Guy Maury

Les travaux de Northcott sur les anneaux locaux de dimension 1

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 1 (1957-1958), exp. n° 4, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_1_A4_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58

-:-:-:-

2 décembre 1957

LES TRAVAUX DE NORTHCOTT SUR LES ANNEAUX LOCAUX DE DIMENSION 1

par Guy MAURY.

1. Introduction.

Nous voulons dans cet exposé décrire les travaux de NORTHCOTT sur les anneaux locaux de dimension 1 (d'après [8]).

Un anneau local Q de dimension 1 est un anneau noethérien, n'ayant qu'un seul idéal maximal $\mathfrak{m}$, et tel que la plus longue chaîne croissante, d'idéaux premiers, distincts, propres, que l'on puisse former, soit formée de deux termes $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$ étant d'ailleurs un idéal premier quelconque autre que $\mathfrak{m}$. On dit aussi que le rang de $\mathfrak{m}$ est 1 ; le rang de $\mathfrak{p}$ est alors 0 .

Dans tout le mémoire, NORTHCOTT ne s'occupe que du cas où $\mathfrak{m}$ contient un élément non diviseur de zéro ; des considérations fort élémentaires sur les anneaux noethériens montrent que ceci se produit si, et seulement si $\mathfrak{m}$ n'est pas un idéal premier de (0) . Alors tous les idéaux premiers autres que $\mathfrak{m}$ sont tous les idéaux premiers de (0) , et un idéal propre est $\mathfrak{m}$-primaire si, et seulement s'il contient un élément de $\mathfrak{m}$ non diviseur de zéro. Cette dernière remarque servira souvent.

2. Les résultats.

NORTHCOTT s'occupe d'abord de trouver la longueur de l'idéal Qx , engendré par x , x étant un élément de Q non diviseur de zéro, et non inversible. De ce fait, Qx est $\mathfrak{m}$-primaire. (Pour la définition de la longueur d'un idéal primaire, voir, par exemple [7], page 51). Son étude aboutit au théorème suivant :

THÉORÈME 4. - "Soit Q un anneau local de dimension 1 et $Q(0) = \mathfrak{n}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{n}_\ell$, une décomposition de l'idéal (0) où les $\mathfrak{n}_i$ sont $\mathfrak{p}_i$-primaires. Si x_i est la classe de reste de x modulo $\mathfrak{p}_i$, alors

$$\text{long } Qx = \sum_{i=1}^{\ell} \text{long } \mathfrak{m}_i \cdot \text{long} \frac{Q}{\mathfrak{p}_i} x_i \text{ . "}$$

(long abréviation mise pour longueur).

Il établit également un théorème intéressant :

THÉORÈME 1. - "Si P est un Q-module fini, et est un anneau compris dans l'anneau complet des quotients de Q, supposons que x soit un élément de $\mathfrak{m}$, non diviseur de zéro dans Q ; P est un anneau semi local, d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell$. $Px = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_\ell$, où $\mathfrak{q}_i$ est $\mathfrak{m}_i$-primaire et

$$\text{long } Qx = \sum_{i=1}^{\ell} \text{long } \mathfrak{q}_i \cdot \left[\frac{P}{\mathfrak{m}_i} : \frac{Q}{\mathfrak{m}}\right] \text{ . "}$$

Cette première partie du mémoire repose sur la remarque suivante :

$\mathfrak{a}$ étant un idéal $\mathfrak{m}$-primaire, et x étant un élément de Q non diviseur de zéro, les idéaux $\mathfrak{a}x$ et Qx sont $\mathfrak{m}$-primaires. L'isomorphisme de Q-module Q sur le Q-module Qx, défini par l'application $q \to qx$ pour q appartenant à Q, quelconque, permet de voir qu'il a une correspondance biunivoque entre les idéaux de Q contenant $\mathfrak{a}$ et ceux contenus dans Qx contenant $\mathfrak{a}x$; d'où l'on déduit long $\mathfrak{a}x$ - long$\mathfrak{a}$ = long Qx. Le reste des démonstrations n'utilise que des théorèmes classiques des anneaux noethériens.

Aussi est-ce la suite du mémoire qui nous intéressa surtout, suite qui est logiquement indépendante de la partie précédente.

Dans cette seconde partie, il n'est plus question que de domaines locaux de dimension 1, c'est-à-dire que l'on ne suppose plus l'existence de diviseurs de zéro dans Q.

L'outil est la définition des valuations associées à un domaine local Q de dimension 1.

Cet outil sera utilisé d'abord pour préciser le théorème 4, la longueur de Qx étant exprimée à l'aide des valeurs de x pour les valuations associées. Mais surtout il sera utilisé pour démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. - "La fermeture entière Λ d'un domaine local Q de dimension 1 dans le corps des quotients de Q est un anneau à idéaux tous principaux, n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_i$, $i = 1, \ldots, \ell$, propres, ce nombre, ℓ, étant égal aux nombres des idéaux premiers de (0) de la complétion $\overline{Q}$ de Q. Les degrés $\left[\frac{\Lambda}{\mathfrak{m}_i} : \frac{Q}{\mathfrak{m}}\right]$ sont finis".

Enfin NORTHCOTT, sans se servir d'ailleurs des valuations associées, établit le théorème suivant :

THÉORÈME 8. - Λ et Q étant définis comme au théorème 7 : les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) Λ est un Q-module fini.

(2) Q est un sous-espace de Λ.

