier, c'est-à-dire si l'idéal maximal $M_k(W , V)$ est engendré par un nombre d'éléments égal à sa dimension, qui est dim V-dim W. Si P et P' sont deux points correspondants respectivement sur V et V', dans une transformation T, T est régulière en P, si $O_k(P' , V') \subseteq O_k(P , V)$; T est birégulière en P et P', si $O_k(P , V) = O_k(P' , V')$. De ceci résulte que deux sous-variétés W et W' respectivement situées sur V et V', se correspondent par T si et seulement s'il existe une valuation du corps commun des fonctions rationnelles des modèles projectifs V et V', qui ait pour centres respectivement W et W' sur V et V'.

Nous nous proposons ici de donner quelques résultats établis récemment par S. ABHYANKAR, généralisant les notions algébriques introduites précédemment et conduisant à la définition du transformé quadratique d'un domaine local (anneau local qui est un domaine d'intégrité).

Un anneau local R d'idéal maximal M sera noté (R , M) ; il sera dit algébrique, s'il est anneau d'une sous-variété irréductible d'une variété algébrique ; il sera dit absolu, s'il est anneau quotient d'un domaine A, extension finie sur l'anneau Z des entiers rationnels, par un idéal premier de A. Soit v une valuation du corps des quotients K d'un anneau local R, ayant pour anneau de valuation R_v et pour idéal des non unités M_v, v a pour centre M dans R, si $R_v \supset R$ et $R \cap M_v = M$.

Lemmes préliminaires.

LEMME 1. - Si R est un domaine noethérien, avec corps des quotients K, et A un idéal propre dans R, il existe une valuation réelle, discrète v de K telle que $R_v \supset R$ et $M_v \supset A$ (place de K).

Soit $\{u_1 \ldots u_s\}$ une base de A et w une valuation de K de centre A dans R ; supposons $w(u_1) \leq w(u_i)$. Soit $S = R[\frac{u_2}{u_1} , \ldots , \frac{u_s}{u_1}]$. On a $AS = u_1 S$.

Puisque M_v contient A, $w(u_1) > 0$, et $u_1 S$ n'est pas l'idéal unité. Puisque S est noethérien, tous les idéaux premiers isolés de l'idéal principal $u_1 S$ sont minimaux ; soit p l'un d'eux. Soit $S' = S_p$ et soit $m = pS'$. S' est un domaine local, avec un seul idéal premier pS_p non nul. La clôture intégrale de S' dans K est l'intersection d'un nombre fini d'anneaux de valuations associés à des valuations discrètes réelles (c'est-à-dire de rang 1) de K. Soit v l'une d'elles, alors $R_v \supset S'$, et $M_v \supset m$. Donc $R_v \supset R$ et $M_v \supset A$.

LEMME 2. - Soit (R, M) un domaine local normal (c'est-à-dire intégralement clos dans son corps des quotients K). Soit $u \in K$ tel que $u \notin R$ et $u^{-1} \notin R$, il existe une valuation v réelle discrète de K, de centre M dans R, telle que $v(u) > 0$.

Soit $R' = R[u]$ et $M' = MR' = M[u]$. Montrons que $M' \neq R'$. Si $M' = R'$, il existe des éléments $a_0, \ldots, a_s$ dans M, tel que $1 = \sum_0^s a_i u^i$.

$a_0 - 1$ n'est pas dans M, et ainsi est une unité de R ; alors $b_i = \frac{a_i}{a_0 - 1} \in R$, $b_0 = 1$ et $\sum_{0,s} b_i (\frac{1}{u})^{s-i} = 0$ entraîne $\frac{1}{u} \in R$ puisque R est intégralement clos. Donc $M' \subset R'$; par le lemme 1, il existe une valuation réelle discrète de K, telle que $R_v \supset R'$ et $M_v \supset M'$, et ainsi $R_v \supset R$ et $R \cap M_v = M$, avec $v(u) > 0$.

LEMME 3. - Soit $R_1 \subset R_2 \ldots \subset R_i \subset$ une suite de domaines d'intégrités normaux, et quasi-locaux, avec même corps des quotients K (R_i contient un seul idéal maximal M_i), tel que $M_{i+1} \cap R_i = M_i$. Supposons que $\bigcup R_i$ ne soit pas l'anneau d'une valuation de K, alors il existe une infinité de valuations w de K ayant pour centre M_i dans R_i, et de R_i-dimension positive, pour tout indice i (c'est-à-dire que $\frac{R_w}{M_w}$ est de degré de trancendance posotif sur $\frac{R_i}{M_i}$).

Cas particulier. - Si (R_i, M_i) est une suite d'anneaux locaux normaux à deux dimensions, avec même corps des quotients K, si $k \in R_1 \subset R_2 \subset \ldots$ où k est un corps algébriquement clos, et où $k = \frac{R_i}{M_i}$ pour tout i ; si $\bigcup R_i$ n'est pas l'anneau d'une valuation de K, il existe une infinité de valuations w de K qui ont pour centre M_i dans R_i et qui sont des R_i-dimension 1, pour tout i.

Si, enfin les R_i sont les anneaux quotients sur des variétés algébriques V_i, on retrouve la suite de transformations quadratiques utilisée par ZARISKI.

