Léonce Lesieur

Théorie noethérienne des anneaux non commutatifs : une propriété caractéristique des idéaux tertiaires

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 2 (1957-1958), exp. n° 14, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A1_0>

17 février 1958

THÉORIE NOETHÉRIENNE DES ANNEAUX NON COMMUTATIFS :
UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISITQUE DES IDÉAUX TERTIAIRES,

par Léonce LESIEUR

Nous avons développé, CROISOT et moi, une théorie noethérienne des anneaux non commutatifs au moyen de la notion d'idéal tertiaire qui doit remplacer la notion d'idéal primaire, insuffisante dans le cas non commutatif. Cette théorie est exposée dans deux mémoires principaux (L. LESIEUR et R. CROISOT, [4] et [5]). Les résultats que je me propose de présenter ici y apportent une contribution nouvelle basée sur la notion de résiduel essentiel d'un idéal, avec une application intéressante aux idéaux tertiaires ; nous montrons en effet qu'un idéal tertiaire est caractérisé par la propriété de posséder un résiduel essentiel unique. L'exposé qui suit se limite au cas des idéaux à gauche d'un anneau [1].

Je reprends les hypothèses et les notations utilisées dans une conférence faite par R. CROISOT [2] . U désigne un anneau, non nécessairement commutatif, n'ayant pas nécessairement un élément unité. Nous imposons une condition de chaîne qui est, soit la condition de chaîne ascendante pour les idéaux à gauche, soit la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche. Nous notons $a U^{*} b$ la réunion de aUb et de ab $(a \in U\ ,\ b \in U)$. Pour tout $x \in U$, nous notons $(x|$ l'idéal à gauche de U engendré par x . Les idéaux à gauche sont représentés par des majuscules d'imprimerie, les idéaux bilatères par des majuscules de ronde. Pour tout idéal à gauche X et tout idéal à gauche Y , nous notons $X^{\bullet}.Y$ le résiduel à gauche de X par rapport à Y , qui est l'ensemble des éléments

---

[1] En fait la notion de résiduel essentiel et son application à la caractérisation des idéaux tertiaires sont valables aussi pour les idéaux bilatères d'un anneau, les idéaux à gauche ou bilatères d'un demi-groupe avec zéro, les sous-modules d'un U-module, U étant un anneau non commutatif. Une présentation abstraite valable pour tous ces cas est donnée dans deux notes récentes (L. LESIEUR et R. CROISOT, [6] et [7]).

$a \in U$ tels que $aY \subseteq X$; ce résiduel à gauche est un idéal bilatère.

1. Résiduel essentiel d'un idéal à gauche.

DÉFINITION. - On appelle résiduel essentiel d'un idéal à gauche X un idéal bilatère $\mathcal{P}$ tel qu'il existe un idéal à gauche $Y \supset X$ avec $\mathcal{P} = X^{\bullet}.Y$ et

$$X \subset Z \subseteq Y \implies X^{\bullet}.Z = X^{\bullet}.Y .$$

Dans la suite, nous utiliserons le plus souvent deux propriétés caractéristiques des idéaux essentiels de X, sous la forme des propriétés 1 et 2 .

PROPRIÉTÉ 1. - Pour que $\mathcal{P}$ soit résiduel essentiel de l'idéal à gauche X, il faut et il suffit qu'il existe un idéal à gauche $Y \not\subseteq X$, tel que $\mathcal{P} = X^{\bullet}.Y$ et

$$Z \subseteq Y , \quad Z \not\subseteq X \implies X^{\bullet}.Z = X^{\bullet}.Y .$$

a. La condition est nécessaire, car en prenant pour Y l'idéal qui figure dans la définition, l'hypothèse $Z \subseteq Y$, $Z \not\subseteq X$ entraîne $X \subset X + Z \subseteq Y$ d'où

$$\mathcal{P} = X^{\bullet}.(X + Z) = X^{\bullet}.Z .$$

b. La condition est suffisante. Supposons $\mathcal{P} = X^{\bullet}.Y$, Y satisfaisant à la condition de la propriété 1 . On a aussi $\mathcal{P} = X^{\bullet}.(X + Y)$ avec $X \subset X + Y$. Considérons Z tel que $X \subset Z \subseteq X + Y$. On peut écrire $Z = X + (Z \cap Y)$ d'où $X^{\bullet}.Z = X^{\bullet}.(Z \cap Y) = \mathcal{P}$ puisque $Z \cap Y \not\subseteq X$, $Z \cap Y \subseteq Y$.