(3) L'idéal (0) de $\overline{Q}$ est intersection d'idéaux premiers".

Rappelons qu'un anneau local ayant la propriété (3) est dit <u>analytiquement non ramifié</u>.

"Q est sous-espace de Λ " veut dire que si $\mathfrak{M}$ est l'intersection des idéaux maximaux de Λ, la topologie induite dans Q par les $\mathfrak{M}^n$ coïncide avec celle définie par les $\mathfrak{m}^n$. On peut alors trouver un entier naturel t tel que : $\mathfrak{M}^t \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{M}$, et réciproquement, si l'on peut trouver un tel t, Q est sous-espace de Λ.

3. <u>Importance des résultats</u>.

NAGATA a montré que Λ est un Q-module fini, si Q est analytiquement non ramifié (c'est donc en particulier vrai, si Q est un domaine local complet), (vcir [5], page 16, lemme 13). Le théorème 8 établit la réciproque dans le cas de la dimension 1.

Le théorème 7 répond par l'affirmative, dans le cas de la dimension 1 à une conjecture de NAGATA ([5], au bas de la page 15, remarque) :

"Le nombre des idéaux maximaux de la fermeture entière d'un doamaine local Q est-il égal au nombre des idéaux premiers de l'idéal (0) de la complétion de Q ?"

On ne sait encore rien à ce sujet dans le cas de la dimension supérieure à 1.

Remarquons encore à propos du théorème 7 que KRULL avait démontré, dès 1930, que Λ était un anneau semi-local à idéaux tous principaux, mais sans faire, bien entendu, la remarque de NORTHCOTT sur le nombre des idéaux maximaux de Λ (voir [3]). Nous allons maintenant exposer la seconde partie du mémoire : notre rôle a été seulement de développer certains points que NORTHCOTT juge faciles ou connus. Pour ces points nous renvoyons à des démonstrations mises en appendices.

4. Définition des valuations associées à un domaine local Q de dimension 1 .

A. Cas où Q est, de plus, complet. - Démontrons :

"Soit Q un domaine local de dimension 1 complet, dont le corps des quptients est noté F ; soit Q' la fermeture entière de Q dans F ; Q' est un Q-module fini, et par suite, Q' est un anneau de valuation discrète".

La difficulté principale consiste à montrer que Q' est un Q-module fini : NORTHCOTT déduit cela de la structure des anneaux locaux complets (Appendice I). Le reste est alors facile : Q' est une extension entière finie, sans diviseurs de zéro, de l'anneau Q, vérifiant le lemme d'Heusel ; c'est donc un anneau local ([4] , théorème 3), d'ailleurs complet ([1] , proposition 7). La dimension de Q' est égale à 1 ([6] , page 72, proposition 1). Q' est donc local régulier de dimension 1 ([7] , page 76, théorème 8), c'est-à-dire un anneau de valuation discrète.

Cela étant, soient v' la valuation déterminée par Q' , v la valuation induite par v' dans F : v est dite associée à Q . Son groupe des valeurs est le groupe additif de tous les entiers, (voir ci-après B)). $\mathfrak{m}'$ étant l'idéal maximal de Q' , $[\frac{Q'}{\mathfrak{m}'} : \frac{Q}{\mathfrak{m}}]$ est fini. Ce nombre, soit f , est appelé le degré résiduel latent de Q .

B. Cas général : Q non complet. - Soit $\overline{Q}$ la complétion de Q ,

$$\overline{Q}(0) = \mathfrak{n}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{n}_\ell,$$

$\mathfrak{n}_i$ étant $\mathfrak{p}_i$-primaire, $i = 1 , \dots , \ell$, la décomposition de l'idéal (0) de $\overline{Q}$. Les nombres μ_i= longueur de $\mathfrak{n}_i$, pour $i = 1 , \dots , \ell$, sont appelés les multiplicités latentes du domaine local Q . Si Q est complet, il y a une seule multiplicité latente de valeur 1 .

Soit alors $\frac{\overline{Q}}{\mathfrak{p}_i}$, $\overline{F}_i$ étant son corps des quotients. Comme $\mathfrak{p}_i \cap Q = (0)$, $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$ contient Q , qui est d'ailleurs partout dense dans $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$, c'est-à-dire que $\overline{\mathfrak{m}}_i$ étant l'idéal maximal de $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$, pour chaque a' appartenant à $\frac{\overline{Q}}{\mathfrak{p}_i}$ et pour tout entier naturel p donné, on peut trouver a_p appartenant à Q tel que : $a' - a_p \in \overline{\mathfrak{m}}_i^p$. Soit $\overline{Q}_i'$ la fermeture entière de $\frac{\overline{Q}}{\mathfrak{p}_i}$ dans $\overline{F}_i$; en appliquant ce qui vient d'être vu dans la partie A., on voit que $\overline{Q}_i'$ est un anneau de valuation discrète, définissant une valuation $\overline{v}_i$ de $\overline{F}_i$. $\overline{v}_i$ induit dans F une valuation v_i . En remarquant que $\overline{Q}_i$ est extension concordante de $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$ ([7] , page 88, théorème 2), on prouve facilement :

(1) le groupe des valeurs de v_i est le groupe additif de tous les entiers (Appendice II).

(2) Si Q'_i est l'anneau de valuation de v_i , $\overline{Q}'_i$ est sa complétion, (appendice II bis). On notera $\mathfrak{m}'_i$ l'idéal maximal de Q'_i .

