SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

ROBERT CROISOT

Théorie noethérienne des anneaux non commutatifs : les diverses notions de radical

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1957-1958), exp. nº 15, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A2_0>

24 février 1958

THÉORIE NOETHÉRIENNE DES ANNEAUX NON COMMUTATIFS : LES DIVERSES NOTIONS DE RADICAL

par Robert CROISOT

[d'après un Mémoire de L. LESIEUR et R. CROISOT à paraître aux C.R. Acad. Sc. Belg.]

Dans toute cette conférence, on peut se placer à volonté à divers points de vue : on peut admettre que les ensembles $(\mathcal{C})$ et (L) , dont il va être question, coïncident tous les deux avec l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau, ou que $(\mathcal{C})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau et que (L) est l'ensemble de ses idéaux à gauche, ou encore que $(\mathcal{C})$ et (L) sont deux ensembles abstraits satisfaisant aux axiomes suivants.

AXIOME (A). - $(\mathcal{C})$ (dont nous notons les éléments par des majuscules de ronde) <u>est un demi-groupe réticulé quasi-entier avec élément universel</u> $\mathcal{Z}$, ce qui impose :

Une opération (multiplication) est défini dans $(\mathcal{C})$, ainsi qu'une relation d'ordre par rapport à laquelle $(\mathcal{C})$ est un treillis, et on a

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$$
$$\mathcal{A}(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} \cup \mathcal{A}\mathcal{C}$$
$$(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A} \cup \mathcal{C}\mathcal{A}$$
$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leq \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \, , \, \mathcal{A} \leq \mathcal{Z}$$

quels que soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in (\mathcal{C})$.

AXIOME (B). - (L) dont nous notons les éléments par des majuscules d'imprimerie) <u>est un treillis avec élément universel</u> U .

AXIOME (C). - Les éléments de $(\mathcal{C})$ sont <u>opérateurs</u> dans (L) ; le résultat de l'opération de $\mathcal{A}(\in (\mathcal{C}))$ sur $X(\in (L))$ étant noté simplement $\mathcal{A}X(\in (L))$, les conditions suivantes sont imposées :

$$\mathcal{A}(X \cup Y) = \mathcal{A}X \cup \mathcal{A}Y$$
$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})X = \mathcal{A}X \cup \mathcal{B}X$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}X) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})X$$
$$\mathfrak{A}X \leq X$$

quels que soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in (\mathcal{T})$, X , $Y \in (L)$.

De plus, pour tout couple X , Y d'éléments de (L) , il existe au moins un élément $\mathfrak{A} \in (\mathcal{T})$ tel que $\mathfrak{A}Y \leq X$ et l'ensemble des éléments $\mathfrak{A}$ ayant cette propriété possède un élément maximum noté $X^{\bullet}.Y$ est appelé *résiduel à gauche de* X *par* Y ; pour tout $X \in (L)$ et tout $\mathfrak{A} \in (\mathcal{T})$, il existe au moins un $Y \in (L)$ tel que $\mathfrak{A}Y \leq X$ et l'ensemble des Y ayant cette propriété possède un élément maximum noté $X.^{\bullet}\mathfrak{A}$ et appelé *résiduel à droite de* X *par* $\mathfrak{A}$.

Naturellement, dans les deux cas précités, les axiomes précédents sont vérifiés ; ils le sont aussi dans d'autres cas importants, notamment si $(\mathcal{T})$ et (L) coïncident avec l'ensemble des idéaux bilatères d'un demi-groupe avec zéro, ou si $(\mathcal{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un tel demi-groupe et (L) l'ensemble de ses idéaux à gauche, ou encore si $(\mathcal{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau $\mathcal{E}$ et si (L) est l'ensemble des sous-modules d'un $\mathcal{E}$-module.

Pour pouvoir développer notre théorie, nous avons besoin d'un axiome supplémentaire.

