Spiros Zervos

Sur la localisation des zéros des polynômes d’une variable complexe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1957-1958), exp. nº 3, p. 1-38
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_1_A3_0>

SUR LA LOCALISATION DES ZÉROS DES POLYNÔMES D'UNE VARIABLE COMPLEXE

par Spiros ZERVOS

NOTE. - Pour la commodité du lecteur, les renvois bibliographiques réfèrent (dans la mesure du possible) aux exposés systématiques et non aux Mémoires originaux ; le passage à ces derniers est très facile, à partir des exposés cités.

INTRODUCTION

Depuis les contributions fondamentales de CAUCHY ([11], p. 10 ; [17], p. 95), GAUSS ([11], p. 37 ; [17], p. 7 ; [27], p. 5) et LAGUERRE ([11], p. 38 ; [17], p. 38 ; [27], p. 13), on enregistre un très grand nombre de travaux sur le sujet de la "localisation (ou géométrie) des zéros des polynômes d'une variable complexe" ; on peut se renseigner sur bon nombre d'entre eux dans les livres de DIEUDONNÉ [11], de MARDEN [17] et de WALSH [27]. Il semble, toutefois, que la recherche de la généralité propre (au sens moderne du terme) des problèmes et des résultats de la localisation n'a pas attiré l'intérêt des chercheurs, jusqu'à ce jour. Pourtant, on n'avait pas manquer de remarquer que les résultats intéressants obtenus admettaient le plus souvent des démonstrations "élémentaires" (exemple : Le problème de Landau-Montel ([11], p. 21 ; [17], p. 109) a été abordé pour la première fois par LANDAU comme application, aux polynômes, de ses résultats sur le théorème de Picard ; FEJÉR [13] et MONTEL [19] ont démontré des résultats généraux sur le problème de Landau pour les polynômes y compris le théorème d'ALLARDICE [1], par des procédés nettement élémentaires). Cette constatation avait incité de nombreux chercheurs à rechercher de façon systématique de telles démonstrations. En plus de ses résultats pratiques, cette recherche avait fini par créer la quasi-certitude intuitive que certaines méthodes élémentaires sont liées avec la nature du sujet. On peut voir cela, par exemple, dans les travaux de MONTEL [19], [21] (voir ses démonstrations "algébriques") et dans les préfaces de DIEUDONNÉ [11], MARDEN [17] et WALSH [27].

Quand une telle situation se présente, il est naturel d'essayer de justifier l'intuition en mettant en évidence les structures qui y entrent en jeu effectivement. On est ainsi conduit à rechercher la généralité propre des choses ; c'est ce problème que nous nous sommes posé.

Réponse partielle. - Elle concerne un certain nombre de résultats classiques ; nous les distinguons en deux classes essentiellement différentes, quoique non disjointes.

1. a. - Le problème de la minoration des valeurs absolues de tous les zéros d'un polynôme d'une variable complexe.

Ce problème est un cas particulier de celui de la minoration des normes des zéros d'une série $\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$, à coefficients dans un anneau normé, non nécessairement associatif ou commutatif (les valeurs de la variable étant prises dans le même anneau).

THÉORÈME C. - Les normes des zéros de la série citée sont toutes minorées par la racine positive de l'équation

(E) $$\|a_0\| - \sum_{v=1}^{\infty} (\|a_v\|) \|x\|^v = 0$$

dans le cas où cette racine existe, par le rayon de convergence de la série du 1er membre, dans le cas contraire ([28], lemme 3 ; [29], 6, III). (On voit aisément que ce théorème est également vrai dans certaines structures plus générales que la structure d'anneau).

COROLLAIRE. - Si l'anneau en question contient le corps des réels R , les problèmes de minoration, pour cet anneau et pour R , sont entièrement équivalents (quand on considère les a_i comme des paramètres décrivant l'anneau, la racine positive et les fonctions qui la minorent comme fonctions de ces paramètres, etc).

Le théorème C (de démonstration immédiate) généralise un résultat classique de Cauchy pour les polynômes d'une variable complexe ([11], p. 10 ; [17], p. 95).