On remarquera que Q est valué par v_i non négativement. De plus les v_i ainsi définies ne sont pas équivalentes : il suffit de prendre z appartenant à $\mathfrak{p}_1$ et n'appartenant pas à $\mathfrak{p}_2$, par exemple, et une suite d'éléments q_n de Q tendant vers z . $v_1(q_n)$ tendra vers l'infini et $v_2(q_n)$ tendra vers une limite finie : c'est là la définition même de deux valuations non équivalentes. Résumons :

DÉFINITION. - Les valuations v_i induites par $\overline{v}_i$ dans F sont appelées les valuations associées à Q .

(Dans le cas où Q est complet, on retrouve bien la définition déjà donnée en A.).

Le nombre de ces valuations est égal au nombre des idéaux premiers de zéro de $\overline{Q}$. Si Q'_i est l'anneau de valuation de v_i dans F , alors $\overline{Q}'_i$, défini plus haut, est sa complétion et $Q \subset Q'_i \subset \overline{Q}'_i$.

5. Définition des degrés résiduels latents de Q .

Soit $\overline{\mathfrak{m}}'_i$ l'idéal maximal de $\overline{Q}'_i$, $\left[\dfrac{\overline{Q}'_i}{\overline{\mathfrak{m}}'_i} : \dfrac{\overline{Q}/\mathfrak{p}_i}{\overline{\mathfrak{m}}_i}\right]$ est fini, égal à f_i . Les nombres f_i , pour $i = 1 , \ldots , \ell$, sont les degrés résiduels latents de Q . Dans le cas où Q est complet, on retrouve la définition posée en A .

On a $\overline{\mathfrak{m}}_i = \dfrac{\overline{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{p}_i}$, $\overline{\mathfrak{m}}$ étant l'idéal maximal de $\overline{Q}$, donc $\dfrac{\overline{Q}/\mathfrak{p}_i}{\overline{\mathfrak{m}}_i}$ est égal à $\dfrac{\overline{Q}}{\overline{\mathfrak{m}}}$, et $f_i = \left[\dfrac{\overline{Q}'_i}{\overline{\mathfrak{m}}'_i} : \dfrac{\overline{Q}}{\overline{\mathfrak{m}}}\right] = \left[\dfrac{Q'_i}{\mathfrak{m}'_i} : \dfrac{Q}{\mathfrak{m}}\right]$, puisqu'on a vu que $\overline{Q}'_i$ est la complétion de Q'_i . On peut donc énoncer :

f_i est le degré du corps de reste de v_i sur $\dfrac{Q}{\mathfrak{m}}$.

6. Application au calcul de long Qx, pour x non nul appartenant à Q, des définitions précédentes.

Remarquons que $\text{long}\, Qx = \text{long}\, \overline{Q}x$ ([7], page 97, proposition 7). D'après le théorème 4 :

$$\text{long}\, Qx = \text{long}\, \overline{Q}x = \sum_{i=1}^{\ell} \text{long}\, \mathfrak{n}_i . \text{long}\, \left(\frac{\overline{Q}}{\mathfrak{p}_i}\, x\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i\, \text{long}\, \left(\frac{\overline{Q}}{\mathfrak{p}_i}\, x\right) .$$

Or

$$\text{long}\, \left(\frac{Q}{\mathfrak{p}_i}\, x\right) = f_i\, \text{long}\, \overline{Q}'_i\, x = f_i\, v_i(x) ,$$

d'après le théorème 1 .

Finalement :

$$\text{long}\, Qx = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i\, f_i\, v_i(x) .$$

7. Application à la démonstration du théorème 7 .

Les valuations associées permettent de démontrer le lemme suivant, d'où se déduit le théorème 7 :

LEMME. – "Soit Q un domaine local de dimension 1 et v_i, $i = 1, \dots, \ell$ les valuations associées du corps des quotients F de Q. Soit Λ la fermeture entière de Q dans F. Si y appartient à F, y appartient à Λ si, et seulement si $v_i(y)$ est positif ou nul, pour $i = 1, \dots, \ell$".

La première partie est évidente d'après une remarque faite plus haut suivant laquelle Q'_i contient Q. Alors l'intersection des Q'_i est intégralement close comme intersection d'anneaux intégralement clos, et contient Q, donc sa fermeture entière dans F, Λ.

Soit maintenant $y = \frac{a}{b}$, a, b appartenant à Q, b non nul, et tel que $v_i(y)$ soit positif ou nul pour $i = 1, \dots, \ell$. Montrons que y est entier sur Q. Puisque $v_i(y)$ est positif ou nul, y appartient à Q'_i donc à $\overline{Q}'_i$. Puisque $\overline{Q}'_i$ est un $\frac{\overline{Q}}{\mathfrak{p}_i}$-module fini :

$$a^{n_i} + \tau_1^{(i)}\, a^{n_i - 1}\, b + \dots + \tau_{n_i}^{(i)}\, b^{n_i} = 0 , \quad \text{avec } \tau_j^{(i)} \in \frac{\overline{Q}}{\mathfrak{p}_i} .$$

Soit maintenant $\bar{t}_j^{(i)}$ un représentant de $\tau_j^{(i)}$ en $\overline{Q}$:

$$a^{n_i} + \bar{t}_1^{(i)}\, a^{n_i - 1}\, b + \dots + \bar{t}_{n_i}^{(i)}\, b^{n_i} = 0 \quad (\text{module } \mathfrak{p}_i),$$

et ce pour $i = 1 , \dots , \ell$.