AXIOME (D). - *L'ensemble des résiduels à gauche et l'ensemble des résiduels à droite de tout élément* X *de* (L) *vérifient la condition de chaîne ascendante.*

Dans les deux cas précités, ceci a lieu notamment quand l'anneau vérifie la condition de chaîne ascendante ou la condition de chaîne descendante pour des idéaux bilatères (1er cas) ou pour des idéaux à gauche (2e cas).

Moyennant cet axiome (D) , on peut alors démontrer les propriétés suivantes, fondamentales dans toute la théorie (cf. par exemple [1]): en appelant un idéal à gauche *propre* de X un résiduel à gauche de X de la forme $X^{\bullet}.Y$ avec $Y \not\leq X$, *pour tout* $X \neq U$, *il existe toujours au moins un résiduel à gauche propre premier* $\mathfrak{P}$ (c'est-à-dire tel que $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \leq \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{A} \leq \mathfrak{P}$ ou $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{P}$) *de* X , *et* X *possède seulement un nombre fini de tels résiduels. De plus, parmi les éléments premiers* $\mathfrak{P}$ *de* $(\mathcal{T})$ *tels que* $\mathfrak{P} \geq X^{\bullet}.U$, *on peut en trouver un nombre fini* $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... , $\mathfrak{P}_n$ *tels que*

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_n \leq X^{\bullet}.U$$

d'où il résulte que chaque $\mathfrak{P}$ *contient au moins un* $\mathfrak{P}_i$. *Enfin, la condition*

$X . \mathcal{B} > X$ équivaut au fait que $\mathcal{B}$ soit contenu dans un résiduel à gauche propre premier de X .

1. Radicaux d'un élément X de (L) distinct de U .

a. Le radical primaire.

THÉORÈME 1. – L'ensemble des éléments $\mathcal{A}$ de $(\mathcal{C})$, tels qu'il existe un entier positif m vérifiant

$$\mathcal{A}^m \leq X^{\bullet}.U \ ,$$

a un élément maximum $\mathcal{R}_1(X)$. Cet élément est l'intersection des éléments premiers de $(\mathcal{C})$ contenant $X^{\bullet}.U$.

En effet, si $\mathcal{P}$ est premier et contient $X^{\bullet}.U$, tout $\mathcal{A}$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème vérifie $\mathcal{A}^m \leq \mathcal{P}$ d'où $\mathcal{A} \leq \mathcal{P}$. Mais, l'intersection des éléments $\mathcal{P}$ premiers contenant $X^{\bullet}.U$ qui est égale à l'intersection d'un nombre fini d'entre eux $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, ... , $\mathcal{P}_n$, tels que $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_n \leq X^{\bullet}.U$ satisfait à l'hypothèse du théorème , car on a $\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathcal{P}_i\right)^n \leq \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_n$, d'où le théorème.

DÉFINITION 1. – $\mathcal{R}_1(X)$ se nomme le radical primaire de X . On a immédiatement :

PROPRIÉTÉ 1. – Quel que soit un nombre fini d'éléments X_1 , X_2 , ... , X_n de (L), on a

$$\mathcal{R}_1(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n) = \mathcal{R}_1(X_1) \cap \mathcal{R}_1(X_2) \cap \dots \cap \mathcal{R}_1(X_n) \ .$$

b. Le radical secondaire.

THÉORÈME 2. – L'ensemble des éléments $\mathcal{A}$ de $(\mathcal{C})$ tels qu'il existe des entiers positifs k_0 , k_1 , ... , k_n $(n \geq 0)$ et des éléments $\mathcal{L}_1$, ... , $\mathcal{L}_n$ de $(\mathcal{C})$ vérifiant

$$\mathcal{A}^{k_0} \mathcal{L}_1 \mathcal{A}^{k_1} \dots \mathcal{L}_n \mathcal{A}^{k_n} \leq X^{\bullet}.U \qquad \text{avec} \quad X .^{\bullet} \mathcal{L}_i = X \quad \text{pour} \quad i = 1 , \dots , n$$

a un élément maximum $\mathcal{R}_2(X)$. Cet élément est l'intersection des éléments premiers de $(\mathcal{C})$ contenant $X^{\bullet}.U$ et contenus dans un résiduel à gauche propre premier de X .