La propriété 1 est établie. Nous nous y réfèrerons dans la suite en disant que $\mathcal{P} = X^{\bullet}.Y$ est résiduel essentiel de X par rapport à Y.

Soit $\mathcal{P} = X^{\bullet}.Y$ un résiduel essentiel de X par rapport à Y. Considérons un élément $y_0 \in Y$, $y_0 \notin X$. On a donc $\mathcal{P} = X^{\bullet}.(y_0|$, c'est-à-dire $\mathcal{P}$ est l'ensemble des éléments a qui vérifient $a\,U^{*}y_0 \subseteq X$. En prenant $z \in (y_0|$, avec $z \notin X$, on a aussi $\mathcal{P} = X^{\bullet}.(z|$ de sorte que la relation $a\,U^{*}\,z \subseteq X$ entraîne $a\,U^{*}\,y_0 \subseteq X$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{P}$ soit de la forme $\mathcal{P} = X^{\bullet}.(y_0|$, où $y_0 \notin \mathcal{P}$ est un élément tel que :

(1) $\qquad z \notin X , \quad z \in (y_0| , \quad a\,U^{*}\,z \subseteq X \implies a\,U^{*}\,y_0 \subseteq X .$

Alors l'idéal $\mathcal{P} = X^{\bullet}.(y_0|$ est résiduel essentiel de X par rapport à $(y_0|$. Considérons en effet un idéal à gauche Z tel que $Z \subseteq (y_0|$, $Z \not\subseteq X$. On a d'abord $X^{\bullet}.Z \supseteq X^{\bullet}.(y_0|$; inversement, soit $a \in X^{\bullet}.Z$; en prenant un élément $z \in Z$, $z \notin X$, on a donc : $z \notin X$, $z \in (y_0|$, $a\,U^{*}\,z \subseteq X$ d'où $a\,U^{*}\,y_0 \subseteq X$

d'après la condition (1). Il en résulte $a \in X^{\cdot}.(y_0|$ et $X^{\cdot}.Z = X^{\cdot}.(y_0|$.

Ce résultat nous conduit à la deuxième propriété caractéristique d'un résiduel essentiel de X :

PROPRIÉTÉ 2. - Pour que $\mathcal{P}$ soit résiduel essentiel de X, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\mathcal{P} = X^{\cdot}.(y_0|$ où $y_0 \nsubseteq X$ est un élément tel que :

$$z \nsubseteq X , \quad z \in (y_0| , \quad a\, U^* z \subseteq X \implies a\, U^* y_0 \subseteq X .$$

Nous nous réfèrerons dans la suite à cette propriété en disant que $\mathcal{P}$ est un résiduel essentiel de X par rapport à $(y_0|$.

PROPRIÉTÉ 3. - Tout résiduel essentiel de X contient le radical tertiaire de X.

Rappelons en effet la définition du radical tertiaire $\mathcal{R}(X)$ de X ([2], p. 1 et [5], p. 459). C'est l'ensemble des éléments a tels que :

$$\forall\, b \nsubseteq X \implies \exists\, z \in (b| \text{ tel que } z \nsubseteq X \text{ et } a\, U^* z \subseteq X .$$

Supposons $a \in \mathcal{R}(X)$ et soit $\mathcal{P}$ un résiduel essentiel de X par rapport à y_0. En appliquant la définition du radical à l'élément $y_0 \nsubseteq X$, il existe donc z tel que : $z \in (y_0|$, $z \nsubseteq X$, $a\, U^* z \subseteq X$. On en déduit d'après la propriété 2, $a\, U^* y_0 \subseteq X$, donc $a \in \mathcal{P}$. On a bien $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{P}$.