Multiplions les premiers membres de ces ℓ congruences entre eux et élevons à une certaine puissance λ . Si l'on choisit λ assez grand pour que : $(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_\ell)^\lambda = (0)$, on obtiendra :

$$a^n + \bar{t}_1 a^{n-1} b + \dots + \bar{t}_n b_n = 0 ,$$

$\bar{t}_i \in \bar{Q}$, $i = 1 , \dots , n$. Ainsi $a^n \in Q \cap (\bar{Q} a^{n-1} b + \dots + \bar{Q} b^n)$.

Or ceci est équivalent à :

$$a^n \in Q \cap \bar{Q}(Q a^{n-1} b + \dots + Q b^n)$$

et,

$$a^n \in Q a^{n-1} b + \dots + Q b^n ,$$

([7] , page 97, lemme 3). Le lemme est donc démontré.

Il ne signifie pas autre chose que ceci : Λ est l'intersection de tous les anneaux de valuation des v_i . On en déduit que Λ n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux égal au nombre ℓ des v_i (appendice III) et noethérien (appendice III). C'est donc un anneau à idéaux tous principaux (voir [6] , page 74, proposition 1). Remarquons que si $\mathfrak{m}_i$ est un idéal maximal de Λ , $\Lambda_{\mathfrak{m}_i}$ est l'anneau de valuation d'une valuation v_i associée à Q .

$$\frac{\Lambda_{\mathfrak{m}_i}}{\mathfrak{m}_i \Lambda} = \frac{\Lambda}{\mathfrak{m}_i} \quad \text{et l'on a} \quad [\frac{\Lambda}{\mathfrak{m}_i} : \frac{Q}{\mathfrak{m}}] = f_i .$$

On a donc établi le théorème 7 .

8. Démonstration du théorème 8 .

Remarquons tout d'abord que dans l'énoncé de ce théorème, (3) est équivalent à (4) :

(4) : les multiplicités latentes de Q sont toutes égales à 1 .

(1) entraîne (2). - Le conducteur $\mathfrak{f}$ de Q à Λ n'est pas nul, car si $u_1 \dots u_n$ forment une base de Λ sur Q , avec $u_i = \frac{a_i}{b_i}$, b_i non nul, a_i et b_i appartenant à A , $i = 1 , \dots , n$, $\mathfrak{f}$ contient $\prod_{i=1}^n b_i$, qui n'est pas nul. Ou bien $\mathfrak{f} = Q$, et dans ce cas $\Lambda = Q$, ou bien, comme nous le supposerons,

f est $\mathfrak{m}$-primaire. Soient $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell$ les idéaux maximaux de Λ ; $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_\ell = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_\ell$, donc : $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_\ell$, puisque : $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_i$ pour $i = 1, \ldots, \ell$. D'autre part $\mathfrak{m}\Lambda$ a pour idéaux premiers $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell$: en effet $\mathfrak{m}_i \cap Q = \mathfrak{m}$ et il ne peut y avoir d'idéaux premiers de Λ, dont l'intersection avec Q est $\mathfrak{m}$, strictement compris dans $\mathfrak{m}_i$, puisque Λ est extension entière de Q ([6], page 66, corollaire 1).

Il existe ρ et ρ', entiers naturels tels que :

$$\mathfrak{m}^\rho \subseteq f \qquad \text{et} \qquad (\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_\ell)^{\rho'} \subseteq \mathfrak{m}\Lambda .$$

f étant considéré comme idéal de Λ :

$$(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_\ell)^{\rho\rho'} \subseteq f \subseteq \mathfrak{m}.$$

et ceci entraîne (2).

<u>(2) entraîne (3)</u>. - Si (2) est réalisée, $\bar{Q}$ est contenu dans le complétion $\bar{\Lambda}$ de Λ. $\bar{\Lambda}$ est somme directe d'anneaux $\bar{\Lambda}\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, \ell$ ([1], proposition 2). $\bar{\Lambda}\varepsilon_i$ est la complétion de $\Lambda_{\mathfrak{m}_i}\varepsilon_i$, $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell$ étant les idéaux maximaux de Λ ([1], proposition 8). Or $\Lambda_{\mathfrak{m}_i}$ est isomorphe à $\Lambda_{\mathfrak{m}_i}\varepsilon_i$, car aucun élément non nul de Λ n'est diviseur de zéro dans $\bar{\Lambda}$ ([7], page 99, corollaire 1). Donc $\Lambda_{\mathfrak{m}_i}\varepsilon_i$ est un anneau local régulier de dimension 1, donc aussi $\bar{\Lambda}\varepsilon_i$ ([7], page 98) : nous retiendrons que $\bar{\Lambda}\varepsilon_i$ est sans diviseur de zéro. Soit u un élément de Λ, nilpotent, $u = \sum_1^\ell \lambda_i \varepsilon_i$, λ_i appartenant à $\bar{\Lambda}$, $i = 1, \ldots, \ell$. Pour un certain entier naturel r

$$u^r = 0 = \left(\sum_1^\ell \lambda_i \varepsilon_i\right)^r = \sum_1^\ell \lambda_i^r \varepsilon_i .$$

Puisque $\bar{\Lambda}\varepsilon_i$ est sans diviseurs de zéro, $\lambda_i = 0$ et $u = 0$:

Le seul élément nilpotent dans $\bar{\Lambda}$ et par suite dans $\bar{Q}$ est le zéro. Donc (3) est réalisée.