En effet, si $\{\mathcal{P}'_j\}_{j=1,2, \dots , m}$ désigne l'ensemble des éléments premiers minimaux contenant $X^{\bullet}.U$ et contenus dans un résiduel à gauche propre premier de X , pour tout $\mathcal{A}$ vérifiant l'hypothèse du théorème, nous avons $\mathcal{A} \leq \mathcal{P}'_j$ quel que soit j , d'où $\mathcal{A} \leq \bigcap_{1 \leq j \leq m} \mathcal{P}'_j$. Considérons, d'autre part, les éléments $\mathcal{P}_i$ ($\geq X^{\bullet}.U$) tels que

$$\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_n \leq X^{\bullet}.U \, .$$

Parmi eux, figurent tous les $\mathcal{P}'_j$; les autres sont de deux sortes : ou bien ils vérifient $X.^{\bullet}\mathcal{P}_i > X$ et sont contenus dans un résiduel à gauche propre premier, donc contiennent un $\mathcal{P}'_j$, ou bien ils vérifient $X.^{\bullet}\mathcal{P}_i = X$. On en déduit aisément que l'élément $\bigcap_{1 \leq j \leq n} \mathcal{P}'_j$ satisfait à l'hypothèse du théorème et est, par conséquent, le plus grand élément de $(\mathcal{T})$ ayant cette propriété.

DÉFINITION 2. - $\mathcal{R}_2(X)$ se nomme le <u>radical secondaire</u> de X .

On peut démontrer les propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 2. - <u>Si l'on a</u> $X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ <u>et si les résiduels à gauche propres maximaux de tous les éléments</u> X_i <u>coïncident</u>, <u>on a</u>

$$\mathcal{R}_2(X) \geq \mathcal{R}_2(X_1) \cap \mathcal{R}_2(X_2) \cap \dots \cap \mathcal{R}_2(X_n) \, .$$

PROPRIÉTÉ 3. - <u>Si l'on a</u> $X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ <u>et si la décomposition est réduite</u> (aucun X_i égal à U , et $X_i.^{\bullet}\mathcal{B} > X_i$, pour un i au moins, implique $X.^{\bullet}\mathcal{B} > X$), <u>on a</u>

$$\mathcal{R}_2(X) \leq \mathcal{R}_2(X_1) \cap \mathcal{R}_2(X_2) \cap \dots \cap \mathcal{R}_2(X_n) \, .$$

c. <u>Le radical unirésidué</u>.

THÉORÈME 3. - <u>L'ensemble des éléments</u> $\mathcal{A}$ <u>de</u> $(\mathcal{T})$ <u>vérifiant la condition</u>

$$\mathcal{A} C \not\leq X \Longrightarrow \exists\, \mathcal{B} \in (\mathcal{T}) \ \text{tel que}\ \mathcal{B} C \not\leq X \ \text{et}\ \mathcal{A}\mathcal{B} C \leq X$$

<u>a un élément maximum</u> $\mathcal{R}'(X)$. <u>Cet élément est l'intersection des résiduels à gauche propres premiers de</u> X .

Soit $\mathcal{A}$ un élément satisfaisant à la condition du théorème, et soit $\mathcal{P} = X^{\bullet}.C$ un résiduel à gauche propre premier de X . Supposons qu'on ait $\mathcal{A} \not\leq \mathcal{P}$. On aurait $\mathcal{A} C \not\leq X$ et, par suite, il existerait $\mathcal{B}$ vérifiant $\mathcal{B} C \not\leq X$ et $\mathcal{A}\mathcal{B} C \leq X$, d'où $\mathcal{B} \not\leq \mathcal{P}$ et $\mathcal{A}\mathcal{B} \leq \mathcal{P}$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{P}$ est premier. On a donc $\mathcal{A} \leq \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathcal{P}_i$ où $\{\mathcal{P}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ désigne l'ensemble des résiduels à gauche propres premiers de X .

