MICHEL ZISMAN

Les faisceaux, I

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1957-1958), exp. nº 5, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_1_A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL,
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1957/58
-:-:-:-

9 décembre 1957

LES FAISCEAUX, I,

par Michel ZISMAN

1. DÉFINITION. - Un faisceau sur un espace topologique X est constitué par la donnée d'un espace topologique F et d'une application continue $p : F \rightarrow X$ surjective telle que

a) pour chaque $x \in X$, $p^{-1}(x) = F_x$ est un groupe abélien

b) la projection p est un homéomorphisme local i.e. tout élément de F possède un voisinage ouvert que p applique biunivoquement et bicontinument sur un ouvert de X.

c) On note $F + F$ la partie de $F \times F$ formée des couples (α , β) tels que $p(\alpha) = p(\beta)$. Alors l'application $(\alpha , \beta) \rightarrow \alpha - \beta$ de $F + F$ dans F est continue.

REMARQUE. - Les faisceaux définis ci-dessus sont des faisceaux de "groupes abéliens". On peut de même définir des faisceaux de k-modules (k anneau quelconque), des faisceaux d'anneaux, en imposant à F_x d'être un k-module, ou un anneau ; on transforme alors en conséquence l'axiome c, en imposant aux nouvelles applications introduites dans F ou $F + F$ d'être continues.

Premières propriétés. - On déduit immédiatement de b) que la topologie de F induit la topologie discrète sur chaque F_x.

Si on note 0_x l'élément nul de F_x, il résulte de b) et c) que l'application $x \rightarrow 0_x$ de X dans F est continue. On en déduit que l'application $\alpha \rightarrow -\alpha$ de F dans F est continue, et que l'application $(\alpha , \beta) \rightarrow \alpha + \beta$ de $F + F$ dans F est continue.

2. Sections d'un faisceau.

Soit U un ouvert de X. On appelle section de F au-dessus de U une application continue $s : U \rightarrow F$ telle que $p \circ s$ soit l'application identique de U.

Autrement dit $s(x) \in F_x$ pour tout $x \in U$. On désigne par $\Gamma(U, F)$ l'ensemble des sections au-dessus de U. Si s et s' sont deux sections au-dessus de U l'application $x \to s(x) + s'(x)$ est une application continue de U dans F puisque l'addition est une application continue de $F + F$ dans F. On en déduit que $\Gamma(U, F)$ est un groupe abélien, l'élément nul du groupe étant bien évidemment l'application $x \to 0_x$ définie précédemment.

Si $U \subset V$, et si s est une section au-dessus de V, la restriction de s à U est une section au-dessus de U, d'où un homomorphisme

$$\rho_U^V : \Gamma(V, F) \to \Gamma(U, F) .$$

L'axiome b) montre que $s(U)$ est un ouvert de F, et que si U parcourt une base d'ouverts de X, les $s(U)$ parcourent une base d'ouverts de F.

Enfin, pour tout $\alpha \in F_x$, il existe une section au-dessus d'un voisinage de x telle que $s(x) = \alpha$, et deux sections jouissant de cette propriété coïncident dans tout un voisinage de x.

Autrement dit F_x est la limite inductive des $\Gamma(U, F)$ munis des applications ρ_U^V suivant l'ordonné filtrant des voisinages de x. (Rappelons en effet, cf. [7], que $s \in \Gamma(U, F)$, $s' \in \Gamma(V, F)$ donnent le même élément de la limite inductive si et seulement si il existe $W \subset U$ et $W \subset V$ tels que $\rho_W^U s = \rho_W^V s'$).

3. Préfaisceaux.

Un préfaisceau $\underset{\sim}{F}$ sur un espace topologique X est constitué par la donnée pour tout ouvert U de X d'un groupe abélien F_U ($F_U = 0$ si $U = \emptyset$), pour tout couple d'ouverts U, V tels que $U \subset V$ d'un homomorphisme $r_U^V : F_V \to F_U$, les r_U^V vérifiant la condition de transitivité $r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$ chaque fois que $U \subset V \subset W$. La donnée d'un préfaisceau $\underset{\sim}{F}$ sur X permet de définir un faisceau F sur X de la manière suivante :

a) F_x est la limite inductive des F_U suivant l'ordonné filtrant des voisinages ouverts U de x. Désignons par r_x^U l'homomorphisme canonique $F_U \to F_x$ $(x \in U)$.

b) sur l'espace somme F des F_x on définit une topologie : soit $f \in F_U$ et $x \in U$, $f_x = r_x^U f \in F_x$. On désigne par f_U l'ensemble des f_x quand x parcourt U. Quand U parcourt une base d'ouverts de X, l'ensemble des f_U vérifie les axiomes des bases d'ouverts, et définit par conséquent une topologie sur F.