<u>(3) entraîne (1)</u>. - Soit $\bar{Q}(0) = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_\ell$, où les idéaux $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers de rang 0 de $\bar{Q}$. Déduisons de là que Λ est un Q-module fini. Soit $\mathfrak{S}$ l'anneau complet des quotients de $\bar{Q}$; on peut trouver dans $\mathfrak{S}$ des éléments e_i, $i = 1, \ldots, \ell$, tels que : $e_i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{S}\mathfrak{p}_i}$ et

$e_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{S}\mathfrak{p}_j}$, j n'étant pas égal à i ; $e_i e_j = 0$ pour i non égal à j , $e_i^2 = e_i$, pour $i = 1, \ldots, \ell$, $e_1 + \ldots + e_\ell = 1$ (appendice IV). Alors $\mathfrak{S}\mathfrak{p}_i = \mathfrak{S}e_1 + \ldots + \mathfrak{S}e_{i-1} + \mathfrak{S}e_{i+1} + \ldots + \mathfrak{S}e_\ell$.

$\mathfrak{S}/\mathfrak{S}\mathfrak{p}_i$ peut être identifié avec $\mathfrak{S}e_i$ et $\frac{\overline{Q}}{\overline{\mathfrak{p}}_i}$ avec $\overline{Q}e_i$. Mais $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}\mathfrak{p}_i$ est le corps des quotients de $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$, (pour toutes ces propriétés de $\mathfrak{S}$, voir l'appendice IV).

A cause de la proposition du début du paragraphe 4 , la fermeture entière de $\overline{Q}e_i$ dans $\mathfrak{S}e_i$ est un $\overline{Q}e_i$-module fini :

$$(1) \qquad (\overline{Q}e_i)\,\omega_1^{(i)} + \ldots + \overline{Q}e_i\,\omega_n^{(i)}$$

(nous nous sommes arrangés pour que le nombre des générateurs ne dépende pas de i) . Soit P la fermeture entière de $\overline{Q}$ dans $\mathfrak{S}$, et soit π un élément de P ; πe_i est entier par rapport à $\overline{Q}e_i$ et par suite appartient au module (1) . Mais $\pi = \pi e_1 + \ldots + \pi e_\ell$,et π appartient à $\sum_{i,j} Qe_i\,\omega_j^{(i)}$.

Choisissons $\overline{c}$ dans $\overline{Q}$, non diviseur de zéro dans $\overline{Q}$, et tel que $P\overline{c}$ soit contenu dans $\overline{Q}$, ($\overline{c}$ sera, par exemple, le produit des dénominateurs des $\omega_j^{(i)}$). Alors $\overline{Q}\overline{c}$ est $\overline{\mathfrak{m}}$-primaire, $\overline{\mathfrak{m}}$ étant l'idéal maximal de $\overline{Q}$: $\overline{\mathfrak{m}}^h \subseteq \overline{Q}\overline{c}$. Par suite :

$$P\overline{\mathfrak{m}}^h \subseteq P\overline{c} \subseteq \overline{Q} .$$

choisissons c dans Q , non nul, tel que : $c = \overline{c}$, (mod $\overline{\mathfrak{m}}^h$) : $Pc \subseteq P\overline{c} + P\overline{\mathfrak{m}}^h \subseteq \overline{Q}$.

Finalement soit $\lambda = \frac{a}{b}$, (a et b appartenant à Q , b étant non nul), un élément de Λ . En tant qu'élément de $\mathfrak{S}$, λ est entier sur $\overline{Q}$ et par suite appartient à P . Du fait que Pc appartient à $\overline{Q}$, nous déduisons :

$$ac \in \overline{Q}\,\overline{b} \cap Q = Q\,\overline{b}$$

et ainsi λ appartient à $Q\overline{c}^{-1}$.

Λ est donc un sous-module d'un Q-module fini et ainsi, puisque Q est noethérien, Λ est lui-même un Q-module fini.

Appendice I.

a. Q a même caractéristique que son corps des restes : Q contient un sous-anneau Q_0 qui est un anneau de séries formelles à une variable à coefficients dans un corps, et sur lequel Q est un module fini.

b. Q étant un domaine d'intégrité, la seule autre possibilité est que Q soit de caractéristique 0 , alors que son corps des restes est de caractéristique $p \neq 0$.

Dans ce cas Q contient un sous-anneau Q_0 ayant les propriétés suivantes (cf. [2] , ou [9] , page 49, théorème 2) :

1° Q_0 est un domaine local complet dont l'idéal maximal est engendré par p .

2° Q et Q_0 sont concordants et ont le même corps des restes, ce qui implique que Q est un Q_0-module fini, (pour ce dernier point, voir [2] , page 68, théorème 8).

Dans tous les cas Q_0 est donc un anneau de valuation discrète d'un corps F_0 . Le degré $[F : F_0]$ est fini. D'après un résultat de la théorie de la valuation, la fermeture de Q_0 dans F , c'est-à-dire Q' , est un Q_0-module fini, et, a fortiori, un Q-module fini.

Appendice II.