PROPRIÉTÉ 4. - Si $\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche propre maximal de X, c'est un résiduel essentiel de X.

Un résiduel à gauche propre est de la forme $X^{\cdot}.Y$ avec $Y \nsubseteq X$. Supposons-le maximal, et soit $Z \leq Y$, $Z \nsubseteq X$. On a $X^{\cdot}.Z \supseteq X^{\cdot}.Y$ d'où $X^{\cdot}.Z = X^{\cdot}.Y$ puisque $X^{\cdot}.Y$ est maximal.

PROPRIÉTÉ 5. - Tout résiduel à gauche de X de la forme $\mathcal{P} = X^{\cdot}.Z$, avec $Z \succ X$, est un résiduel essentiel de X. Réciproquement, si U vérifie la condition de chaîne descendante, tout résiduel essentiel de X est de cette forme.

La première partie de la propriété est immédiate en vertu de la définition de $Z \succ X$ (2). Pour démontrer la seconde, $\mathcal{P}$ étant un résiduel essentiel de X de la forme $\mathcal{P} = X^{\cdot}.Y$, avec $Y \supset X$, il suffit de choisir pour Z un idéal minimal vérifiant $X \subset Z \subseteq Y$ et d'appliquer la définition.

---

(2) On rappelle que $Z \succ X$ signifie $Z \supset X$ et $Z \supseteq Z_1 \supset X$ entraîne $Z_1 = Z$.

Dans sa thèse [3], J. GUÉRINDON considère des idéaux de la forme $X^{\cdot}.Z$, avec $Z \succ X$, pour le cas d'un anneau commutatif, et il montre qu'un tel idéal est premier maximal. Dans le cas d'un anneau non commutatif nous pouvons toujours affirmer qu'un résiduel essentiel de X est premier, d'après la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 6. - Tout résiduel essentiel de X est premier ([3]).

Supposons $\mathcal{P}$ résiduel essentiel de X par rapport à y_0 (propriété 2), et $a\,U^*\,b \subseteq \mathcal{P}$. On a donc $a\,U^*\,b\,U^*\,y_0 \subseteq X$. Dans le cas $b\,U^*\,y_0 \subseteq X$ on a $b \in \mathcal{P}$. Sinon, il existe $z \in b\,U^*\,y_0 \subseteq (y_0|$ avec $z \notin X$ et $a\,U^*\,z \subseteq X$. On en déduit $a\,U^*\,y_0 \subseteq X$ d'après la propriété 2, d'où $a \in \mathcal{P}$.

COROLLAIRE. - Tout idéal X, distinct de U, n'admet qu'un nombre fini de résiduels essentiels.

On sait en effet que X ne possède qu'un nombre fini de résiduels à gauche propres premiers :([4], théorème 2.1, ou [1], p. 7).

2. Application des idéaux essentiels aux idéaux tertiaires.

Nous allons appliquer maintenant la notion d'idéal résiduel essentiel pour donner une propriété caractéristique des idéaux tertiaires.

THÉORÈME 1. - Pour que l'idéal à gauche X soit tertiaire, il faut et il suffit qu'il n'admette qu'un seul résiduel essentiel.

Rappelons d'abord la définition d'un idéal tertiaire qui sera utilisée ici (L. LESIEUR et R. CROISOT, [5], p. 460, ou [2], p. 2) : l'idéal X est tertiaire si l'on a :

$$a\,U^*\,b \subseteq X\,,\quad b \notin X \implies a \in \mathcal{R}(X)$$

où $\mathcal{R}(X)$ désigne le radical tertiaire de X, qui a été défini plus haut (propriété 3).