Il reste à vérifier que les propriétés a), b), c) sont vérifiées, ce qui ne présente aucune difficulté.

L'application $U \to F$ définie par $x \mapsto r_x^U f$ $(f \in F_U)$ est continue par définition même de la topologie de F. C'est donc une section de F au-dessus de U, d'où un homomorphisme canonique $i : F_U \to \Gamma(U, F)$. En général, cet homomorphisme n'est ni injectif, ni surjectif.

REMARQUE. - Des préfaisceaux différents peuvent donner le même faisceau (à un isomorphisme près bien entendu).

REMARQUE. - F étant un faisceau sur X, les $\Gamma(U, F)$ et les homomorphismes ρ_U^V définissent un préfaisceau canoniquement associé à F. Le faisceau engendré par ce préfaisceau est F.

4. Exemples de faisceaux.

a. Faisceau constant. - Soit G un groupe abélien, et $F = X \times G$ où G est muni de la topologie discrète. La projection p est la projection canonique

$$X \times G \to X .$$

Ce faisceau est appelé le faisceau constant, et souvent identifié à G.

b. G est un groupe abélien. - On construit un préfaisceau $\underset{\sim}{F}$ comme suit : F_U est l'ensemble des fonctions définies sur U à valeurs dans G, $r_U^V : F_V \to F_U$ est l'opération de restriction d'une fonction. Le faisceau F associé est appelé faisceau des germes de fonctions à valeurs dans G.

c. F_U est l'ensemble des fonctions continues sur U à valeurs réelles (resp. complexes) r_U^V est l'opération de restriction des fonctions. Le faisceau correspondant F est le faisceau des germes de fonctions continues à valeur réelles (resp. complexes).

d. Supposons que X soit une variété différentiable (resp. analytique complexe). F_U est l'ensemble des fonctions différentiables définies sur U à valeurs réelles ou complexes (resp. holomorphes sur U à valeurs complexes), r_U^V l'opération de restriction des fonctions. Le faisceau correspondant est le faisceau des germes de fonctions différentiables (resp. holomorphes).

e. Soit $E \to X$ un espace fibré à fibre vectorielle [8]. F_U est l'ensemble des sections du fibré au-dessus de U. r_U^V est l'opération de restriction des applications. Le faisceau correspondant est le faisceau des germes de section du fibré $E \to X$.

f. X est une variété différentiable. F_U est l'ensemble des formes différentielles différentiables de degré p (cf. [6]) définies dans U et r_U^V la restriction à U des formes définies dans $V \supset U$. Le faisceau correspondant est le faisceau des germes de formes différentielles de degré p .

REMARQUE. - Dans tous les exemples a - f , l'homomorphisme $i : F_U \to \Gamma(U, F)$ est une bijection.

5. Sous-faisceaux, faisceaux quotients.

Soit F un faisceau ; pour tout $x \in X$ soit $G_x \subset F_x$ et $G = \bigcup G_x$. On dit que G est un sous-faisceau de F si

a) G_x est un sous-groupe de F_x pour tout $x \in X$

b) G est un ensemble ouvert de F .

La condition b) est équivalente à la condition

b') Si x est un point de X , et si s est une section de F au-dessus d'un voisinage de x telle que $s(x) \in G_x$, on a $s(y) \in G_y$ pour tout y assez voisin de x .

La restriction de p à G est alors un homéomorphisme local ; et la propriété c de la définition 1 est évidemment vérifiée ; donc G est un faisceau sur X .

Soit G un sous-faisceau de F . Posons $H_x = F_x/G_x$ pour tout $x \in X$. Munissons $H = \bigcup H_x$ de la topologie quotient de la topologie de F (un ensemble de H est ouvert, si il est l'image d'un ouvert de F) H est alors un faisceau appelé faisceau quotient de F par G et désigné par F/G . Pour définir H on peut aussi utiliser un préfaisceau $\underset{\sim}{H}$: On pose $H_U = \Gamma(U, F)/\Gamma(U, G)$, r_U^V est l'homomorphisme défini par passage au quotient de l'homomorphisme

$$\rho_U^V : \Gamma(V, F) \to \Gamma(U, G) .$$

Le faisceau H associé à $\underset{\sim}{H}$ est le faisceau quotient F/G .

L'homomorphisme $i : H_U \to \Gamma(U, H)$ n'est pas sur, en général, mais il est toujours injectif. Soit en effet $t \in H_U$ tel que $i(t) = 0$. Il existe donc, pour tout $x \in U$ un voisinage $U_x \subset U$ tel que $r_{U_x}^U t = 0$. Soit d'autre part s une section de $\Gamma(U, F)$ qui donne t par passage au quotient. Par définition de l'homomorphisme $r_{U_x}^U$, $r_{U_x}^U t$ provient par passage au quotient de la restriction de s à U_x. On a donc $s/U_x \in \Gamma(U , G)$. Comme $\{U_x\}$ est un recouvrement de U quand x varie, $s \in \Gamma(U , G)$ et $t = 0$.