Montrons maintenant que l'élément $\mathfrak{J} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{P}_i$ satisfait à la condition du théorème. Soit, en effet $\mathfrak{J}\,C \nleq X$. Considérons un résiduel à gauche propre de X de la forme $X^{\bullet}.\mathfrak{B}C$ qui soit maximal parmi les résiduels à gauche propres de cette forme. On voit aisément que c'est un élément premier de $(\mathcal{T})$, soit $\mathfrak{P}_1$. On a alors $\mathfrak{B}C \nleq X$, $\mathfrak{J}\mathfrak{B}C \leq \mathfrak{P}_1\mathfrak{B}C \leq X$ et, par suite, $\mathfrak{J}$ est bien le plus grand élément de $(\mathcal{T})$ satisfaisant à la condition du théorème.

DÉFINITION 3. - $\mathfrak{R}'(X)$ se nomme le <u>radical unirésidué</u> de X .

On démontre la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 4. - <u>Quel que soit un nombre fini d'éléments</u> $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ <u>de</u> (L) , <u>on a</u>

$$\mathfrak{R}'(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n) \geq \mathfrak{R}'(X_1) \cap \mathfrak{R}'(X_2) \cap \ldots \cap \mathfrak{R}'(X_n) .$$

d. <u>Le radical tertiaire</u>.

THÉORÈME 4. - <u>L'ensemble des éléments</u> $\mathfrak{A}$ <u>de</u> $(\mathcal{T})$ <u>tels que l'on ait</u>

$$(X.^{\bullet}\mathfrak{A}) \cap C = X \implies C = X$$

<u>a un élément maximum</u> $\mathfrak{R}_3(X)$. <u>Cet élément est l'intersection des résiduels essentiels de</u> X .

Soit $\mathfrak{A}$ un élément satisfaisant à la condition du théorème et soit $\mathfrak{P}$ le résiduel essentiel de X par rapport à Y (voir [2]). On a

$$\mathfrak{A} \leq X^{\bullet}.(X.^{\bullet}\mathfrak{A}) \leq X^{\bullet}.\,[(X.^{\bullet}\mathfrak{A}) \cap Y] .$$

De $Y \supset X_1$ résulte $(X.^{\bullet}\mathfrak{A}) \cap Y > X$ d'où, compte tenu de $(X.^{\bullet}\mathfrak{A}) \cap Y \leq Y$,

$$X^{\bullet}.\,[(X.^{\bullet}\mathfrak{A}) \cap Y] \equiv X^{\bullet}.Y = \mathfrak{P} .$$

On a donc $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{P}$ et, par suite, $\mathfrak{A} \leq \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{P}_i$ où $\{\mathfrak{P}_i\}$ $i=1,2,\ldots,n$ désigne l'ensemble des résiduels essentiels de X .

Montrons maintenant que l'élément $\mathfrak{J} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{P}_i$ satisfait à la condition du théorème. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soit C un élément de (L) tel que l'on ait

$$(X.^{\bullet}\mathfrak{J}) \cap C = X \quad \text{et} \quad C > X .$$

L'élément $X^{\bullet}.C$ de $(\mathcal{T})$ est alors un résiduel à gauche propre de X . Si l'on n'a pas

$$X < Z \leqslant C \Longrightarrow X^{\cdot}.Z = X^{\cdot}.C \ ,$$

on peut choisir $C_1 \leqslant C$ satisfaisant à $C_1 > X$ et $X^{\cdot}.C_1 > X^{\cdot}.C$. En répétant ce raisonnement, on voit, d'après la condition de chaîne ascendante pour les résiduels à gauche, qu'on peut trouver un élément $C' \leqslant C$ satisfaisant à $C' > X$ et