DÉMONSTRATION du lemme 3. - D'après les hypothèses on a canoniquement $\frac{R_1}{M_1} \subset \frac{R_2}{M_2} \subset \dots$. Posons $R = \bigcup R_i$ et $M \in \bigcup M_i$; $D = \bigcup \frac{R_i}{M_i}$ est un corps et $D = \frac{R}{M}$. Puisque R n'est pas un anneau de valuation de K, il existe un élément x de K, tel que $x \notin R$ et $x^{-1} \notin R$; si h est l'homomorphisme de R sur D, comme R est normal, il existe un homomorphisme H de $R[x]$ sur $D[x]$ dans lequel $H(x) = X$, X étant une transcendante sur D. ($A\ a_i\ x^i$, $a_i \in R$, correspond par H $h(a_i)\ X^i$) [11]. Soit p un idéal premier de $D[X]$ et $P = H^{-1}(p)$. Par le lemme 2 il existe une valuation w de K ayant pour centre P dans $R[x]$. Puisque $\frac{R_w}{M_w}$ contient $D(x)$, w a les propriétés voulues. Comme il existe une infinité d'idéaux p, il existe une infinité de valuations w.

LEMME 4. - Soit (R, M) un domaine local normal, à deux dimensions avec corps des quotients K, et P un idéal premier minimal de R :

1° R_P est l'anneau d'une valuation réelle discrète w de K.

2° Il existe au moins une et au plus un nombre fini de valuations v de K, ayant pour centre M dans R et composées avec w (c'est-à-dire $R_v \subset R_w$)

3° Chacune de ces valuations v est discrète de rang 2, et de R-dimension zéro.

R normal est l'intersection de ses anneaux de valuation essentiels, c'est-à-dire des anneaux R_P, où P est idéal premier minimal. R_P est de dimension 1 ; donc les valuations sont réelles discrètes.

w a pour anneau de valuation R_P et pour idéal PR_P : w peut être composée avec une valuation du corps R_P/PR_P, c'est-à-dire du corps des quotients de R/P. R/P est aussi un anneau local de dimension 1 ([7] , p. 65) ainsi la clôture intégrale est l'intersection d'un nombre fini d'anneau de valuations réelles discrètes du corps $\overline{K}$ des quotients de R/P. Soient $v'_1, \dots, v'_n$ ces valuations. Les valuations v_i composées de w et de v'_i sont des valuations de K de rang 2 discrètes et ayant pour centre M dans R ($R_{v'_i} \supset R/P$. Donc $M_{v'_i} \supset M/P$ et $M_{v'_i} = M_v/PR_P$). Elles sont de R-dimension zéro d'après le théorème suivant de S. ABHYANKAR.

THÉORÈME. - Soit (R, M) un domaine local de dimension n, avec corps des quotients K et corps résiduel k ; soit v une valuation de K ayant pour centre M dans R ; soit d , r et ρ respectivement la R-dimension, le rang rationnel et le rang de v , alors $d + r \leq n$. Si $d + r = n$, v est somme directe entière et R_v/M_v a une base finie sur R/M . Si $d + \rho = n$, v est discrète et R_v/M_v a une base finie sur R/M . De plus si $d = n - 1$, v est réelle discrète [3] et R_v/M_v est extension algébrique finie de R/M .

COROLLAIRE. - Soit (R , M) un domaine local régulier à deux dimensions avec corps des quotients K , et x une non unité irréductible de R

1° R_{xR} est anneau d'une valuation réelle discrète de K

2° Il existe une infinité de valuations de K ayant pour centre M dans R de R-dimension 0 , et qui sont discrètes de rang 2 .

R étant un domaine local régulier de dimension 2 , R est un domaine à factorisation unique, c'est-à-dire que tout idéal premier minimal est principal ([5] , paragraphe 37 ou [10]) : donc $P = xR$ et le lemme précédent s'applique. Il suffit de montrer qu'il existe une infinité de non unités irréductibles x premières entre elles : soit x , y une base minimale de M, $P = xR$ et w la valuation réelle discrète de K avec $R_w = R_P$. R étant régulier, $R/P = \overline{R}$ est régulier de dimension 1 ([7] p. 73), et $\overline{R} = R_{v'}$, v' étant une valuation réelle discrète du corps $\overline{K}$, $v'(y') = 1$ si y' est la classe résiduelle de celle contenant y (modulo P). Posons $x_m = x + y^m$ (m entier positif) x_m , y est une base de M et x_m est une non unité irréductible ; $v(x_m) = (0 , v'(y^m)) = (0 , m)$. Donc $v(x_m) \neq v(x_n)$ pour $m \neq n$. Ainsi il existe une infinité de non unités irréductibles x_i premières entre elles par couples.

DÉFINITION. - Soit (R , M) et (S , N) des domaines locaux avec même corps des quotients K tels que S ait pour centre M dans R (S contient R et $N \cap R = M$) et tel qu'il existe un nombre fini d'éléments $u_1 \dots u_n$ dans S , et que $S = A_P$ où $A = R[u_1 , \dots , u_n]$ et $P = A \cap N$: S est dit transformé fini de R .

Propriétés :

1° Si R est noethérien, S est noethérien

2° Si R est algébrique sur un corps de base k (c'est-à-dire s'il existe des éléments $x_1 \dots x_n$ dans R tels que $R = A_P$ avec $A = k[x_1 , \dots , x_n]$ et $P = A \cap M$), S est algébrique sur le même corps k .