Considérons l'ensemble E des valeurs $\overline{v}_i(a)$ pour a appartenant à F . Cet ensemble est un sous-groupe additif du groupe additif des valeurs de $\overline{v}_i$, c'est-à-dire du groupe additif des entiers. Il suffit de prouver qu'il existe u appartenant à F tel que $\overline{v}_i(u) = 1$, pour prouver que E est l'ensemble de tous les entiers :

Il existe a' , b' appartenant à $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$, tels que $\overline{v}_i(\frac{a'}{b'}) = 1$. Or, $\overline{\mathfrak{m}}'_i$ étant rappelons-le, l'idéal maximal de $\overline{Q}'_i$, on peut trouver a et b appartenant à Q tels que :

$$a' - a \in \overline{\mathfrak{m}}_i^n \ , \quad b' - b \in \overline{\mathfrak{m}}_i^n \ ,$$

n étant un entier naturel donné.(Se servir du fait que Q est partout dense dans $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$ et que $\overline{Q}'_i$ est extension concordante, [7] , page 87 , de $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$). Or si l'on choisit n supérieur à $v_i(a')$ et à $v_i(b')$, on a, (appendice III, lemme 1) :

$$\overline{v}_i(a) = \overline{v}_i(a' + m'^n) = \overline{v}_i(a') \quad ; \quad v_i(b) = \overline{v}_i(b' + m''^n) = \overline{v}_i(b') ,$$

avec m' et m'' appartenant à $\overline{\mathfrak{m}}'_i$. De là : $\overline{v}_i(\frac{a}{b}) = \overline{v}_i(\frac{a'}{b'}) = 1$.

Appendice II bis.

Q'_i étant l'anneau de valuation de v_i , induite par $\overline{v}_i$ dans F , $\overline{Q}'_i$ est la complétion de Q'_i : il est certain que $\overline{Q}'_i$ contient Q'_i et $\overline{Q}'_i$ est extension concordante de Q'_i , car $\overline{\mathfrak{m}}'_i \cap Q'_i$ est formé de tous les a appartenant à F , tels que $\overline{v}_i(a)$ soit positif, c'est donc $\mathfrak{m}'_i$, idéal maximal de Q'_i . Comme $\overline{Q}'_i$ est complet, cela suffit pour assurer la concordance (cf. [7] , page 88 , théorème 2). Il suffira de prouver que Q'_i est partout dense dans $\overline{Q}'_i$. Soit λ' appartenant à $\overline{Q}'_i$: $\lambda' = \frac{a'}{b'}$, a' , b', appartenant à $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$. Si b' appartient à $\overline{\mathfrak{m}}'^{\alpha}_i$ sans appartenir à $\overline{\mathfrak{m}}'^{\alpha+1}_i$, choisissons deux éléments a et b de Q tels que :

$$a' - a \in \overline{\mathfrak{m}}'^{\alpha+n}_i \quad , \quad b' - b \in \overline{\mathfrak{m}}'^{\alpha+n}_i \quad . \qquad \text{(on posera } \lambda = \frac{a}{b}\text{)}.$$

Si l'on prend n assez grand, $\overline{v}_i(a') = \overline{v}_i(a)$, $\overline{v}_i(b') = \overline{v}_i(b)$ (appendice III, lemme 1) donc $\overline{v}_i(\lambda') = \overline{v}_i(\lambda)$. λ appartient à Q'_i .

$$a' - a = \lambda' b' - \lambda b = (\lambda' - \lambda)\, b' + \lambda(b' - b) \ .$$

$(\lambda' - \lambda)\, b'$ appartient à $\overline{\mathfrak{m}}'^{\alpha+n}_i$, et $\lambda' - \lambda$ appartient à $\overline{\mathfrak{m}}'^{n}_i$. Ceci montre que Q'_i est partout dense dans $\overline{Q}'_i$.

Appendice III.

On trouvera la démonstration qui suit, dans SCHILLING [10] , page 100 , lemmes 19 à 22 :

LEMME 1. - Soit V une valuation discrète d'un corps F , et soient des éléments de F , a_i , $i = 1 , \ldots , n$. Si le minimum des $V(a_i)$ est atteint en un seul a_i , par exemple a_1 , alors $V(a_1 + \ldots + a_n) = V(a_1)$.

Posons $b = \dfrac{a_2}{a_1} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1}$ et considérons $V(1 + b)$, $V(b)$ est positif et b appartient à l'idéal maximal de l'anneau de valuation de V , $1 + b$ est donc inversible dans cet anneau et par suite $V(1+b)=0$. D'où l'on déduit le résultat.

LEMME 2. - Si les valuations V_i , $i=1,\ldots,n$, ne sont pas équivalentes, il existe un élément a dans F , tel que $V_1(a)<0$, $V_2(a)>0$, $V_n(a)>0$.

Pour $n=2$, cela résulte de la non équivalence. Pour tout k inférieur à n , supposons le théorème vrai. On peut trouver b et c tels que :

$$V_1(b)<0\ ,\quad V_2(b)>0\ ,\ \ldots\ ,\ V_{n-1}(b)>0\ .$$
$$V_1(c)<0\ ,\quad V_n(c)>0\ .$$

- soit $V_n(b)\geqslant 0$, considérons $a=b^s c$; $V_i(a)=sV_i(b)+V_i(c)$: on peut choisir s pour que $V_i(a)$ soit positif pour $i=2,\ldots,n-1$. On a enfin $V_n(a)\geqslant V_n(c)>0$ et $V_1(a)<0$.

- soit $V_n(b)<0$, considérons $a=\dfrac{b^s c}{1+b^s}$; $V_1(a)=sV_1(b)+V_1(c)-sV_1(b)=V_1(c)$ (lemme 1) ; donc : $V_1(a)<0$. $V_i(a)=sV_i(b)+V_i(c)$ (lemme 1), pour $i=2,\ldots,n-1$, et $V_i(a)$ est positif pour $i=2,\ldots,n-1$, pourvu qu'on choisisse s assez grand. $V_n(a)=sV_n(b)+V_n(c)-sV_n(b)$ (lemme 1) et $V_n(a)=V_n(c)>0$.