$$X < Z \leqslant C' \Longrightarrow X^{\cdot}.Z = X^{\cdot}.C' \ .$$

On a alors évidemment

$$(X.^{\cdot}\mathfrak{J}) \cap C' = X \quad \text{et} \quad C' > X$$

et l'élément $\mathfrak{P} = X^{\cdot}.C'$ est un résiduel essentiel de X. On en déduit $\mathfrak{J} \leqslant \mathfrak{P}$ et

$$X.^{\cdot}\mathfrak{J} \geqslant X.^{\cdot}\mathfrak{P} \geqslant C' \ ,$$

d'où $C' = (X.^{\cdot}\mathfrak{J}) \cap C'$ ce qui constitue une contradiction. Donc l'élément $\mathfrak{J}$ est bien le plus grand élément de $(\mathfrak{T})$ satisfaisant à la condition du théorème.

DÉFINITION 4. - $\mathcal{R}_3(X)$ se nomme le <u>radical tertiaire</u> de X.

On peut démontrer les propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 5. - <u>Si le treillis</u> (L) <u>est semi-modulaire, le radical tertiaire de</u> X <u>est élément maximum parmi les éléments</u> $\mathfrak{A}$ <u>de</u> $(\mathfrak{T})$ <u>tels que l'on ait</u>

$$(X.^{\cdot}\mathfrak{A}) \cap C \leqslant X \Longrightarrow C \leqslant X \ .$$

PROPRIÉTÉ 6. - <u>Si le treillis</u> (L) <u>est semi-modulaire, quel que soit un nombre fini d'éléments</u> $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ <u>de</u> (L) , <u>on a</u>

$$\mathcal{R}_3(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n) \geqslant \mathcal{R}_3(X_1) \cap \mathcal{R}_3(X_2) \cap \dots \cap \mathcal{R}_3(X_n) \ .$$

e. <u>Le radical primal</u>.

THÉORÈME 5. - <u>L'ensemble des éléments</u> $\mathfrak{A}$ <u>de</u> $(\mathfrak{T})$ <u>tels que l'on ait</u>

$$(X.^{\cdot}\mathfrak{A}) \cap (X.^{\cdot}\mathfrak{B}) = X \Longrightarrow X.^{\cdot}\mathfrak{B} = X$$

<u>a un élément maximum</u> $\mathcal{R}_4(X)$. <u>Cet élément est l'intersection des résiduels à gauche propres maximaux de</u> X .

Soit $\mathfrak{A}$ un élément satisfaisant à la condition du théorème, et soit $\mathfrak{P}$ un résiduel à gauche propre maximal de X. Supposons qu'on ait $\mathfrak{A} \nleqslant \mathfrak{P}$, d'où

$$(X.^{\cdot}\mathfrak{A}) \cap (X.^{\cdot}\mathfrak{P}) = X.^{\cdot}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{P}) = X$$

car, de la relation $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{P} > \mathfrak{P}$ résulte que $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{P}$ n'est contenu dans aucun résiduel à gauche propre premier de X. On contredirait ainsi la condition du théorème en prenant $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}$ car on a $X.^{\cdot}\mathfrak{P} > X$. Donc on a $\mathfrak{a} \leq \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{P}_i$ où $\{\mathfrak{P}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ désigne l'ensemble des résiduels à gauche propres maximaux de X.

Montrons maintenant que l'élément $\mathfrak{J} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{P}_i$ satisfait à la condition du théorème. Supposons qu'on ait

$$(X.^{\cdot}\mathfrak{J}) \cap (X.^{\cdot}\mathfrak{B}) = X$$

c'est-à-dire $X.^{\cdot}(\mathfrak{J} \cup \mathfrak{B}) = X$. Il en résulte que $\mathfrak{J} \cup \mathfrak{B}$ n'est contenu dans aucun résiduel à gauche propre maximal de X, donc que $\mathfrak{B}$ possède lui-même cette propriété, d'où résulte

$$X.^{\cdot}\mathfrak{B} = X .$$

Donc, $\mathfrak{J}$ est bien le plus grand élément de $(\mathcal{T})$ satisfaisant à la condition du théorème.