a. Montrons qu'un idéal tertiaire X n'admet qu'un résiduel essentiel. Soit $\mathcal{P}$ le radical tertiaire de X. Soit $\mathcal{P}'$ un résiduel essentiel de X, par rapport à $(y_0|$. On a $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, car si $p' \in \mathcal{P}'$, on a $p'\,U^*\,y_0 \subseteq X$, $y_0 \notin X$, d'où $p' \in \mathcal{P}$ puisque X est $\mathcal{P}$-tertiaire. Inversement, soit $p \in \mathcal{P}$; comme $y_0 \notin X$, il existe d'après la définition du radical $\mathcal{P}$ de X un élément z tel que $z \notin X$, $z \in (y_0|$ et $p\,U^*\,z \subseteq X$. Il en résulte d'après la propriété 2 :

([3]) Au sens de MAC COY [8] : l'idéal bilatère $\mathcal{P}$ est premier si la relation $a\,U\,b \subseteq \mathcal{P}$ entraîne $a \in \mathcal{P}$ ou $b \in \mathcal{P}$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la relation $a\,U^*\,b \subseteq \mathcal{P}$ entraîne $a \in \mathcal{P}$ ou $b \in \mathcal{P}$.

$p\, U^* y_0 \subseteq X$, c'est-à-dire $p \in \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

b. Montrons qu'un idéal X qui n'admet qu'un résiduel essentiel est nécessairement tertiaire. Il faut donc établir :

$$a\, U^* b \subseteq X \ , \quad b \not\subseteq X \implies a \in \mathcal{R}(X) \ .$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait donc un élément c tel que :

(2) $$c \not\subseteq X \ , \text{ avec } \ x \in (c| \ , \quad a\, U^* x \subseteq X \implies x \in X \ .$$

Considérons un résiduel à gauche de X maximal parmi ceux qui sont de la forme $X^{\bullet}.(y|$, avec $y \not\subseteq X$, $y \in (c|$. Ce résiduel maximal $\mathcal{P} = X^{\bullet}.(y_0|$ est un résiduel essentiel de X par rapport à $(y_0|$. L'hypothèse $a\, U^* b \subseteq X$, $b \not\subseteq X$ entraîne $a \in X^{\bullet}.(b|$, qui est un résiduel à gauche propre de X . Celui-ci est contenu dans un résiduel à gauche propre maximal qui est essentiel d'après la propriété 4 et qui coïncide donc avec $\mathcal{P}$ d'après l'hypothèse d'unicité. Il en résulte $a \in \mathcal{P}$, soit $a\, U^* y_0 \subseteq X$, avec $y_0 \in (c|$. Mais cela entraînerait $y_0 \in X$ d'après (2) , ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Il est possible de généraliser le théorème 1 en précisant quels sont tous les résiduels essentiels d'un idéal à gauche X donné. Il suffit pour cela d'utiliser une décomposition réduite de X comme intersection d'un nombre fini d'idéaux tertiaires.(Pour la définition et l'existence d'un telle décomposition, voir L. LESIEUR et R. CROISOT, [5] , p. 462, ou [2] p. 6).

Soit $X = X_1 \cap \ldots \cap X_n$ une décomposition réduite de X comme intersection d'idéaux à gauche X_i $(i = 1 , \ldots , n)$ supposés $\mathcal{P}_i$-tertiaires. Aucun X_i n'est superflu et les $\mathcal{P}_i$ sont des idéaux bilatères premiers tous distincts. Nous allons démontrer que les résiduels essentiels de X sont précisément les idéaux $\mathcal{P}_i$. Nous utiliserons pour cela le lemme suivant :

LEMME. - Soit $\mathcal{P} = X^{\bullet}.(y_0|$ un résiduel essentiel de X par rapport à y_0 , et soit $X = X_1 \cap \ldots \cap X_n$ une décomposition réduite de X comme intersection d'idéaux à gauche X_i $\mathcal{P}_i$-tertiaires. Il existe un X_i et un seul, soit X_1 , tel que $X \cap (y_0| = X_1 \cap (y_0|$. On a $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ et $X_2 \cap \ldots \cap X_n \cap (y_0| \supset X \cap (y_0|$.