On est donc ramené au problème de la minoration de la racine positive de l'équation $b_0 = \sum_{v=1}^{\infty} b_v x^v$, où $b_0 > 0$ et $b_v \geqslant 0$ pour $v \geqslant 1$, en supposant que cette racine existe ; nous avons développé dans [28] et [29] une méthode générale très simple pour l'étude de ce problème ; elle donne immédiatement la plupart des résultats connus et permet de construire autant de fonctions (non-trivialement) minorantes que l'on veut. Dans le cas des polynômes, MARKOVITCH avait donné précédemment une autre méthode générale [18].

En particulier, il résulte du théorème C que les anciennes minorations([11], p. 14-18), ainsi que tout autre minoration que l'on pourrait obtenir à partir de l'équation (E), sont valables non seulement pour les racines réelles ou complexes des équations $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = 0$ (à coefficients dans le corps des complexes) mais également pour les racines contenues dans un sur-anneau normé, non nécessairement associatif ou commutatif, du corps des complexes, tel que la restriction de la norme au corps des complexes coïncide avec la valeur absolue ordinaire.

Signalons enfin que certains théorèmes élémentaires sur les séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu$ restent valables dans un anneau normé, non nécessairement associatif ou commutatif; exemple : la règle d'Abel ([24], p. 12).

b. - Parmi les résultats sur la minoration des valeurs absolues d'au moins p zéros d'un polynôme de degré $n \geqslant p$ d'une variable complexe, considérons ceux qui peuvent être déduits du théorème cité de Cauchy par le seul emploi de propriétés générales des corps commutatifs algébriquement clos ; ils constituent manifestement des théorèmes vrais dans ces corps. Certaines méthodes déjà classiques, par exemple celles introduites par MONTEL ([17], p. 113) et VAN FLECK ([17, p. 114), entrent dans cette catégorie ; voir aussi ([29], 4, II).

Dans les corps cités, le problème de la majoration des valeurs absolues d'au moins p zéros d'un polynôme est entièrement équivalent à celui de la minoration.

Nous ne reviendrons pas (dans cet exposé) sur les cas mentionnés dans 1.

2. Des problèmes concernant les relations entre les zéros d'un polynôme d'une variable complexe et les zéros de sa dérivée.

C'est exclusivement de la généralisation de tels problèmes que nous nous occuperons ci-dessous.

Certaines parties de cet article ont été revues et corrigées par Pierre GABRIEL ; je lui adresse ici mes plus vifs remerciements.

1. Préliminaires.

1. Notations, terminologie.

$\mathfrak{P}(E)$ = ensemble des parties de l'ensemble E .

$\emptyset$ = ensemble vide.

E - A = complémentaire de l'ensemble $E \cap A$ par rapport à E .

Dans le cas où E est muni d'une loi de groupe additif et où $A \subset E$, l'ensemble des éléments $x - y$ de E tels que $x \in E$ et $y \in A$ sera désigné par $E + (- A)$; si $A = \{a\}$, où $a \in E$, on écrira $(- a)$ à la place de $(- \{a\})$.

Toutes les fois que nous introduirons une notion nouvelle, nous la désignerons par une combinaison de lettres, "d.c", etc., que nous spécifierons ; la même méthode sera suivie pour des notions déjà existantes dans la littérature, quand leur nom peut prêter à confusion.

En ce qui concerne les termes habituels, plusieurs sont empruntés à BOURBAKI ; ainsi, on appellera permutation d'un ensemble E, une application biunivoque de E sur lui-même. Les corps des rationnels, des réels, et des complexes seront respectivement désignés par Q, R, et C. On identifiera C, muni de la topologie habituelle, et R^2; il sera appelé plan complexe. N = ensemble des entiers positifs. Si M est un corps, M^* désignera le groupe multiplicatif des éléments non nuls de M (ou l'ensemble des éléments de ce groupe).

Le compactifié $C \cup \{\omega\}$ de C (par adjonction d'un point à l'infini ω), muni de la structure (algébrique) de corps projectif, sera noté C_ω ; nous appellerons "d.c" de C_ω :

- Les parties de C : $\emptyset$, C, les disques ou demi-plans ouverts et leurs réunions avec une partie connexe de leur frontière.
- Les complémentaires de ces ensembles dans C_ω.

NOTATION. - $\mathcal{D}(C_\omega)$ = ensemble des d.c de C_ω.

Notion usuelle de convexité (par rapport à R) dans C ; notation : B_C = ensemble des parties convexes de C.

On ne considérera que des zéros de la fonction $f(x)$ contenus dans son ensemble de définition, et différents de ω.

