

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

HUBERT DELANGE

Sur certaines fonctions arithmétiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 2 (1957-1958), exp. n° 16,
p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A3_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
 M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
 (ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
 Année 1957/58

3 mars 1958

-:-:-:-

SUR CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Hubert DELANGE

Par "fonction arithmétique" nous entendons simplement une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels.

E étant un ensemble donné de nombres premiers, nous lui associons les deux fonctions arithmétiques ω_E et Ω_E définies de la façon suivante :

$\omega_E(n)$ est le nombre des diviseurs premiers de n qui appartiennent à E , et $\Omega_E(n)$ est le nombre total des facteurs qui appartiennent à E dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Autrement dit, on a $\omega_E(n) = \Omega_E(n) = 0$ si $n = 1$ ou si n n'est divisible par aucun nombre de E , tandis que, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} m$, avec p_1, p_2, \dots, p_k appartenant à E et tous différents, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k > 0$ et m divisible par aucun nombre de E ,

$$\omega_E(n) = k \text{ et } \Omega_E(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k .$$

Un cas particulier simple, et important, est celui où E est l'ensemble de tous les nombres premiers : $\omega_E(n)$ est alors le nombre des diviseurs premiers de n et $\Omega_E(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers. Dans ce cas, nous écrirons simplement $\omega(n)$ et $\Omega(n)$.

Les résultats que nous avons en vue sont des types suivants :

1° Soit f l'une des fonctions ω_E et Ω_E correspondant à un ensemble E satisfaisant à une certaine hypothèse (H) .

Alors, pour tout entier $q > 1$, les q différentes valeurs possibles a priori pour le reste de la division de $f(n)$ par q , à savoir $0, 1, 2, \dots, q-1$, apparaissent avec la même fréquence.

De façon précise, quel que soit l'entier r , l'ensemble des entiers positifs n tels que $f(n) \equiv r \pmod{q}$ possède une densité égale à $\frac{1}{q}$. (Autrement dit,

le nombre de ces entiers au plus égaux à x est équivalent pour x infini à $\frac{x}{q}$ ⁽¹⁾.

Par ailleurs, pour tout nombre irrationnel λ , les nombres $\lambda f(n)$ sont répartis uniformément modulo 1. Autrement dit, $\{X\}$ désignant l'excès de X sur le plus grand entier qui lui est au plus égal, l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$\{\lambda f(n)\} \leq t, \quad \text{où } 0 \leq t \leq 1,$$

possède une densité égale à t . Ou encore, l'ensemble des n tels que le point $\exp [2\pi i \lambda f(n)]$ appartienne à un arc donné, de longueur φ , de la circonférence $|\zeta| = 1$, possède une densité égale à $\frac{\varphi}{2\pi}$.

Les mêmes faits, à savoir apparition avec la même fréquence des différentes valeurs possibles a priori pour le reste de la division de $f(n)$ par q et distribution uniforme modulo 1 de $\lambda f(n)$ pour λ irrationnel, se produisent encore lorsque l'on ne donne à n que les valeurs "quadratifrei" :

L'ensemble des entiers positifs "quadratifrei" tels que $f(n) \equiv r \pmod{q}$ possède une densité égale à $\frac{1}{q} \cdot \frac{6}{\pi^2}$ ⁽²⁾, et l'ensemble des entiers positifs "quadratifrei" tels que

$$\{\lambda f(n)\} \leq t, \quad \text{où } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } \lambda \text{ est irrationnel,}$$

possède une densité égale à $t \frac{6}{\pi^2}$.

2° Soient f l'une des fonctions ω_{E_1} et Ω_{E_1} et g l'une des fonctions ω_{E_2} et Ω_{E_2} , E_1 et E_2 étant deux ensembles sans élément commun et satisfaisant l'un et l'autre à l'hypothèse (H).

Alors, quels que soient les entiers q et $q' > 1$, les qq' systèmes de valeurs possibles a priori pour le reste de la division de $f(n)$ par q et le reste de la division de $g(n)$ par q' apparaissent avec la même fréquence. Autrement dit, q et q' étant deux entiers > 1 et r et r' deux entiers quelconques, l'ensemble des n tels que

$$f(n) \equiv r \pmod{q} \text{ et } g(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

⁽¹⁾ Le cas particulier correspondant à $f(n) = \Omega(n)$ et $q = 2$ se trouve déjà dans LANDAU [1], p. 621. Le cas de $f(n) = \omega(n)$ et q quelconque a été établi en 1940 par S.S. PILLAI [2].