3° Si R est absolu, S est absolu.

4° Si T est un transformé fini de S , T est transformé fini de R .

Transformé quadratique.

DÉFINITION. - (R , M) est un domaine local régulier de dimension $s > 1$ ayant pour corps des quotients K et pour corps résiduel $k = R/M$. Soit $x_1 \dots x_s$ un système de paramètres de R et v une valuation de K ayant pour centre M dans R et telle que pour un certain ordre des x_i , $v(x_1) \leqslant v(x_i)$ pour tout i . Soit $A = R[x_{2}/x_1 \dots x_{s}/x_1]$, $P = A \cap M_v$, $S = A_P$ et $N = PS$. S est appelé premier transformé quadratique de R le long de v . S est un transformé fini de R car :

Propriété I. - (S , N) est un domaine local régulier de dimension $t \leqslant s$, v a pour centre N dans S et si d et d' sont les R-dimension et S-dimension respectives de v , alors $s - t = d - d'$.

Pour démontrer cette propriété, on utilise le lemme suivant :

LEMME préliminaire. - Avec les notations précédentes, posons $y_1 = x_1$, $y_i = \frac{x_i}{x_1}$ pour $i > 1$. Alors $y_1 A \cap R = M$ et k peut être canoniquement identifié à un sous corps de A/y_1A . Si $y'_2 , \dots , y'_s$ sont les résidus modulo $y_1 A$ de $y_2 , \dots , y_s$, ceux-ci sont algébriquement indépendants sur k , et $A/y_1 A$ peut être identifié à un anneau de polynômes $k[y'_2 , \dots , y'_s]$ de $s - 1$ variables indépendantes.

Si w est la valuation M-adique de K , $R_w \supset A$ et $w(y_1) > 0$. Donc $1 \notin y_1 A$. $y_1 A \cap R \neq R$ et comme $y_1 A \supset M$, $y_1 A \cap R = M$. D'où l'isomorphisme canonique de R/M **sur** $A/y_1 A$; de plus $R_w = A_{y_1A}$ car $y_1 A$ est idéal premier minimal de A , centre de w dans A .

Il reste à montrer que les classes résiduelles y'_i sont algébriquement indépendantes sur k . La démonstration se fait par l'absurde : s'il existe un polynôme $f(y_2 \dots y_s) = \sum f_{i_2 \dots i_s} y_2^{i_2} \dots y_s^{i_s}$ à coefficients dans R non tous dans M **,et tel que** $f \equiv 0 \pmod{y_1 A}$, alors $f = y_1 g(y_2 \dots y_s)$ où g est un polynôme à coefficients dans R ; en multipliant par une puissance convenable de $y_1 = x_1$, on obtient une forme F de degré t :

$$F(x_1 \dots , x_s) = x_1^{t+1} g(y_2 \dots y_s) = \sum f_{i_2 \dots i_s} x_1^{t-\sum i_j} x_2^{i_2} \dots x_s^{i_s}$$

Donc $w(F) \geqslant t+1$ et $F \in M^{t+1}$, donc F est d'ordre $t+1$ au moins, ce qui est impossible.

COROLLAIRE. - Si m est un idéal maximal contenant y_1 dans A, $S = A_m$ est un anneau local régulier de dimension s et y_1 fait partie d'une base minimale de $N = mS$.

Comme $m/y_1 A$ est un idéal de dimension 0 dans l'algèbre de polynômes à $s-1$ variables $k[y'_2, \ldots, y'_s]$, il a une base formée de $s-1$ éléments. Ainsi m et N ont des bases de s éléments, $m/y_1 A$ est de hauteur $s-1$. Donc N est de hauteur supérieure ou égale à s. Comme la dimension de S est égale à s, S est régulier.

S est déduit de R par une transformation localement quadratique. Si l'on obtient un anneau local régulier R_n par application de n transformations quadratiques successives, R_n est dit le n-ième transformé quadratique de R.

DÉMONSTRATION <u>de la propriété</u> I. - Comme il existe un idéal maximal, m $m \supset P \supset y_1 A$, $\dim A_m = s \geqslant \dim A_P = t$. m possède une base de s éléments dont l'un est x_1. Dans $A' = k(X_2, X_s)$, la hauteur de $m/y_1 A =$ hauteur $P/y_1 A + s - t$, P possède de une base de t éléments dont l'un est x_1. Donc A_P est régulier de dimension $t \leqslant s$. Puisque $N \cap R = M$, $R/M \subseteq S/N \subset R_v/M_v$; puisque le degré de transcendance de S/N (isomorphe à A'/P' si $P' = P/y_1 A$) sur R/M est $s - 1 - (t-1) = s - t = R\text{-}\dim(v) - S\text{-}\dim(v) = d - d'$.

DÉFINITION. - Posons $R_0 = R$, $R_1 = S$. Puisque $\dim S \leqslant \dim R$, supposons que l'on puisse itérer l'opération et que $\dim R_i > 1$ pour $i = 1, \ldots, n-1$; alors R_n est défini et appelé le n-ième transformé quadratique de R (le long de v).