LEMME 3. - Il existe un élément a de F , tel que, m étant un entier positif quelconque, $V_1(a-1)\geqslant m$, $V_2(a)\geqslant m$, ... , $V_n(a)\geqslant m$.

D'après le lemme 2 , il existe b appartenant à F , tel que :

$$V_1(b)<0\ ,\quad V_2(b)>0\ ,\ \ldots\ ,\ V_n(b)>0\ .$$

Considérons $a=\dfrac{b^s}{1+b^s}$; $a-1=\dfrac{1}{1+b^s}$:

$$V_1(a-1)=-V_1(1+b^s)=-sV_1(b)>0\quad \text{(lemme 1)}\ .$$
$$V_i(a)=V_i\,b^s-V_i(1+b^s)=sV_i(b)\quad \text{(lemme 1)}\ ;\ i=2,\ldots,n\ .$$

Il suffira de choisir s assez grand. Remarquons que l'on a $V_1(a)=0$.

LEMME 4. - Soient $a_1,\ldots,a_n$ des éléments de F , on peut trouver un a dans F , tel que étant donné m positif, $V_i(a-a_i)\geqslant m$, $1\leqslant i\leqslant n$.

Soit m' le minimum des $V_i(a_j)$ pour tout i et j . D'après le lemme 3 , on peut trouver b_i , tel que : $V_i(b_i-1)\geqslant m-m'$, $V_j(b_i)\geqslant m-m'$ pour

$j \neq i$.

Considérons alors $a = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$:

$$V_i(a - a_i) = V_i[a_1\, b_1 + \dots + a_i(b_i - 1) + \dots + a_n\, b_n] \geqslant m .$$

COROLLAIRE. - Etant donnés $a_1, \dots, a_n$, dans F, on peut trouver a dans F, tel que $V_i(a) = V_i(a_i)$ pour $i = 1, \dots, n$:

Prenons m supérieur à $V_i\, a_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

$$V_i(a - a_i) = V_i(a_i) + V_i(\frac{a}{a_i} - 1) > V_i(a_i) ,$$

donc : $V_i(\frac{a}{a_i} - 1) > 0$. Or ceci entraîne, (lemme 1), que $V_i(a) = V_i(a_i)$.

THÉORÈME. - Soit $\mathfrak{O}_i$ l'anneau de valuation de V_i, $i = 1, \dots, n$. Pour chaque idéal $\mathfrak{A}$, de $\mathfrak{O} = \bigcap_i \mathfrak{O}_i$, on a : $\mathfrak{A} = \bigcap_i \mathfrak{A}_i$, avec $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}\mathfrak{O}_i$. Réciproquement chaque ensemble d'idéaux $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{O}_i$, détermine, dans $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{A}' = \bigcap_i \mathfrak{A}_i$ et l'on a : $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{O}_i \mathfrak{A}'$. En particulier $\mathfrak{O}$ a exactement n idéaux premiers $\mathfrak{P}_i \cap \mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}_i$ étant l'idéal maximal de $\mathfrak{O}_i$.

On a : $\mathfrak{A} \subseteq \bigcap_i \mathfrak{A}_i$. Soit a dans cette intersection. On peut trouver des éléments a_i de $\mathfrak{A}$ tels que $V_i(a_i) = V_i(a)$, $i = 1, \dots, n$. D'après le lemme 3, on peut trouver des c_i tels que : $V_i(c_i) = 0$ et $V_j(c_i) > V_j(a)$ pour $j \neq i$.

Considérons alors $d = \sum_1^n a_i\, c_i$ et $V_i(\frac{d}{a})$. D'après le lemme 1, $V_i(\frac{d}{a}) = 0$, donc $\frac{a}{d}$ appartient à $\mathfrak{O}_i$ pour tout i, donc à $\mathfrak{O}$ et a appartient à $\mathfrak{A}$.

Réciproquement, on a : $\mathfrak{O}_i \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}_i$. Prenons n a_i fixes dans les $\mathfrak{A}_i$. D'après le lemme 4 et son corollaire, il existe a tel que $V_i\, a = V_i\, a_i$ pour tout i . Donc a appartient à $\mathfrak{A}_i$ pour tout i, donc a appartient à $\mathfrak{A}'$, donc $a_i = a.\frac{a_i}{a}$ appartient à $\mathfrak{A}'\mathfrak{O}_i$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{O}_i = A_i$.

Pour démontrer, alors, la dernière partie du lemme, il suffit d'appliquer les résultats précédents aux idéaux premiers, $\mathfrak{P}_i$ de $\mathfrak{O}_i$, $i = 1, \dots, n$. Remarquons que les $\mathfrak{O}_i$ étant des anneaux de valuations discrètes, $\mathfrak{O}$ est noethérien : une chaîne d'idéaux de $\mathfrak{O}$ distincts, propres, croissante, fournit, grâce à la correspondance $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{O}_i$, une chaîne d'idéaux de $\mathfrak{O}_i$ n'ayant qu'un nombre fini d'éléments. Ces n chaînes finies, réciproquement, fournissent, grâce à la correspondance $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,\dots,n} \longrightarrow \mathfrak{A} = \bigcap_1^n \mathfrak{A}_i$, une chaîne d'idéaux d'idéaux de $\mathfrak{A}$, nécessairement égale à la chaîne de départ et visiblement finie.