⁽²⁾ Le cas particulier de ce résultat correspondant à $f(n) = \omega(n)$ et $q = 2$ se trouve dans LANDAU [1] p. 606. Le cas de $f(n) = \Omega(n)$ et q quelconque a été établi par S. SELBERG [3], puis à nouveau par S.S. PILLAI [2].

possède une densité égale à $\frac{1}{qq'}$.

Par ailleurs, quels que soient λ et μ irrationnels, les points de coordonnées

$$\xi_n = \{\lambda f(n)\} \quad \text{et} \quad \eta_n = \{\mu g(n)\}$$

se répartissent uniformément dans le carré $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$. C'est-à-dire que l'ensemble des n tels que

$$\{\lambda f(n)\} \leq t \quad \text{et} \quad \{\mu g(n)\} \leq t', \quad \text{où } 0 \leq t \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq t' \leq 1,$$

possède une densité égale à tt' .

On a des résultats semblables si l'on ne donne à n que les valeurs "quadratifrei".

3° Supposons maintenant que f et g soient les fonctions ω_E et Ω_E correspondant à un même ensemble E satisfaisant à l'hypothèse (H).

Alors on a les mêmes résultats que ci-dessus, à l'exception de ce qui concerne les n "quadratifrei", à condition de supposer q et q' premiers entre eux ou λ et μ tels que l'équation $\lambda X + \mu Y = Z$ n'ait aucune autre solution en entiers rationnels que $X = Y = Z = 0$.

Les résultats indiqués au paragraphe 1 sont établis si l'on montre que, f étant l'une des fonctions ω_E et Ω_E , où E satisfait à l'hypothèse (H), pour $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, on a, quand x tend vers $+\infty$

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} z^{f(n)} = o[x]$$

et, Q désignant l'ensemble des entiers positifs "quadratifrei",

$$(2) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} z^{f(n)} = o[x].$$

En effet, q étant un entier > 1 et r un entier quelconque, posons $\chi = e^{2\pi i/q}$.

En faisant dans (1) $z = \chi^j$ et multipliant par χ^{-jr} , on voit que, pour $j = 1, 2, \dots, q-1$,

$$\sum_{n \leq x} \chi^{j[f(n)-r]} = o[x].$$

En ajoutant à ces relations la relation évidente

$$(3) \quad \sum_{n \leq x} 1 = x + o[x],$$

on obtient

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ f(n) \equiv r \pmod{q}}} 1 = \frac{x}{q} + o\left[\frac{x}{q}\right],$$

d'où il résulte que le nombre des $n \leq x$ tels que $f(n) \equiv r \pmod{q}$ est $\frac{x}{q} + o\left[\frac{x}{q}\right]$.

En procédant de même avec (2), (3) étant alors remplacée par

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} 1 = \frac{6}{\pi^2} x + o\left[\frac{x}{\pi^2}\right],$$

on en déduit que le nombre des $n \leq x$, "quadratfrei" et tels que $f(n) \equiv r \pmod{q}$ est $\frac{1}{q} \cdot \frac{6}{\pi^2} x + o\left[\frac{x}{q}\right]$.

Pour la distribution uniforme modulo 1 de $\lambda f(n)$, on fait dans (1) ou (2) $z = \exp[2\pi q \lambda i]$, $q = 1, 2, 3, \dots$, et on applique le théorème bien connu de H. Weyl, ou une extension triviale de ce théorème.

On voit de façon analogue que les résultats du paragraphe 2 sont établis si l'on montre que, f et g étant les fonctions indiquées, pour $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$ et $u \neq 1$ ou $v \neq 1$, on a, quand x tend vers $+\infty$

$$(4) \quad \sum_{n \leq x} u^{f(n)} v^{g(n)} = o\left[\frac{x}{q}\right]$$

et

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} u^{f(n)} v^{g(n)} = o\left[\frac{x}{q}\right].$$

Les résultats indiqués au paragraphe 3 se déduisent de ce que, si f et g sont les fonctions Ω_E et Ω'_E correspondant à un même ensemble E satisfaisant à l'hypothèse (H), on a (4) pour $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$ et $uv \neq 1$.

La nécessité de supposer ici que q et q' sont premiers entre eux ou que l'équation $\lambda X + \mu Y = Z$ n'a aucune autre solution en entiers rationnels que $X = Y = Z = 0$ provient de ce que la condition " $u \neq 1$ ou $v \neq 1$ " est remplacée ici par $uv \neq 1$.