<u>Propriété</u> II. - Si (R, M) est un domaine local régulier à n dimensions $(n > 1)$ avec corps des quotients K, et si v est une valuation de K ayant pour centre M dans R, telle que R_v/M_v soit de degré de transcendance $n-1$ sur R/M la suite quadratique le long de v issue de R est nécessairement finie, c'est-à-dire que si R_i est le i-ième transformé quadratique de R le long de v tel que $\dim R_{i-1} > 1$, alors il existe un entier h tel que R_h est de dimension 1 : $R_h = R_v$ et il existe un corps T tel que $R/M \subseteq T \subseteq R_v/M_v$, T étant à base finie sur R/M et R_v/M_v étant une extension transcendance pure de T.

La démonstration se fait par l'absurde. Supposons la suite $R = R_o \subset R_1 \dots$ infinie. D'après la propriété I, il existe un entier t tel que $\dim R_t = \dim R_{t'}$ où $t' > t$ et $R_{t'} - \dim v = m - 1$ et $R_{t'+1}/M_{t'+1}$ est extension algébrique de $R_{t'}/M_{t'}$. Soit $S = \overset{\infty}{\bigcup} R_i$ et $N = \overset{\infty}{\bigcup} M_i$, comme dans la preuve du lemme 3, S est un anneau local d'idéal maximal N et de corps des restes $\overset{\infty}{\bigcup} R_i/M_i$. S/N est donc extension algébrique de $R_{t'}/M_{t'}$. v a pour centre M_i dans R_i pour tout i, et par suite v est réelle discrète d'après le théorème d'ABHYANKAR.

Supposons que S ne soit pas un anneau de valuation de K, alors il existe un élément x de K tel que $x \notin S$ et $\frac{1}{x} \notin S$. Donc $x \notin R$ et $\frac{1}{x} \notin R$. Alors $x = \frac{y}{z}$ avec $y \in M$, et $z \in M$. Donc $v(y) > 0$ et $v(z) > 0$. Si $x_1 \dots x_n$ est un système de paramètres de R tel que $v(x_1) \leq v(x_i)$, $\frac{x_i}{x_1} \in R_1$ pour $i = 1, \dots, n$.

$$y_1 = \frac{y}{x_1} \in R_1 \qquad z_1 = \frac{z}{x_1} \in R_1 \quad \text{avec} \quad v(y) > v(y_1) , \quad v(z) > v(z_1) \text{ et } x = \frac{y_1}{z_1} \;;$$

en itérant on détermine y_i et z_i dans M_i avec $x = \frac{y_i}{z_i}$ et

$$v(y) > v(y_1) > \dots > v(y_i) \dots > 0$$
$$v(z) > v(z_1) > \dots > v(z_1) \dots > 0$$

ce qui est impossible puisque v est discrète.

Ainsi S est anneau d'une valuation w de K. Puisque R_t a un transformé quadratique : $\dim R_t > 1$, c'est-à-dire $m > 1$: v a une $R_{t'}$-dimension positive pour $t' > t$. Or

$$R_v \supset R_w = S \text{ et } R_w \cap M_v = S \cap M_v = (\overset{\infty}{\bigcup} R_i) \cap M_v = \overset{\infty}{\bigcup} (R_i \cap M_v) = \overset{\infty}{\bigcup} M_i = N = M_w$$

Donc $v = w$ et par suite $R_v/M_v = S/N$ est extension algébrique de R_t/M_t, ce qui contredit $R_t' - \dim v = m - 1 > 0$. Donc la suite est finie : soit R_h le dernier transformé quadratique ; $\dim R_h = 1$; c'est donc l'anneau d'une valuation réelle discrète de K ; puisque $R_h \subseteq R_v$, $R_h = R_v$.

Soit $T = R_{h-1}/M_{h-1}$ et d la dimension de R_{h-1}, $d > 1$; soit $x_1 \dots x_d$ une base minimale de M_{h-1} telle que $v(x_1) \leq v(x_i)$. Par définition et par le lemme préliminaire, si $A = R_{h-1}[x_{2/x_1} \dots x_{d/x_1}]$, $A/x_1 A$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $A' = T[y'_2 \dots y'_d]$; si $P = A \cap M_h$, $P' = P/x_1 A$ hauteur de $P' = \dim R_h - 1 = 0$. Donc $P' = (0)$. Puisque $R_v/M_v = R_h/M_h$ est isomorphe à A'/P' c'est-à-dire à l'anneau de polynôme sur T , R_v/M_v est extension transcendante pure de T de degré $d-1$ positif. Comme R_{h-1} est transformé fini de R , R_v/M_v a une base finie sur R/M . Donc T a une base finie sur R/M .

COROLLAIRE. - Si V est une variété algèbrique à r dimensions, ayant pour corps de fonctions K sur k , si v est un diviseur premier de K sur k , et si W est le centre de v sur V (un diviseur premier est une valuation ayant pour V-dimension $r-1$). Soit s la dimension de W . Supposons que v est de deuxième espèce sur V $(s < r-1)$ et que W est simple sur V . Si V' est un autre modèle projectif de K sur k tel que v soit de première espèce pour V' , que V' soit normale sur le centre W' de v sur V' et si L désigne le corps des fonctions de W' , alors :

1° W' est une variété réglée c'est-à-dire il existe un corps T tel que $k \subset T \subset L$ et tel que L soit une extension transcendante pure de T de degré de transcendance positif.

2° Si $r = 2$, il existe un corps T qui est une extension algébrique de k , tel que $k \subset T \subset L$ et que L soit une extension pure sur T de degré 1 .