Le même symbole "=" sera utilisé dans les identités et dans les équations ; le contexte permettra de faire la distinction.

On dira qu'un corps est "de caractéristique ∞" au lieu de dire qu'il est "de caractéristique 0" ; on attribuera ici à ∞ la signification $+ \infty$; ceci permettra d'exprimer certaines relations sous forme d'inégalités.

2. Un problème fondamental pour la localisation.

La donnée des zéros d'un polynôme $f(z)$ détermine entièrement les zéros de sa dérivée $f'(z)$. L'étude de cette dépendance dans le but de "localiser" les zéros de $f'(z)$ a été commencée par GAUSS (loc. cit.), et est à l'origine de nombreux travaux. Le plus souvent on se ramène au problème, équivalent dans C (ou dans C_ω) des relations entre les zéros et les pôles d'une fonction rationnelle $f'(z)|f(z)$; plus généralement on étudie le cas d'une fonction rationnelle de la forme $q(z) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i (z - \alpha_i)^{-1}$, où $\delta_i > 0$ (notation : dans les paragraphes 2, 3, $q(z)$ aura cette dernière signification). Un certain nombre de questions de localisation se ramènent à ce problème. Examinons-le.

3. *Rappel* I.

Nous énonçons ci-dessous certains résultats classiques (sous une forme et dans un ordre appropriés à notre objectif).

Le théorème suivant, dû essentiellement à LAGUERRE (loc. cit.) et à WALSH ([11], p. 38 ; [25], p.653), est fondamental :

THÉORÈME L. - *Si les* δ_i $(i = 1, \dots, n)$ *sont des nombres positifs constants, de somme* 1, *et si le* d.c A *contient tous les points* α_i $(\neq \omega)$, *les deux assertions suivantes sont vraies et* (manifestement) "*équivalentes*" :

a. *Si* $\xi \in C_\omega - A$, *tous les zéros de la fonction de* z

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i (z - \alpha_i)^{-1} - (z - \xi)^{-1}$$

sont contenus dans A.

b. *La relation*

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i (\xi - \alpha_i)^{-1} = (\zeta - \xi)^{-1} \tag{1}$$

fait correspondre à chaque point $\zeta \in C - A$ *un point* $\xi \in A$.

Chacun des énoncés a. et b. entraîne que *si* $\omega \notin A$, $q(z)$ *ne s'annule pas dans* $C - A$, résultat dû essentiellement à GAUSS (loc. cit.) et à LUCAS ([11], p. 38).

Le cas particulier où tous les δ_i sont entiers démontre que *tout* d.c *qui ne contient pas* ω, *et qui contient tous les zéros d'un polynôme* $f(z)$, *contient aussi tous les zéros de sa dérivée* $f'(z)$; proposition équivalente, dans C (ou dans C_ω), au théorème de Gauss-Lucas (loc. cit.) proprement dit (origine historique de la théorie en question), qui affirme que *les zéros d'un polynôme* $f'(z)$ *sont contenus dans l'enveloppe convexe des zéros de* $f(z)$ (cette enveloppe est un certain polygone). Ce théorème est l'un des théorèmes les plus largement utilisés dans la localisation. Signalons que BIERNACKI a trouvé en 1955 une réciproque au théorème de Gauss-Lucas [5].

Les résultats précédents, quoique de démonstration simple, ont constitué jusqu'à aujourd'hui un outil très efficace dans l'étude du problème de Landau-Montel (voir Rappel II, paragraphe 10), ainsi que dans l'étude des polynômes apolaires (voir paragraphe 11) ; chercher dans quelle mesure ceci n'est pas un accident, est l'un des buts du présent exposé.

2. Généralisations de la notion de d.c - Cas des corps.

4. Une caractérisation des d.c . Premières définitions.

Le théorème L énonce des propriétés de certaines parties de C_ω , dites d.c ; nous nous proposons de généraliser la notion de d.c et d'étendre le théorème L à des structures moins fortes que celle de C .

TERMINOLOGIE, NOTATIONS. - Les divers "d.c généralisés" seront notés : "d_ζ.e" , "d.e" , "h_ζ.e" , "h.e" .

$\mathfrak{D}(C_\omega)$ possède la propriété : Si $\zeta \in C$, la permutation φ_ζ de C_ω définie par $\varphi_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$ transforme tout d.c ne contenant pas ζ en un d.c ne contenant pas ω , donc en une partie convexe de C .