Une première méthode pour obtenir les différentes relations que nous venons de mentionner consiste à appliquer un théorème taubérien convenable aux séries de Dirichlet

$$\sum_1^{+\infty} \frac{z^{f(n)}}{n^s} \quad , \quad \sum_1^{+\infty} \frac{u^{f(n)} v^{g(n)}}{n^s} \quad ,$$

ou bien

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}} \frac{z^{f(n)}}{n^s} \quad \text{ou} \quad \sum_{n \in \mathbb{Q}} \frac{u^{f(n)} v^{g(n)}}{n^s} \quad .$$

Le cas des fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ suggère d'utiliser le théorème suivant, qui se déduit aisément d'une variante simple du théorème de Ikehara :

Soit la série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$, où les coefficients a_n sont réels ou complexes et de module ≤ 1 .

Si l'on a pour $\Re s > 1$

$$\sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} = \varphi(s) (s-1)^{\omega} \quad ,$$

avec φ holomorphe dans le demi-plan fermé $\Re s \geq 1$ et $\Re \omega > -1$, on a quand
x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n \leq x} a_n = o.[x] \quad .$$

Ceci conduit à prendre pour l'hypothèse (H) qui figure dans nos énoncés l'hypothèse suivante, que nous désignons par (H_1) :

Il existe un α réel > 0 et une fonction $\delta(s)$ holomorphe dans le demi-plan
fermé $\Re s \geq 1$, tels que, pour $\Re s > 1$,

$$(5) \quad \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s} = \alpha \log \frac{1}{s-1} + \delta(s) \quad .$$

En effet, quel que soit l'ensemble E , on a, par exemple, pour $|z| \leq 1$ et $\Re s > 1$

$$\begin{aligned} \sum_1^{+\infty} \frac{z^{\omega_E(n)}}{n^s} &= \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s - 1} \right] \prod_{p \notin E} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad , \\ &= \zeta(s) \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z-1}{p^s} \right] e^{-\frac{z}{p^s}} \end{aligned}$$

D'autre part, le produit infini $\prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s} \right] e^{-\frac{z}{p^s}}$ est convergent pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et Z quelconque, avec convergence uniforme sur tout ensemble compact.

Sa valeur est donc une fonction $G_E(s, Z)$ holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et Z quelconque.

Pour $\Re s > 1$ et Z quelconque, le produit $\prod_{p \in E} [1 + \frac{Z}{p^s}]$ et la série $\sum_{p \in E} \frac{1}{p^s}$ étant tous deux convergents, on peut écrire

$$\prod_{p \in E} [1 + \frac{Z}{p^s}] = G_E(s, Z) \exp [Z \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s}] .$$

On voit ainsi que, pour $|z| \leq 1$ et $\Re s > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega_E(n)}{n^s} &= \zeta(s) G_E(s, z-1) \exp [(z-1) \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s}] , \\ &= \frac{1}{s-1} H_E(s, z) \exp [(z-1) \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s}] , \end{aligned}$$

avec $H_E(s, z)$ holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et z quelconque.

On obtient des formules analogues pour

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Omega_E(n)}{n^s} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in Q} \frac{\omega_E(n)}{n^s} .$$

On voit que le théorème taubérien cité plus haut est applicable à toutes ces séries, pour $z \neq 1$, si E satisfait à l'hypothèse (H_1) .

Il est aussi applicable aux séries correspondant au cas où l'on considère à la fois deux fonctions, si l'ensemble E , ou les deux ensembles E_1 et E_2 , satisfont à l'hypothèse (H_1) .

L'hypothèse (H_1) est satisfaite, avec $\alpha = 1$, pour E égal à l'ensemble de tous les nombres premiers.

En effet, on a pour $\Re s > 1$

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{1}{p^s} &= \log \zeta(s) + \sum_p \left[\frac{1}{p^s} + \log(1 - \frac{1}{p^s}) \right] , \\ &= \log \frac{1}{s-1} + \log [(s-1)\zeta(s)] + \sum_{k>1} \sum_{kp} \frac{1}{k^s} . \end{aligned}$$

Le troisième terme du second membre représente une fonction holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$, le second est holomorphe dans le demi-plan fermé $\Re s \geq 1$, du fait que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans ce demi-plan.

On voit aussi que l'hypothèse (H_1) est satisfaite pour E égal à l'ensemble des nombres premiers satisfaisant à une congruence telle que

$$p \equiv \ell \pmod{k}, \quad \text{où } (k, \ell) = 1.$$

Pour cela, on évalue d'abord la somme de la série

$$\sum \frac{\chi(p)}{p^s},$$

où χ est un caractère modulo k , en utilisant la fonction L de Dirichlet correspondant à ce caractère, puis on multiplie par $\frac{1}{\chi(\ell)}$ et on ajoute entre elles toutes les formules ainsi obtenues à partir des différents caractères.