DÉFINITION 5. - $\mathcal{R}_4(X)$ se nomme le <u>radical primal</u> de X.

On démontre la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 7. - <u>Si l'on a</u> $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ <u>et si la décomposition est réduite, on a</u>

$$\mathcal{R}_n(X) \geq \mathcal{R}_n(X_1) \cap \mathcal{R}_n(X_2) \cap \ldots \cap \mathcal{R}_n(X_n) .$$

2. <u>Relations entre les différents radicaux de</u> X.

THÉORÈME 6. - <u>On a les relations</u> :

$$X^{\cdot}.U \leq \mathcal{R}_1(X) \leq \mathcal{R}_2(X) \leq \mathcal{R}'_!(X) \leq \mathcal{R}_3(X) \leq \mathcal{R}_4(X) .$$

Toutes ces relations sont évidentes si l'on utilise l'expression des différents radicaux comme intersection d'éléments premiers convenables de $(\mathcal{T})$.

PROPRIÉTÉ 8. - <u>Si le demi-groupe réticulé</u> $(\mathcal{T})$ <u>est commutatif, on a</u>

$$\mathcal{R}_1(X) = \mathcal{R}_2(X) = \mathcal{R}'_!(X) .$$

En effet posons $\mathfrak{a} = \mathcal{R}'_!(X)$ et supposons qu'aucune puissance de $\mathfrak{a}$ ne soit contenue dans $X^{\cdot}.U$. D'après la condition de chaîne ascendante pour les résiduels à droite de X , il est possible de trouver un entier positif n tel que l'on ait $X.^{\bullet}\mathcal{a}^n = X.^{\bullet}\mathcal{a}^{n+1}$, d'où résulte, $(\mathcal{C})$ étant commutatif, $X^{\bullet}.\mathcal{a}^n U = X^{\bullet}.\mathcal{a}^{n+1} U$. Si l'on pose $C = \mathcal{a}^n U$, on a $\mathcal{a} C \not\leq X$ et, par suite, il existe $\mathcal{B}$ vérifiant $\mathcal{B} C \not\leq X$ et $\mathcal{B} \mathcal{a} C = \mathcal{a} \mathcal{B} C \leq X$, c'est-à-dire $\mathcal{B} \mathcal{a}^n U \not\leq X$ et $\mathcal{B} \mathcal{a}^{n+1} U \leq X$, ce qui contredit l'égalité $X^{\bullet}.\mathcal{a}^n U = X^{\bullet}.\mathcal{a}^{n+1} U$. Par suite, on a $\mathcal{R}'(X) \leq \mathcal{R}_1(X)$, d'où la propriété.

PROPRIÉTÉ 9. - Si (L) est un treillis semi-modulaire et si tout élément de $(\mathcal{C})$ est union d'éléments L-principaux (éléments $\mathcal{a}$ tels que $Y \leq \mathcal{a} X$ implique l'existence de $X' \leq X$ satisfaisant à $Y = \mathcal{a} X'$), on a

$$\mathcal{R}_1(X) = \mathcal{R}_2(X) = \mathcal{R}'(X) = \mathcal{R}_3(X) \; .$$

En effet, supposons que $\mathcal{R}_3(X)$ ne soit pas contenu dans $\mathcal{R}_1(X)$. Puisque $\mathcal{R}_3(X)$ est union d'éléments L-principaux, il est possible de trouver un élément $\mathcal{a}$ L-principal, tel que l'on ait $\mathcal{a} \leq \mathcal{R}_3(X)$ et $\mathcal{a} \not\leq \mathcal{R}_1(X)$. Par suite, aucune puissance de $\mathcal{a}$ n'est contenue dans $X^{\bullet}.U$. D'après la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à droite de X , il est possible de trouver un entier positif n tel que l'on ait $X.^{\bullet}\mathcal{a}^n = X.^{\bullet}\mathcal{a}^{n+1}$. On a alors