On a donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow \Gamma(U , G) \rightarrow \Gamma(U , F) \rightarrow \Gamma(U , H)$$

Localement on a cependant la proposition : si s est une section de H dans un voisinage U de x, il existe un ouvert $V \subset U$ $(x \in V)$, et une section

$$t \in \Gamma(V , F)$$

telle que la classe de $t(y)$ modulo G_y soit égale à $s(y)$ pour tout y de V.

6. Homomorphismes.

Soient F et G deux faisceaux sur X. Un homomorphisme φ de F dans G est une application continue de F dans G, telle que la restriction φ_x de φ à F_x soit un homomorphisme de F_x dans G_x.

EXEMPLES. - Si G est un sous-faisceau de F, l'injection $G \rightarrow F$ et la projection $F \rightarrow F/G$ sont des homomorphismes.

Soit s une section de F au-dessus de U et φ un homomorphisme de F dans G. $\varphi_x \circ s(x)$ est une section de G au-dessus de U puisque φ est continue et que $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$. On obtient donc ainsi un homomorphisme $\Gamma(U , F) \rightarrow \Gamma(U , G)$

Noyau et image d'un homomorphisme $\varphi : F \rightarrow G$. - Le noyau est l'image réciproque de l'ensemble des $0_x \in G_x$ quand x parcourt X. Soit $N = \bigcup N_x$ cet ensemble, et $I = \bigcup \varphi_x(F_x)$ l'image de F par φ.

N est un sous-faisceau de F. - En effet, φ étant continu et l'ensemble des 0_x étant ouvert (cf. paragraphe 2) N est ouvert dans G ; d'autre part N_x est un sous-groupe de F_x et par conséquent N est un sous-faisceau de F.

I est un sous-faisceau de G. - En effet $I_x = \varphi_x(F_x)$ est un sous-groupe de G_x, d'autre part l'axiome b') du paragraphe 5 est vérifié : soit t une section locale de G telle que $t(x) \in I_x$. Il existe une section locale s de F telle que $\varphi \circ s(x) = t(x)$ donc dans un voisinage de x, $t(y) \in I_y$.

I est isomorphe à F/N. - En effet φ_x définit un isomorphisme de F_x/N_x sur I_x et la démonstration précédente montre que l'application φ est ouverte (transforme des ouverts en des ouverts). On en déduit que la topologie de I est la topologie quotient de F définie par N.

On dira que φ est injectif si φ_x est injectif pour tout x.

On dira que φ est surjectif si φ_x est surjectif pour tout x.

On dira que φ est bijectif s'il est à la fois injectif et surjectif. φ est alors un isomorphisme de F sur G car $N = 0$ et $I = G$. (0 désigne le faisceau constant sur X défini par le groupe nul).

Suites exactes. - Toutes les définitions relatives aux homomorphismes de groupes abéliens peuvent se transposer aux homomorphismes de faisceaux. En particulier une suite d'homomorphismes est dite exacte si l'image de chaque homomorphisme est égale au noyau de l'homomorphisme suivant. Si G est un sous-faisceau de F on a donc la suite exacte à cinq termes.

$$0 \to G \to F \to G/F \to 0 .$$

Γ qui fait passer des faisceaux aux groupes abéliens transforme cette suite exacte en la suite exacte

$$0 \to \Gamma(U , 0) \to \Gamma(U , F) \to \Gamma(U , G/F)$$

(on dit que Γ est exact à gauche) le dernier homomorphisme n'étant pas surjectif en général.

7. Homomorphismes de préfaisceaux.

On a vu au paragraphe 6 que la donnée d'un homomorphisme $\varphi : F \to G$ induisait des homomorphismes $\Gamma(U , F) \to \Gamma(U , G)$. Réciproquement soient 2 préfaisceaux $\underset{\sim}{F}$ et $\underset{\sim}{G}$ donnés respectivement par des F_U (G_U) r_U^V (r'^V_U). Un homomorphisme $\underset{\sim}{F} \to \underset{\sim}{G}$ est un ensemble d'homomorphismes $\varphi_U : F_U \to G_U$ tels que $r'^V_U \varphi_V = \varphi_U r^V_U$

Soient F et G les faisceaux associés à $\underset{\sim}{F}$ et $\underset{\sim}{G}$. L'ensemble des φ_U définit un homomorphisme du système inductif (F_U , r_U^V) dans le système inductif (G_U , r'^V_U) (où U parcourt l'ensemble des voisinages de x) et définit donc par passage à la limite inductive un homomorphisme $\varphi_x : F_x \to G_x$. L'application $\varphi : F \to G$ qui s'en déduit est évidemment continue. Ainsi un homomorphisme de préfaisceaux induit un homomorphisme des faisceaux correspondants. La limite inductive transformant des suites exactes en suites exactes, une suite exacte de préfaisceaux engendre une suite exacte des faisceaux correspondants.