Considérons parmi les X_i un ensemble minimal, soit $\{X_1 , \ldots , X_m\}$, tel que

$$X \cap (y_0| = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_m \cap (y_0| \ .$$

On a $m \geq 1$ puisque $y_0 \not\subseteq X$. Il en résulte $y_0 \not\subseteq X_1$, sinon on aurait $X \cap (y_0| = X_2 \cap \ldots \cap X_m \cap (y_0|$. Soit $p \in \mathcal{P} = X^{\bullet}.(y_0|$; on a donc

$p\, U^* y_0 \subseteq X \subseteq X_1$ et, comme X_1 est $\mathcal{P}_1$-tertiaire, $p \in \mathcal{P}_1$ et par suite $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_1$. Démontrons maintenant l'inclusion $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}$. Comme on a $X \cap (y_0| \subset X_2 \cap \ldots \cap X_m \cap (y_0| = Y'$, il existe $y' \in Y'$, donc $y' \in (y_0|$, tel que $y' \notin X$, et par suite tel que $y' \notin X_1$. Si p_1 est un élément quelconque de $\mathcal{P}_1$, on a donc en vertu de la définition du radical de X_1 , un élément $z \in (y'|$, $z \notin X_1$, tel que $p_1\, U^* z \subseteq X_1$. Il en résulte $p_1\, U^* z \subseteq X$ et par suite $p_1\, U^* y_0 \subseteq X$ d'après la propriété 2 , c'est-à-dire $p_1 \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}$. On a bien $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$. Ceci démontre en même temps que $m = 1$, car le cas $m > 1$ entraînerait de même $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$, d'où $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc bien $X_1 \cap (y_0| = X \cap (y_0|$ et $X_2 \cap \ldots \cap X_n \cap (y_0| \supset X \cap (y_0|$.

THÉORÈME 2. - Les résiduels essentiels d'un idéal à gauche X coïncident avec les idéaux premiers $\mathcal{P}_i$ associés aux idéaux tertiaires X_i d'une décomposition réduite $X = X_1 \cap \ldots \cap X_n$.

a. On sait déjà d'après le lemme qu'un résiduel essentiel de X est nécessairement l'un des idéaux $\mathcal{P}_i$.

b. Montrons, réciproquement, que $\mathcal{P}_1$, par exemple, est un résiduel essentiel de X . Considérons l'idéal $Y = X_2 \cap \ldots \cap X_n$; on a donc $X = X_1 \cap Y$. Soit $\mathcal{P} = X^{\cdot}.(y_0|$ un résiduel de X maximal parmi ceux qui sont de la forme $X^{\cdot}.(y|$, où $y \notin X$, $y \in Y$. Celui-ci est un résiduel essentiel de X car si on a $Z \subseteq (y_0|$ avec $Z \nsubseteq X$, il existe $z \in Z$, $z \notin X$ et on a

$$X^{\cdot}.(z| \supseteq X^{\cdot}.Z \supseteq X^{\cdot}.(y_0| \; .$$

Il en résulte l'égalité puisque $X^{\cdot}.(y_0|$ est maximal. Mais on a

$$X \cap (y_0| = X_1 \cap Y \cap (y_0| = X_1 \cap (y_0|$$

et par suite $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ d'après le lemme. Le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CROISOT (Robert). - Sur une généralisation de la théorie des A-modules de Grundy, Séminaire Dubreil, t. 8, 1954/55.

[2] CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des idéaux dans les anneaux et les demi-groupes non nécessairement commutatifs, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57.

[3] GUÉRINDON (Jean). - Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative, S-normalité, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957 (à paraître) (Thèse Sc. math. Paris. 1957).

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non-commutatifs, I., Colloque d'algèbre supérieure, Bruxelles 1956 (Centre belge de Recherches mathématiques) (à paraître).

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non-commutatif, II., Math. Annalen, t. 134, 1958, p. 458-476.

[6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - La notion de résiduel essentiel, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 357-360.

[7] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Une propriété caractéristique des idéaux tertiaires, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 517-520.

[8] MAC COY (Neal H.). - Prime ideals in general rings, Amer. J. Math., t. 71, 1949, p. 823-833.