Il y a plus ; cette propriété caractérise $\mathfrak{D}(C_\omega)$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{D}(C_\omega))$ (cette assertion est un cas particulier du théorème 12, paragraphe 17).

DÉFINITION 1.a. - Une partie A de C_ω , ne contenant pas $\zeta \in C$, sera appelée "d_ζ.e" (de C_ω) , si l'ensemble $\varphi_\zeta(A)$ est convexe. Notation :
$\mathfrak{D}_\zeta(C_\omega , B_c)$ = ensemble des d_ζ.e de C_ω .

DÉFINITION 1.b. - Une partie A de C_ω sera appelée "d.e" (de C_ω) si elle est soit C_ω , soit C , soit ϕ , soit différente de ces trois ensembles et telle que, pour tout $\zeta \in C - A$, l'ensemble $\varphi_\zeta(A)$ soit convexe. Notation :
$\mathfrak{D}(C_\omega , B_c)$ = ensemble des d.e de C_ω .

D'après le théorème de caractérisation cité ci-dessus, $\mathfrak{D}(C_\omega) = \mathfrak{D}(C_\omega , B_c)$.

Considérons un corps quelconque K , non nécessairement commutatif ; adjoignons à K un élément "infini" ω , et munissons $K \cup \{\omega\}$ de la structure suivante, dite de corps projectif :

1. La partie K de $K \cup \{\omega\}$ garde sa structure initiale de corps.

2. Pour tout $a \in K$, $a + \omega = \omega + a = \omega$.

3. Pour tout $a \in K^\star$, $a\omega = \omega a = \omega$.

4. $0^{-1} = \omega$, $\omega^{-1} = 0$.

Supposons à présent que K est de caractéristique ∞ ; il existe alors au moins un corps qui est à la fois sous-corps non trivial de K et d'un corps isomorphe à R ; soit K_o un tel corps. On définira la convexité (dans K) par rapport à K_o.

Remplaçons, dans les définitions 1.a et 1.b, C par K et C_ω par K_ω ; ces définitions permettent de généraliser la notion de d.c .

5. Définition générale des d.e .

Considérons à présent, pour un corps K de caractéristique quelconque, des ensembles B de parties de K telles que : Pour tout $a \in K$, $B + a = B$ (S.1) ; $B = aB = Ba$ (S.2); $\{a\} \in B$ et $K \in B$ (S.3). Les éléments d'un ensemble B remplaceront par la suite les ensembles convexes.

Toute partie de $\mathfrak{P}(K)$ vérifiant S : 1 , 2 et 3 sera dite S-ensemble. Quand on voudra indiquer que K (respectivement K_ω) est muni d'un S-ensemble donné B, on écrira (K, B) (respectivement (K_ω, B)) à la place de K (respectivement K_ω). Exemple : B_c est un S-ensemble sur C.

Tout élément de B sera appelé "s.e" de (K, B) (ou de (K_ω, B)).

Soit φ_ζ la permutation de K_ω définie par $\varphi_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$.

DÉFINITION 2.a. - Une partie A de K_ω, ne contenant pas $\zeta \in K$, sera appelée "d_ζ.e" de (K_ω, B) si l'ensemble $\varphi_\zeta(A)$ est un s.e . Notation : $\mathcal{D}_\zeta(K_\omega, B)$ = ensemble des d_ζ.e de (K_ω, B).

DÉFINITION 2.b. - Une partie A de K_ω sera appelée "d.e" de (K_ω, B) si elle est soit K_ω, soit K, soit $\emptyset$, soit différente de ces trois derniers ensembles et telle que, pour tout $\zeta \in K - A$, l'ensemble $\varphi_\zeta(A)$ soit un s.e . Notation : $\mathcal{D}(K_\omega, B)$ = ensemble des d.e de (K_ω, B).

Dans le cas particulier : $K = C$ et $B = B_c$, on rejoint les notations du paragraphe 4 ; le théorème cité dans ce paragraphe permet d'utiliser l'abréviation : $\mathcal{D}(C_\omega, B_c) = \mathcal{D}(C_\omega)$.