3° Si $r = 2$ et si k est algébriquement clos, alors L est une extension transcendance pure de degré 1 sur k c'est-à-dire W' est une courbe rationnelle.

En effet 1 se déduit de la propriété II dans laquelle on prend pour (R, M) l'anneau de W sur V , et $L = R_v/M_v$; 2° se déduit de 1° et 3° de 2° .

LEMME 5. - Soit $R_0 \subset R_1 \subset \dots$ une suite strictement croissante d'anneaux locaux réguliers à deux dimensions avec un même corps des quotients K ; soit M_i l'idéal maximal de R_i et $S = \bigcup_0^{\infty} R_i$. On suppose que R_{i+1} est transformé quadratique de R_i pour $i = 0, 1, 2, \dots$

1° S est anneau d'une valuation v' de K ayant pour centre M_i dans R_i et pour R_i-dimension 0 pour chaque i .

2° Si v est une valuation de K ayant pour centre M_i dans R_i pour tout i , alors $v = v'$.

On peut supposer R_{i+1} premier transformé quadratique de R_i ce qui ne change pas S . Si S n'est pas un anneau de valuation, d'après le lemme 3 il existe une valuation w de K ayant pour centre M_i dans R_i et ayant une

R_i - dimension positive pour chaque i . Par le théorème sur les valuations, w est diviseur premier de R_0 et ainsi par la propriété II, la suite serait finie. Donc $S = R_{v'}$, v' étant une valuation de K ; alors $M_{v'} = \overset{\infty}{\bigcup} M_i$, d'après la démonstration du lemme 3 ;

$$R_i \cap M_{v'} = R_i \cap (\bigcup_j^{\infty} M_j) = \bigcup^{\infty}(R_i \cap M_j) = M_i$$

v' a pour centre M_i dans chaque R_i et a une R_i - dimension nulle par la démonstration de la propriété II.

Si v est une autre valuation de K ayant pour centre M_i dans R_i , alors

$$R_v \supset R_{v'} = \overset{\infty}{\bigcup} R_i$$

et

$$M_v \cap R_{v'} = M_v \cap (\bigcup_i^{\infty} R_i) = \bigcup_i^{\infty} (M_v \cap R_i) = \bigcup_i^{\infty} M_i = M_{v'}$$

et par suite $v = v'$.

Les théorèmes suivants sont ceux de l'uniformisation dans les domaines locaux réguliers à deux dimensions. Leur contenu géométrique est le suivant : les singularités d'une courbe située sur une surface algébrique ou absolue non singulière peuvent être résolues par transformations quadratiques appliquées à la surface.

<u>Propriété</u> III. - Soit (R , M) un anneau local régulier algébrique ou absolu à deux dimensions, K le corps des quotients de R , P un idéal premier minimal de R et w la valuation de K , telle que $R_w = R_P$; soit v une valuation de K composée avec w et ayant pour centre M dans R ; soit (R_n , M_n) le n-ième transformé quadratique de R le long de v ; $P_i = R_i \cap M_w$; alors P_i est un idéal premier minimal dans R_i pour tout i , et il existe un entier n tel que pour $i \geqslant n$, on peut choisir une base $x_i\, y_i$ de M_i pour laquelle $x_i R_i = P_i$, $v(y_i) = (0 , 1)$, et $v(x_i) = (1 , a)$ où a est un entier. Ce théorème généralise un théorème de M. Zariski [11] .

Puisque $M_i \cap R = M$ et $P_i \cap R = R \cap M_w = P$, et puisque R_i est à deux dimensions, P_i doit être un idéal premier minimal dans R_i . Soit (x , y) une base de M telle que $v(x) \leq v(y)$, alors $w(x) \leq w(y)$; de plus x n'appartient pas à P sinon on aurait $w(x) > 0$ et $w(y) > 0$, ce qui entraînerait $M = P$.

Soit $R^{\times} = R[y/x]$, $M^{\times} = R^{\times} \cap M_v$, $P^{\times} = R^{\times} \cap M_w$ $\overline{R} = R/P$ $\overline{M} = M/P$ $\overline{R}^{\times} = R^{\times}/P^{\times}$; $\overline{M}^{\times} = M^{\times}/P^{\times}$; $\overline{R}_i = R_i/P_i$ $\overline{M}_i = M_i/P_i$ et $\overline{K} = R_w/M_w$; soit $\overline{v}$ la valuation de $\overline{K}$ induite par v ; soient $\overline{x}$, $\overline{y}$ les classes résiduelles modulo M_w de x et de y ; $(\overline{R}_i , \overline{M}_i)$ est un domaine local à une dimension ayant pour corps des quotients $\overline{K}$; la valuation réelle discrète $\overline{v}$ de $\overline{K}$ a pour centre $\overline{M}_i$ dans $\overline{R}_i$ et $\overline{R} = \overline{R}_o \subset \overline{R}_1 \ldots$; donc $R_1 = R^{\times}_{M^{\times}}$, $M_1 = M^{\times}.R_1$ et $0 \neq \overline{x} \subset \overline{R}$.

$$(\overline{x} , \overline{y})\, \overline{R} = \overline{M} \; ; \; \overline{R}^{\times} = \overline{R}\,[\frac{\overline{y}}{\overline{x}}] \; , \; \overline{M}^{\times} = \overline{R}^{\times} \cap M_{\overline{v}} \quad \text{et} \quad \overline{R}_1 = \overline{R}^{\times}_{\overline{M}^{\times}} \; .$$

Ainsi $\overline{MR^{\times}} = \overline{xR^{\times}}$ et $\overline{M}\,\overline{R}_1 = \overline{x}_1 \; \overline{R}_1$; de même

$$\overline{M}_i \, \overline{R}_{i+1} = z_{i+1} \, \overline{R}_{i+1}$$

avec $z_{i+1} \in \overline{R}_{i+1}$ pour tout i .