On dira qu'un homomorphisme de préfaisceaux est surjectif (resp. injectif) si tous les φ_U sont surjectifs (resp. injectifs).

REMARQUE. - Un homomorphisme de préfaisceau peut ne pas être surjectif, tout en induisant un homomorphisme surjectif des faisceaux associés. Ainsi si G est un sous-faisceau de F, les préfaisceaux canoniquement associés à F et F/G sont tels que l'homomorphisme $\Gamma(U, F) \to \Gamma(U, G/F)$ n'est pas surjectif en général. Et cependant l'homomorphisme induit sur les faisceaux correspondant $F \to F/G$ est surjectif. C'est au fond ce résultat qu'exprime la proposition énoncée à la fin du paragraphe 5.

8. Un exemple d'homomorphisme.

Soit C le faisceau des germes de fonctions continues à valeurs complexes défini au paragraphe 4 : $F_U = \Gamma(U, C)$ est l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes définies sur U. Considérons l'ensemble F_U^* des fonctions continues sur U à valeurs complexes et non nulles sur U. F_U^* est un groupe abélien pour la multiplication des fonctions. Les F_U^*, r_U^{*V} (r_U^{*V} est la restriction à U des fonctions définies sur $V \supset U$) définissent un faisceau C^*. On définit un homomorphisme $F_U \to F_U^*$ par $f \to e^{2i\pi f}$ pour tout $f \in F_U$ d'où un homomorphisme $C \to C^*$. Si Z désigne le faisceau constant défini par le groupe des entiers rationnels, Z est évidemment le noyau de l'homomorphisme $C \to C^*$ d'où une suite exacte

$$0 \to Z \to C \to C^* \to 0$$

On a un résultat analogue en utilisant les faisceaux définis dans le paragraphe 4, d.

9. Extension d'un faisceau.

Soit F un faisceau sur X et Y une partie de X l'ensemble $p^{-1}(Y)$ muni de la topologie induite de celle de F est un faisceau sur Y, noté $F(Y)$.

Supposons que Y soit fermé dans X $(Y \neq \emptyset)$ et soit F un faisceau sur Y. Il existe alors un faisceau défini à un isomorphisme près sur X, soit $\hat{F}$ tel que $\hat{F}(Y) = F$, $\hat{F}(\complement_X Y) = 0$. De plus $\Gamma(U, \hat{F}) \approx \Gamma(U \cap Y, F)$.

En effet, on doit avoir $\hat{F} = F \cup (\complement_X Y \times 0)$, $\hat{p}(\alpha) = p(\alpha)$ pour $\alpha \in F$, $\hat{p}(x, o) = x$ pour $x \in \complement_X Y$. On a donc $\hat{F}_x = F_x$ si $x \in Y$, $\hat{F}_x = 0$ si $x \in \complement_X Y$. Enfin, on a une topologie sur $\hat{F}$ en prenant pour base de voisinage les ensembles $s(U \cap Y) \cup ((U \cap \complement_X Y) \times 0)$ où U parcourt une base de voisinage de X et s les sections de F au-dessus de $U \cap Y$.

On peut aussi construire un préfaisceau pour $\hat{F}$: $\hat{F}_U = \Gamma(U \cap Y, F)$; si $U \subset V$, r_U^V est la restriction des sections au-dessus de $V \cap Y$ à $U \cap Y$. Comme Y est fermé, un point $x \in \complement_X Y$ possède un voisinage U tel que

$$U \cap Y = \emptyset$$

et par conséquent on a bien $\hat{F}_x = 0$ pour $x \in \complement_X Y$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CARTAN (H.). - Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux, Séminaire Cartan, t. 3 , 1950/51.

[2] GODEMENT (R.). - Ouvrage à paraître.

[3] GROTHENDIECK (A.). - Papiers confidentiels du Séminaire 1956/1957.

[4] HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik ... , Neue Folge, Heft 9).

[5] SERRE (J.P.). - Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math, t. 61, 1955, p. 197-278.

[6] ZISMAN (M.). - Variétés différentiables, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57.

[7] ZISMAN (M.). - Homologie de Čech, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57.

[8] ZISMAN (M.). - Espaces fibrés à fibres vectorielles, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57.