$$(X.^{\bullet}\mathcal{a}) \cap \mathcal{a}^n U = \mathcal{a}^n([X.^{\bullet}\mathcal{a}) \cap \mathcal{a}^n U] .^{\bullet}\mathcal{a}^n)$$

d'après les propriétés des éléments L-principaux. Mais, ce dernier élément est égal à $\mathcal{a}^n(X.^{\bullet}\mathcal{a}^{n+1}) = \mathcal{a}^n(X.^{\bullet}\mathcal{a}^n)$ et il est, par suite, contenu dans X , ce qui contredit le fait que $\mathcal{a}$ est contenu dans $\mathcal{R}_3(X)$. On a donc $\mathcal{R}_3(X) \leq \mathcal{R}_1(X)$, d'où les égalités annoncées.

REMARQUE. - Des exemples montrent que les propriétés 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 ne peuvent pas être améliorées en affaiblissant les hypothèses, et que , en dehors des cas indiqués aux propriétés 8 et 9 , les différents radicaux de X sont en général distincts.

3. Applications.

Les différentes notions de radical introduites au paragraphe 1 permettent de caractériser les classes les plus importantes d'éléments de (L) .

DÉFINITION 6. - On dit qu'un élément X de (L) distinct de U est tertiaire (respectivement primaire, secondaire, unirésidué ou primal) si la relation $X.^{\bullet}\mathcal{C} > X$ entraîne que $\mathcal{C}$ est contenu dans le radical tertiaire (respectivement primaire, secondaire, unirésidué ou primal) de X .

THÉORÈME 7. – Les éléments X de (L) distincts de U qui sont primaires, secondaires, unirésidués, tertiaires ou primaux sont caractérisés par les conditions respectives suivantes :

X primaire $\Longleftrightarrow$ X possède un seul résiduel à gauche propre premier qui soit élément premier minimum contenant $X^{\bullet}.U$;

X secondaire $\Longleftrightarrow$ X possède un seul résiduel à gauche propre premier qui soit élément premier minimal contenant $X^{\bullet}.U$;

X unirésidué $\Longleftrightarrow$ X possède un seul résiduel à gauche propre premier ;

X tertiaire $\Longleftrightarrow$ X possède un seul résiduel à gauche propre essentiel ;

X primal $\Longleftrightarrow$ X possède un seul résiduel à gauche propre maximal.

La démonstration est analogue pour tous les cas : si X est tertiaire, par exemple, et si $\mathcal{P}$ est un résiduel essentiel de X , on a $X.^{\bullet}\mathcal{P} > X$, d'où résulte $\mathcal{P} \leq \mathcal{R}_3(X)$. L'élément $\mathcal{R}_3(X)$ étant l'intersection des résiduels essentiels de X , la condition annoncée caractérisant les éléments tertiaires est vérifiée. La réciproque est immédiate.

DÉFINITION 7. – Si l'élément X distinct de U est tertiaire (respectivement primaire, secondaire, unirésidué ou primal) et si $\mathcal{P}$ est son radical tertiaire (respectivement primaire, secondaire, unirésidué ou primal) qui est alors un élément premier de $(\mathcal{T})$ d'après le théorème 7 , on dit que $\mathcal{P}$ est l'élément premier associé à X et que X est $\mathcal{P}$-tertiaire (respectivement $\mathcal{P}$-primaire, $\mathcal{P}$-secondaire, $\mathcal{P}$-unirésidué ou $\mathcal{P}$-primal).

THÉORÈME 8. – On les implications suivantes :

X primaire $\Longrightarrow$ X secondaire $\Longrightarrow$ X unirésidué $\Longrightarrow$ X tertiaire $\Longrightarrow$ X primal.

C'est une conséquence immédiate du théorème 6 .

PROPRIÉTÉ 10. – Pour qu'un élément X de (L) distinct de U appartenant à l'une des classes précédentes appartienne à une autre, il faut et il suffit que ses deux radicaux correspondants soient confondus.