On montre que $\bigcup^{\infty} \overline{R}_i = R_{\overline{v}}$: si $c \in R_{\overline{v}}$, $c = \frac{a}{b}$, a et $b \in \overline{R}$, $b \neq 0$. Si $b \notin \overline{M}$, alors $c \in \overline{R}$. Si $b \in \overline{M}$, puisque $\overline{v}(a) \geqslant \overline{v}(b)$, $a \in \overline{M}$. Ainsi $b = b_1 z_1$ et $a = a_1 z_1$, avec a_1 et b_1 dans $\overline{R}_1$. $c = \frac{a_1}{b_1}$, soit $c \in \overline{R}_1$ ou soit a_1 et b_1 dans $\overline{M}_1 \ldots$ Finalement si c n'appartient pas à $\overline{R}_{n-1}$, alors $a = a_n z_1 \ldots z_n$ et $b = b_n z_1 \ldots z_n$, avec a_n et b_n dans $\overline{R}_n$. Puisque $\overline{M}_{n-1} = \overline{R}_{n-1} \cap M_{\overline{v}}$, nous devons avoir $\overline{v}(z_n) > 0$, dont $\overline{v}(b) \geqslant n$. On trouve Z comme groupe des valeurs de $\overline{v}$. Puisque $\overline{v}$ est réelle discrète et que b est différent de 0 pour un certain n , nous aurons $c \in \overline{R}_n$: ainsi $\bigcup^{\infty} \overline{R}_i = R_{\overline{v}}$. Soit S_i la clôture intégrale de $\overline{R}_i$ dans $\overline{K}$; S_i est un domaine de Dedekind avec un nombre fini d'idéaux premiers, et puisque l'anneau quotient de S_i par rapport à un idéal premier est un anneau de valuation réelle discrète, nous avons $S_i = \bigcap_u R_u$ pour $u \in W_i$, où W_i est l'ensemble fini des valuations réelles discrètes de $\overline{K}$, qui ont pour centre $\overline{M}_i$ dans $\overline{R}_i$; de plus $W_i \supset W_{i+1}$. Soit $u_1 \ldots u_h$ les valuations de W_o différentes de $\overline{v}$. Puisque $R_{\overline{v}}$ est un sous-anneau maximal de $\overline{K}$, il existe $a_i \subset R_{\overline{v}}$ tel que $a_i \notin R_{u_i}$; puisque $\bigcup \overline{R}_j = R_{\overline{v}}$, il existe un entier m_i tel que $a_i \in \overline{R}_{m_i}$. Soit $m = \max \; (m_1 , m_h)$ alors $a_i \in \overline{R}_m$ pour $i = 1 , 2 , \ldots , h$. De plus $W_m = \{ \overline{v} \}$ c'est-à-dire $R_{\overline{v}}$ est la clôture intégrale de $\overline{R}_m$. D'après un lemme d'Abhyankar $R_{\overline{v}}$ est un module fini sur $\overline{R}_m$. Ainsi par le théorème de la base de Hilbert, on peut trouver un n tel que $\overline{R}_i = R_{\overline{v}}$ pour $i \geqslant n$. Supposons $i \geqslant n$ et prenons $\overline{y}_i$ dans $\overline{R}_i$ tel que $\overline{v}(\overline{y}_i) = 1$; soit y_i l'élément de R_i appartenant à la classe résiduelle $\overline{y}_i$, alors $v(y_i) = (0\ ,\ 1)$. D'après le lemme 4, P_i est un idéal principal. $P_i = x_i\, R_i$. Puisque $R_{i_{P_i}} = R_w$, $v(x_i) = (1\ ,\ a)$. Soit $z \in M_i$, $\overline{z}$ son résidu mod P_i ; $\overline{z} \in \overline{M}_i$ et ainsi $\overline{z} = \overline{y}_i\, \overline{t}$ avec $\overline{t} \in \overline{R}_i$; si t appartient à la classe résiduelle de $\overline{t}$, dans R_i, alors $z - y_i\, t \in P_i$, c'est-à-dire $z \in (x_i\ ,\ y_i)\, R_i$, ce qui entraîne $(x_i\ ,\ y_i)R_i = M_i$.

THÉORÈME. - Soit $(R\ ,\ M)$ un domaine local régulier à deux dimensions avec corps des quotients K ; soit v une valuation de K ayant pour centre M dans R et de R-dimension nulle ; soit f un élément donné non nul de R, alors il existe un transformé quadratique $(R^\times\ ,\ M^\times)$ de R le long de v et une base $(x^\times\ ,\ y^\times)$ de $M^\times$ tel que $f = x^{\times a}\, y^{\times b}\, d$; a, b étant des entiers non négatifs, d une unité dans $R^\times$ et tels que les conditions suivantes sont satisfaites :

A. Si v est réelle, de rang rationnel 1, alors $b = 0$.

B. Si v est réelle de rang rationnel 2, alors ou $b = 0$, ou $v(x^\times)$ et $v(y^\times)$ forment une base entière pour le groupe des valeurs de v.