TERMINOLOGIE. - Soit $(a, b, c, d) \in K^4$. Une permutation de K_ω sera alors appelée homographie à droite, de pôle dc^{-1} (respectivement : à gauche, de pôle

$c^{-1}d$) si elle est de la forme $z' = (az + b)(zc + d)^{-1}$ avec $ad - bc \neq 0$ (respectivement : si elle est de la forme $z' = (cz + d)^{-1}(za + b)$ avec $da - cb \neq 0$) . Chaque homographie à gauche admet une transformation réciproque, qui est une homographie à droite, et réciproquement.

Les hypothèses S.1, S.2 et les identités par rapport à $z \in K$:

$$(az + b)(z - \zeta)^{-1} = a + (a\zeta + b)(z - \zeta)^{-1} \;, \quad (z - \zeta)^{-1}(za + b) = a + (z - \zeta)^{-1}(\zeta a + b)$$

montrent que si A est un d.e $\not\ni \zeta$, toute homographie de pôle ζ le transforme en un s.e ; on pourrait donc remplacer, dans la définition 2.b, φ_ζ par une homographie quelconque de pôle ζ en imposant à chacun des transformés de A ainsi obtenus d'être un s.e .

Pour $(a , \zeta) \in K^2$, on a les identités par rapport à $z \in K$: $z + a - (\zeta + a) = z - \zeta$, $az - a\zeta = a(z - \zeta)$; ceci démontre que chacune des homographies spéciales $z' = az + b$, $z' = za + b$ ($(a , b) \in K^2$ et $a \neq 0$) induit une permutation de $\mathcal{D}(K_\omega , B)$; en fait, il y a plus :

THÉORÈME 1. - <u>Chaque homographie induit une permutation de</u> $\mathcal{D}(K_\omega , B)$.

DÉMONSTRATION. - Puisque les homographies sont des applications bijectives et que leurs applications réciproques sont également des homographies, il suffit de démontrer que chaque homographie applique $\mathcal{D}(K_\omega , B)$ dans lui-même ; cette dernière proposition étant déjà démontrée pour $z' = az + b$, $z' = za + b$, il suffit de la démontrer pour $z' = (\zeta - z)^{-1}$, où $\zeta \neq \omega$. Soit A un d.e et $\xi \in K - \varphi_\zeta(A)$; il suffit de montrer que $\varphi_\xi(\varphi_\zeta(A))$ est un s.e , i.e que $(\varphi_\xi \varphi_\zeta)(A)$ est un s.e ; or, on a :

$$\begin{cases} \varphi_\xi \varphi_\zeta(z) = \begin{cases} \xi^{-1}[(\zeta - \xi^{-1}) - z]^{-1} (\zeta - z) \text{ , si } \xi \neq 0 \;; \\ z - \zeta \text{ , si } \xi = 0 \text{ (cas déjà examiné).} \end{cases} \\ \varphi_\zeta(\zeta - \xi^{-1}) = \xi \in K_\omega - \varphi_\zeta(A) \;; \\ K_\omega - \varphi_\zeta(A) = \varphi_\zeta(K_\omega - A) \quad (\varphi_\zeta \text{ étant bijective}). \end{cases}$$

Donc, les homographies transforment les "domaines circulaires" en "domaines circulaires", tout comme dans le cas classique.

COROLLAIRE 1.1.- <u>Tout</u> d.e $\not\ni \omega$ <u>est un</u> s.e .

DÉMONSTRATION. - Soit A un d.e , $\zeta \neq \omega$, et $\varphi_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$. L'application réciproque de φ_ζ est $f_0(z) = z^{-1}(z\zeta + 1)$; donc, $0 \in \varphi_\zeta(A)$ si et seulement si $\omega \in f_0(\varphi_\zeta(A))(=A)$. Par conséquent, $\omega \notin A$ implique que $0 \notin \varphi_\zeta(A)$; mais 0 est le pôle de f_0 , tandis que $\varphi_\zeta(A)$ est un d.e , d'après le théorème 1. La définition 2.b entraîne alors que $f_0(\varphi_\zeta(A))$ est un s.e .

Exemples triviaux de d.e de (K_ω, B) : Pour tout $a \in K_\omega$, $\{a\}$ et $K_\omega - \{a\}$; ϕ , K et K_ω , par définition.

REMARQUES.

1. Tout d.e qui n'est pas un s.e est l'image d'un s.e par une homographie.

2. Les traces sur K des d.e de (K_ω, B) forment un S-ensemble B' , qui ne coïncide pas avec B , en général. Les d.e $\not\ni \omega$ de (K_ω, B) appartiennent à $B \cap B'$, et forment un S-ensemble B'' .