Comme il est clair que la réunion de plusieurs ensembles disjoints deux à deux et satisfaisant à l'hypothèse (H_1) satisfait aussi à cette hypothèse, et que, d'autre part, un ensemble satisfaisant à l'hypothèse (H_1) y satisfait encore si on lui ajoute ou lui enlève un ensemble E_1 tel que $\sum_{p \in E_1} \frac{1}{p^\sigma} < +\infty$ pour un

$\sigma < 1$, on voit que l'hypothèse (H_1) est satisfaite pour tous les ensembles du type suivant :

$$E = E_0 \cup E_1 - E_2,$$

où E_0 est l'ensemble des nombres premiers satisfaisant à une congruence telle que

$$p \equiv \ell \pmod{k}, \quad \text{où } (k, \ell) = 1,$$

ou bien une réunion de tels ensembles relatifs à un même k , $E_1 \cap E_0 = \emptyset$,

$E_2 \subset E_0$, avec $\sum_{p \in E_1} \frac{1}{p^\sigma} < +\infty$ et $\sum_{p \in E_2} \frac{1}{p^\sigma} < +\infty$ pour un $\sigma < 1$.

Ajoutons que les ensembles de ce type sont les seuls dont nous sachions effectivement prouver qu'ils satisfont à l'hypothèse (H_1) .

Il semble a priori que nos résultats doivent être valables pour une classe plus étendue d'ensembles.

En fait, en utilisant une méthode entièrement différente de la précédente, on peut montrer que l'hypothèse (H_1) peut être remplacée par la suivante, que nous désignerons par (H_2) :

On a $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty$ et le nombre des nombres de E qui sont $\leq x$ est égal

pour x infini à $\alpha \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right]$, avec $\alpha \geq 0$ ⁽³⁾.

Cette hypothèse est d'un caractère beaucoup moins artificiel que l'hypothèse (H_1) et est certainement satisfaite lorsque cette dernière l'est, car (5) donne par dérivation

$$\sum_{p \in E} \frac{\log p}{p^s} = \frac{\alpha}{s-1} - \xi'(s),$$

et le théorème de Ikehara permet d'en déduire

$$\sum_{\substack{p \in E \\ p \leq x}} \log p = \alpha x + o[x].$$

Pour montrer que l'hypothèse (H_2) convient comme hypothèse (H) , on établit d'abord le théorème général suivant :

Soit $h(n)$ une fonction arithmétique à valeurs réelles ou complexes ayant les propriétés suivantes :

- $|h(n)| \leq 1$ pour tout n ;
- $h(1) = 1$ et $h(mn) = h(m)h(n)$ lorsque $(m, n) = 1$.

Supposons en outre que $\sum_p \frac{1 - \mathcal{O}(h(p))}{p} = +\infty$ et qu'il existe un ρ réel ou complexe tel que l'on ait pour x infini

$$\sum_{p \leq x} h(p) = \rho \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right].$$

Alors on a pour x infini

$$\sum_{n \leq x} h(n) = o[x] \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} h(n) = o[x].$$

On voit que, si E satisfait à l'hypothèse (H_2) , ce théorème s'applique à $h(n) = z^{\omega_E(n)}$ ou $z^{Q_E(n)}$, avec $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, et à $h(n) = u^{\omega_E(n)} v^{Q_E(n)}$, avec $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$ et $uv \neq 1$.

De même, si E_1 et E_2 sont sans élément commun et satisfont à l'hypothèse (H_2) , le théorème s'applique à $h(n) = u^{f(n)} v^{g(n)}$, où $f = \omega_{E_1}$ ou Q_{E_1} , $g = \omega_{E_2}$ ou Q_{E_2} , $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$ et u ou $v \neq 1$.

⁽³⁾ Il est évident que l'hypothèse $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty$ est une conséquence de l'autre si $\alpha > 0$.

Ce théorème est d'ailleurs susceptible d'applications plus générales à l'étude de la distribution des valeurs des fonctions arithmétiques réelles additives, c'est-à-dire satisfaisant à $f(mn) = f(m) + f(n)$ toutes les fois que $(m, n) = 1$.

Sa démonstration fait appel à un théorème taubérien relatif à la série de

Dirichlet $\sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$, qui ne fait intervenir que les valeurs de la somme de cette série pour s réel et se déduit immédiatement d'un théorème classique de Hardy et Littlewood sur les séries de Dirichlet à coefficients positifs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LANDAU (Edmund). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Band 2. - Leipzig, B.G. Teubner, 1909.
 - [2] PILLAI (S.S.). - Generalisation of a theorem of Mangoldt, Proc. Ind. Acad. Sc., Section A, t. 11, 1940, p. 13-20.
 - [3] SELBERG (Sigmund). - Zur Theorie der quadratfreien Zahlen, Math. Z., t. 44, 1939, p. 306-318.
-