C. Si v est de rang 2, et si R est l'anneau des quotients d'un point sur une surface algébrique ou absolue, alors $v(x^\times) = (1\ ,\ h)$ et $v(y^\times) = (0\ ,\ 1)$ où les v valeurs des éléments de K peuvent être écrites comme paires d'entiers ordonnés lexicographiquement, et où h est un entier convenable.

1° v est réelle : on pose $R = R_0$; $M = M_0$; $(x_0\ ,\ y_0)$ une base de M_0 et soit $(R_i\ ,\ M_i)$ le i-ième transformé quadratique de R_0 le long de v. On définit par induction sur i les couples d'éléments $(x_i\ ,\ y_i)$ de R_i ; supposons $v(y_i) \geqslant v(x_{i-1})$ soit $S_i = R_{i-1}\left[\frac{y_{i-1}}{x_{i-1}}\right]$ et $N_i = M_{i-1} \cap S_i$; $P_i = M_v \cap S_i$. Soit z_i la classe résiduelle (mod N_i) contenant $\frac{y_{i-1}}{x_{i-1}}$. D'après le lemme préliminaire de la propriété II, $\frac{S_i}{N_i} = \frac{R_{i-1}}{M_{i-1}}[z_i]$, où z_i est transcendant sur R_{i-1}/M_{i-1}. Puisque P_i est un idéal maximal dans S_i, contenant N_i, P_i/N_i est un idéal maximal dans S_i/N_i, et $P_i/N_i = g_i(z_i)\, S_i/N_i$, où $g_i(X)$ est un polynôme irréductible dans $R_{i-1}/M_{i-1}[X]$. Soit $G_i(X)$ le polynôme irréductible dans $R_{i-1}[X]$ qui a pour résidu $g_i(X)$: nous posons $x_i = x_{i-1}$ et $y_i = \frac{g_i(y_{i-1})}{x_{i-1}}$. Si $v(y_{i-1}) < v(x_{i-1})$ nous posons $x_i = y_{i-1}$ et $y_i = \frac{x_{i-1}}{y_{i-1}}$, et par le corollaire du lemme préliminaire $(x_i\ ,\ y_i)\ R_i = M_i$.

Soit $f = f_0$ l'élément donné, on définit par induction sur i un élément f_i dans R_i par l'équation $f_{i-1} = x_i^{u_i} f_i$ où u_i est un entier non négatif et f_i un élément de R_i premier avec x_i , car R_i est un domaine à factorisation unique (lemme 4 , corollaire). Soit $f_{i,1} \dots f_{i,h_i}$ les facteurs irréductibles f_i dans R_i et soit $w_{i,j}$ la valuation de K dont l'anneau de valuation est l'anneau quotient de R_i par rapport à $f_{ij}.R_i$. Soit W_i l'ensemble des valuations u de K telles que u ait pour centre M_i dans R_i et qu'elle soit composée avec w_{ij} pour un certain j . Par le lemme 4 , W_i est un ensemble fini. Etant donné u dans W_i , soit $P_i = M_u \cap R_{i-1}$, $P_i \neq 0$, car u est non triviale. Puisque $x_i \notin M_u \cap R_i$, et puisque $x_i\ R_i = M_{i-1}.R_i$, $P_i \neq M_{i-1}$ et P_i est un idéal premier minimal dans R_{i-1} . Puisque R_{i-1} est un domaine à factorisation unique et que $f_{i-1} \in P_i$, alors $P_i = f_{i-1,j}.R_{i-1}$ pour un certain j , c'est-à-dire $u \in W_{i-1}$ et $W_i \subset W_{i-1}$. Puisque, par le lemme 5 , $\bigcup^{\infty} R_i = R_v$ et puisque v est réelle, et qu'aucun élément de W_i n'est réel, $\bigcap W_i$ est vide. Puisque W_i est un ensemble fini, il existe un indice m tel que W_m soit vide, c'est-à-dire que f_m soit une unité dans R_m : ainsi $f = x_m{}^A y_m{}^B D$, où A et B sont des entiers non négatifs et D une unité dans R_m .