Ceci résulte du fait que, pour un élément tertiaire (respectivement primaire, secondaire, unirésidué ou primal), la relation $X.^{\bullet}\mathcal{A} > X$ est en réalité équivalente à $\mathcal{A} \leq \mathcal{R}_3(X)$ (respectivement $\mathcal{R}_1(X)$, $\mathcal{R}_2(X)$, $\mathcal{R}'_2(X)$, $\mathcal{R}_4(X)$).

COROLLAIRE 1. – Si le demi-groupe réticulé $(\mathcal{T})$ est commutatif, les notions d'éléments primaire, secondaire et unirésidué coïncident.

COROLLAIRE 2. - Si le treillis (L) est semi-modulaire et à tout élément de (L) est union d'éléments L-principaux, les notions d'éléments primaire, secondaire, unirésidué et tertiaire coïncident.

Il suffit d'appliquer les propriétés 8 et 9 .

On démontre encore facilement la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 11. - Soit X un élément de (L) distinct de U . S'il existe un élément $\mathcal{P}$ de $(\mathcal{Z})$ tel que

1° $X.^{\bullet}\mathcal{A} > X \implies \mathcal{A} \leq \mathcal{P}$

2° $\mathcal{P}$ soit contenu dans le radical tertiaire (respectivement primaire, secondaire, unirésidué ou primal) de X , l'élément X est $\mathcal{P}$-tertiaire (respectivement $\mathcal{P}$-primaire, $\mathcal{P}$-secondaire, $\mathcal{P}$-unirésidué ou $\mathcal{P}$-primal).

COROLLAIRE. - Le treillis (L) étant semi-modulaire, si X_1 , X_2 , ... , X_n sont des éléments de (L) tous $\mathcal{P}$-tertiaires (respectivement $\mathcal{P}$-primaires, $\mathcal{P}$-secondaires, $\mathcal{P}$-unirésidués), leur intersection est un élément $\mathcal{P}$-tertiaire (respectivement $\mathcal{P}$-primaire, $\mathcal{P}$-secondaire, $\mathcal{P}$-unirésidué).

Lorsqu'il existe une décomposition d'un élément X de (L) distinct de U comme intersection d'éléments appartenant à l'une des classes précédentes, les radicaux de X sont susceptibles de s'en déduire simplement.

On démontre, en effet, les théorèmes suivants :

THÉORÈME 9. - Si $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ est une décomposition réduite de X comme intersection d'éléments primaux dont les éléments premiers associés $\mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \ldots , \mathcal{P}_n$ sont incomparables deux à deux, on a

$$\mathcal{R}_4(X) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n .$$

THÉORÈME 10. - Si $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ est une décomposition de X comme intersection d'éléments tertiaires sans élément superflu, on a, $\mathcal{P}_i$ désignant l'élément premier associé à X_i ,

$$\mathcal{R}_3(X) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n$$

THÉORÈME 11. - Si $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ est une décomposition de X comme intersection d'éléments unirésidués sans élément superflu, les résiduels à gauche propres premiers de X sont tous des résiduels essentiels, ils coïncident avec les $\mathcal{P}_i$, si $\mathcal{P}_i$ désigne l'élément premier associé à X_i , et on a

$$\mathcal{R}'(X) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n = \mathcal{R}_3(X) .$$

REMARQUE. - Si $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ est une décomposition de X comme intersection d'éléments secondaires sans élément superflu, on n'a pas nécessairement, $\mathcal{P}_i$ désignant l'élément premier associé à X_i, $\mathcal{R}_2(X) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CROISOT (Robert). - Sur une généralisation de la théorie des A-modules de Grundy, Séminaire Dubreil, t. 8, 1954/55.

[2] LESIEUR (Léonce). - Théorie noethérienne des anneaux non commutatifs : une propriété caractéristique des idéaux tertiaires, Séminaire Dubreil-Dubreil-Jacotin-Pisot, t. 11, 1957/58.