Appendice IV

Considérons, de façon un peu plus générale que le paragraphe 8 , un anneau $\mathfrak{S}$, anneau complet des quotients d'un anneau noéthérien $\mathfrak{Q}$. Si

$$\mathfrak{Q}(0) = \mathfrak{n}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{n}_\ell ,$$

$\mathfrak{n}_i$ étant $\mathfrak{p}_i$-primaire, est la décomposition de l'idéal (0) de Q . La décomposition de l'idéal (0) de $\mathfrak{S}$ est :

$$\mathfrak{S}(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_\ell , \quad \text{avec} \quad \mathfrak{N}_i = \mathfrak{S}\mathfrak{n}_i ,$$

$\mathfrak{N}_i$ étant $\mathfrak{S}\mathfrak{p}_i$-primaire, $i = 1 , \ldots , \ell$. Les $\mathfrak{S}\mathfrak{p}_i$ sont les seules idéaux premiers de $\mathfrak{S}$ (voir, par exemple, [9] , I, 4 , a., b., et c., en remarquant que l'ensemble des éléments non diviseurs de zéro est multiplicativement stable et ne contient pas zéro).

$\mathfrak{N}_i + \mathfrak{N}_j = \mathfrak{S}$ pour $i \neq j$, i , j quelconques. En effet, si $\mathfrak{N}_i + \mathfrak{N}_j$ était propre, il serait compris dans un idéal $\mathfrak{S}\mathfrak{p}_k$ pour un certain k et il est facile de montrer que ceci est impossible.

Alors on peut trouver e'_{ij} appartenant à $\mathfrak{N}_i$ et e'_{ji} appartenant à $\mathfrak{N}_j$ tels que : $e'_{ij} + e'_{ji} = 1$; pour i fixe et $j \neq i$, considérons $\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\ell} e'_{ji} = e_i$. e_i appartient à $\mathfrak{N}_j$ pour tout j distinct de i .

$$e_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\ell} (1 - e'_{ij}) = 1 \quad (\text{modulo } \mathfrak{N}_i) .$$

De plus : $e_i\, e_j = 0$, pour i distinct de j , puisque $e_i\, e_j$ appartient à $\mathfrak{N}_1 , \ldots , \mathfrak{N}_\ell$. $e_i^2 = e_i + e_i\, m_i$, avec $m_i \in \mathfrak{N}_i$; comme $e_i\, m_i$ appartient à $\mathfrak{N}_1 , \ldots , \mathfrak{N}_\ell$, $e_i\, m_i$ est nul et $e_i^2 = e_i$. Enfin : $e_1 + \ldots + e_\ell = 1 + \eta$. Modulo $\mathfrak{N}_i$, le premier membre est égal à e_i et $\eta = 0$ (modulo $\mathfrak{N}_i$). Comme ceci a lieu quel que soit i , $\eta = 0$ et $e_1 + \ldots e_\ell = 1$.

De cette dernière égalité, on déduit $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}e_1 + \ldots + \mathfrak{S}e_n$. L'homomorphie $x \longrightarrow xe_i$ de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}$, a pour noyau $\mathfrak{N}_i$, car si λe_i est nul, λe_i appartient à $\mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_\ell$, et puisque e_i n'appartient pas à $\mathfrak{S}p_i$, cela entraîne que λ appartient à $\mathfrak{N}_i$. Réciproquement, si λ appartient à $\mathfrak{N}_i$, alors λe_i est nul.

Comme : $\mathfrak{M}_i \cap \overline{Q} = \mathfrak{r}_i$, $\overline{Q}e_i$ est isomorphe à $Q/\mathfrak{r}_i$. Si, maintenant, nous supposons $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{p}_i$, $i = 1 , \ldots , k$, c'est-à-dire si l'idéal (0) de $\overline{Q}$ est l'intersection d'idéaux premiers, $\mathcal{S}/\mathcal{S}\mathfrak{p}_i$ est isomorphe à $\mathcal{S}e_i$: c'est un corps, par ailleurs, qui contient $\overline{Q}/\mathfrak{p}_i$, anneau sans diviseurs de zéro, et c'est d'ailleurs, visiblement, son corps des quotients.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - On the theory of local rings, Ann. of Math., t. 44, 1943, p. 690-708.

[2] COHEN (I.S.). - On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 54-106.

[3] KRULL (Wolfgang). - Ein Satz über primäre Integritätsbereiche, Math. Annalen, t. 103, 1930, p. 450-465.

[4] NAGATA (Masayoshi). - On the theory of henselian rings, Nagoya math. J., t. 5, 1953, p. 45-57.

[5] NAGATA (Masayoshi). - On the theory of henselian rings, II, Nagoya math. J., t. 7, 1954, p. 1-19.

[6] NAGATA (Masayoshi). - Basic theorems on general commutative rings, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Series A, t. 29, 1955, p. 59-77.

[7] NORTHCOTT (D.G.). - Ideal theory. - Cambridge, University Press, 1953.

[8] NORTHCOTT (D.G.). - A general theory of one-dimensional local rings, Proc. Glasgow math. Ass., t. 2, 1954-56, p. 159-169.

[9] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Mémorial des Sciences mathématiques n° 123).

[10] SCHILLING (O.F.G.). - The theory of valuations. - New York, American mathematical Society, 1950 (Mathematical Surveys n° 4).