Si v est de rang rationnel 1 ou 2 , et si $v(x_m)$ et $v(y_m)$ sont rationnellement dépendants, alors $\dfrac{v(y_m)}{v(x_m)} = \dfrac{h_0}{h_1}$ où h_0 et h_1 sont des entiers premiers entre eux. Par induction, on définit des couples d'entiers g_i , h_{i+1} par l'équation $h_{i-1} = g_i\ h_i + h_{i+1}$ où $g_i \geqslant 0$, et $0 < h_{i+1} < h_i$. Puisque h_0 et h_1 sont premiers entre eux, il existe un entier n tel que $h_n = 1$. Soit $g = \sum_1^n{}' g_i$ alors $x_m = (x_{m+g})^e D_1$ et $y_m = (x_{m+g})^f\ D_2$ où e et f sont des entiers positifs, D_1 et D_2 des unités dans R_{m+g} . Ainsi $f = x_{m+g}^f\ d$ où $a = eA + fB$, et $d = D_1\ D_2\ D$. Si v est de rang rationnel 2 et si $v(x_m)$ est $v(y_m)$ sont rationnellement indépendants, R est R_m et $x^\times = x_m$, $y^\times = y_m$. Il reste à voir en appelant dans tous les cas $x^\times = x_m$ et $y^\times = y_m$ rationnellement indépendants que $v(x_m) = p$, et $v(y_m) = q$ forment une base entière pour le groupe des valeurs de v , et supposons $p < q$. Fixons un système k représentatif dans R_m de R_m/M_m (k n'est pas un corps en général). Soit $z \neq 0$ un élément de R_m tel que $v(z) = r$; soit n un entier tel que $r < np$ alors il existe un polynôme $H(X , Y) = \sum_{i+j \leq n} H_{ij} X^i Y^j$ de degré au plus n, à coefficients H_{ij} dans k tel que $z_m = z - H(x_m , y_m) \in M_m^n$. Puisque $v(u) > r$, pour un $u \in M_m^n$, nous devons avoir $v(z_m) > r$ et $r = v(z) = v(H(x_m , y_m))$. Puisque p et q sont rationnellement indépendants, et que $v(H_{ij}) = 0$ pour $H_{ij} \neq 0$, nous pouvons trouver $H_{st} \neq 0$ tel que $v(H_{st}\, x_m^s\, y_m^t) \leq v(H_{ij}\, x_n^i\, y_m^j)$, où $H_{ij} \neq 0$ $i \neq s$, $j \neq t$. Ainsi $r = v(z) = v(H_{st}\, x^s\, y^t) = sp + tq$.

Pour prouver C nous supposons que v est de rang 2, que R est l'anneau quotient d'un point sur une surface algébrique ou absolue, et que les valeurs des éléments de K sont écrites sous forme de couples d'entiers lexicographiquement. Par la propriété III, nous pouvons trouver un transformé quadratique $(\overline{R} , \overline{M})$ de R le long de v et une base $(\overline{x} , \overline{y})$ de $\overline{M}$ telle que $v(\overline{x}) = (1 , p)$ et $v(\overline{y}) = (0 , 1)$, où p est un entier. Soit $(\overline{R}_i , \overline{M}_i)$ le i-ième transformé quadratique de $\overline{R}$ le long de v. Soit $\overline{x}_i = \frac{\overline{x}}{\overline{y}_i}$ et $\overline{y}_i = \overline{y}$. Puisque pour un certain entier i, $v(\overline{x}) > i\, v(\overline{y})$, alors $(\overline{x}_i , \overline{y}_i)\, \overline{R}_i = \overline{M}_i$. Soit $f = \overline{x}^a\, g_o$ où a est un entier non négatif et et $g_o \in \overline{R}$ et premier avec $\overline{x}$. Alors $v(g_o) = (0 , t)$ où t est un entier non négatif. Comme précédemment, on définit par induction g_i par l'équation $g_{i-1} = \overline{y}_i^{\,e_i}\, g_i$ où e_i est un entier non négatif, et g_i un élément de $\overline{R}_i$ premier avec $\overline{y}_i$. Puisque $\overline{M}_{i-1}\, \overline{R}_i = \overline{y}_i\, \overline{R}_i$, $e_i > 0$ et g_{i-1} est une non unité de $\overline{R}_{i-1}$, donc de R_{i-1} pour $i = 1 , 2 , \ldots , n$. Ainsi $v(g_o) \geq (0 , n)$. Ainsi pour un certain entier m, $m \leq t$, g_m doit être une unité dans $\overline{R}_m$ et $f = (x^{\times a}\, y^{\times b}\, d)$ où b est un entier non négatif, d une unité dans $R^{\times} = \overline{R}_m$, $x^{\times} = \overline{x}_m$ et $y^{\times} = \overline{y}_m$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABHYANKAR (S.) and ZARISKI (O.). - Splitting of valuations in extensions of local domains, Proc. nat. Acad. of Sc., t. 41, 1955, p. 84-90.

[2] ABHYANKAR (Shreeram). - Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 491-526.

[3] ABHYANKAR (Shreeram). - On the valuations centered in a local domain, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 321-348.

[4] COHEN (I. S.). - On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 54-106.

[5] KRULL (W.). - Ideal theorie. - Berlin, Springer, 1935 (Ergebnisse der Mathematik ... , Band 4, Heft 3).

[6] MACLANE (S.) and SCHILLING (O.F.G.). - Zero-dimensional branches of rank one on algebraic varieties, Annals of Math., t. 40, 1939, p. 507-520.

[7] NORTHCOTT (D. G.). - Ideal theory. - Cambridge, University Press, 1953.

[8] ZARISKI (Oscar). - Foundations of a general theory of birational correspondences, Trans. Amer. math. Soc., t. 53, 1943, p. 490-542.

[9] ZARISKI (Oscar). - Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties, Annals of Math., Series 2, t. 45, 1944, p. 472-542.

[10] ZARISKI (Oscar). - The concept of a simple point of an abstract algebraic variety, Trans. Amer. math. Soc., t. 62, 1947, p. 1-52.

[11] ZARISKI (Oscar). - Applicazioni geometriche della teoria delle valutazioni, Rend. di Matematica di Roma, Serie 5, t. 13, 1955, p. 51-87.