3. Pour chaque $x \in K_\omega$, posons $V(x)$ = ensemble des d.e $\ni x$. $(V(x))_{x \in K_\omega}$ a les propriétés :

1° Pour tout $a \neq \omega$, $V(x + a) = V(x) + a$.

2° Pour tout $a \neq 0, \omega$, $V(ax) = aV(x)$ et $V(xa) = V(x)a$.

3° $V(x^{-1}) = [V(x)]^{-1}$ (= ensemble des images réciproques des d.e $\ni x$).

La remarque 3 montre que K_ω muni de $(V(x))_{x \in K_\omega}$ présente une sorte d'homogénéïté ; il suffit de connaître un seul $V(x)$ pour les connaître tous. Les conséquences de 3 apparaîtront plus clairement dans le paragraphe 7.

Si $A \subset K_\omega$, on désignera par $V(A)$ l'ensemble des d.e contenant A .

6. Exemples.

E.1. - $B = \{K\} \cup (\bigcup_{x \in K} \{x\}) \cup B_0$, où B_0 = ensemble des parties de K de même nombre cardinal $\underset{\sim}{a}$ ($<$ au nombre cardinal de K). Alors,

$$\mathcal{D}(K_\omega, B) = \{\phi\} \cup \{K_\omega\} \cup (\bigcup_{x \in K_\omega} \{K_\omega - \{x\}\}) \cup B_1 ,$$

où B_1 = ensemble des parties de K_ω de cardinal $\underset{\sim}{a}$.

E.2. - $B = \{K\} \cup B_2$, où B_2 = ensemble des parties de K de cardinal $\leq \underset{\sim}{a}$. Alors, $\mathcal{D}(K_\omega, B) = \{K_\omega\} \cup (\bigcup_{x \in K_\omega} \{K_\omega - \{x\}\}) \cup B_3$, où B_3 = ensemble des parties de K_ω de cardinal $\leq \underset{\sim}{a}$.

E.3. - Soit k_0 un corps contenu entre Q et R , et K un sur-corps de k_0 . B = ensemble des parties convexes, par rapport à k_0 , de K .

E.4. - Même K que dans E.3. B = ensemble des parties de K pouvant être mis sous la forme $A \cup \Gamma$, où : $A \cap \Gamma = \phi$, A est soit vide soit convexe, et Γ est de cardinal $\leq \underset{\sim}{a}$.

E.5. - Définissons à présent une notion de "convexité" dans un espace vectoriel sur un corps de caractéristique quelconque > 2. Soit U un espace vectoriel et k son corps des scalaires.

DÉFINITION 3. - n = entier positif donné $<$ caractéristique de k. <u>Une partie</u> A <u>de</u> U <u>sera appelée</u> "n - convexe" <u>si, pour chaque entier positif</u> $m(\leq n)$, <u>l'appartenance des éléments</u> (<u>distincts ou non</u>) $a_1, \ldots, a_m$ <u>à</u> A <u>implique</u> <u>l'appartenance de</u> $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$ <u>à</u> A.

Si $H \subset U$, l'intersection de toutes les parties n-convexes contenant H sera appelée <u>enveloppe</u> n-<u>convexe</u> de H.

Tout sous-espace affine de U est n-convexe.

On peut toujours supposer que $k \subset U$. Si la caractéristique de k est <u>finie</u> > 2, les seules parties (non vides) n-convexes de k <u>strictement</u> contenues dans le sous-corps premier de k sont les ensembles $\{x\}$, où $x \in k$; ce fait a des conséquences intéressantes.

Soit K un corps, et $k \subset K$; pour le même K, l'ensemble des parties n-convexes de K est indépendant du choix de k. Cet ensemble est un S-ensemble. Si la caractéristique de $K = \infty$, et si S_n = ensemble des parties n-convexes de K, $\bigcap_{n \in N^*} S_n$ = ensemble des parties convexes, par rapport à Q, de K.

E.6. - Soit M une partie donnée du corps <u>commutatif</u> K ; $(0, 1) \in M^2$.
B = ensemble des parties A de K telles que, pour tout n, l'appartenance des éléments $a_1, \ldots, a_n$ à A implique l'appartenance de $\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i$ à A, pour toute suite $\mu_1, \ldots, \mu_n$ d'éléments de M telle que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$.
(Cet S-ensemble est particulièrement utile à certaines applications).

EXEMPLE. - n = entier positif donné $<$ caractéristique de K ; M = ensemble des fractions $\frac{\lambda}{m}$, où λ et m sont des entiers ≥ 0 arbitraires, avec $\lambda \leq m \leq n$ et $m \neq 0$. Alors, B est l'ensemble des parties n-convexes de K.

7. <u>Remarques.</u>

Le théorème 1 et le corollaire 1.1 montrent que <u>les</u> d.e <u>de</u> (K_ω, B) <u>possèdent</u>

certaines propriétés des d.c de C_ω ; on est ainsi amené à chercher s'il existe d'autres propriétés communes à $\mathcal{D}(C_\omega)$ et à $\mathcal{D}(K_\omega, B)$.

1. Les exemples E : 1, 2 et 3 montrent que le complémentaire d'un d.c n'est pas, en général, un d.c . Une exception importante est fournie par (C_ω, B_c) .

2. DÉFINITION. - Un ensemble $\mathcal{G}$ de parties d'un ensemble E définit sur E une structure "hypotopologique" (: une "hypotopologie") s'il est un $\cup$-demi treillis complet, contenant ϕ et E . Les éléments de $\mathcal{G}$ sont appelés ensembles ouverts de l'hypotopologie définie par $\mathcal{G}$.

Définissons les notions d'ensemble fermé, de voisinage, d'adhérence, etc. de la même manière qu'on les définit dans la topologie générale à partir des ensembles ouverts. Ainsi, dans l'hypotopologie, les voisinages d'un point vérifient tous les axiomes de la topologie pour les voisinages (BOURBAKI, Topologie générale, Chap I) sauf, éventuellement, l'axiome des intersections finies.

On peut vérifier facilement que la majorité des "théorèmes" et des "propositions" contenues dans le Chapitre I du texte cité de BOURBAKI expriment des propriétés hypotopologiques.

Les rapports de l'hypotopologie avec les "relations de fermeture" de E.H. MOORE (voir : GARRETT BIRKHOFF, Lattice Theory, p. 49) sont évidents ; O. ORE ([22] ; [23]) a mis en relief l'importance de la notion et il en a appronfondi les conséquences générales. (La terminologie de ces auteurs diffère de la nôtre).

APPLICATION. - La remarque 3 du paragraphe 5 suggère de considérer l'hypotopologie suivante sur K_ω : ensemble des voisinages de $x \in K_\omega$ = ensemble des parties de K_ω contenant au moins un d.c $\ni x$ non réduit à $\{x\}$. (On suppose que B est donné d'avance). Dans les notations du paragraphe 5, $V(x) - \{x\}$ est alors un système fondamental de voisinages de x ; (nous avons préféré $V(x) - \{x\}$ à $V(x)$ car ce dernier choix donnerait toujours la topologie discrète) les homographies sont des homéomorphismes puisque (d'après la remarque 3 du paragraphe 5) elles transforment $V(x) - \{x\}$ en $V(y) - \{y\}$; par conséquent, les classes d'intransitivité de $\mathcal{D}(K_\omega, B)$, par rapport au groupe engendré par les homographies, sont constituées d'ensembles homéomorphes entre eux.

L'ensemble des d.c non réduits à un point forme une base de l'hypotopologie en question.

EXEMPLE. - Considérons le cas de (C_ω , B_c) . La topologie de C_ω est moins fine (en tant qu'hypotologie) que l'hypotopologie définie ci-dessus. Il existe 11 classes d'intransitivité de $\Omega(C_\omega)$ (par rapport au groupe des homographies), dont l'explicitation est évidente.

3. Le problème suivant est souvent non-trivial : (K_ω , B) étant donné, chercher la signification "concrète" des d.e .

8. La forme intrinsèque du théorème L .

HYPOTHÈSES et NOTATIONS. - E' = ensemble non-vide ; $F \subset \mathfrak{P}(E')$ est un $\cap$-demi treillis complet (le fait évident que F est alors un vrai treillis ne sera pas utilisé ici). Tout élément de F sera appelé " f.e " . L'intersection de tous les f.e contenant un ensemble donné A est manifestement un f.e , qui sera appelé f-enveloppe de A , et noté $f(A)$; on désignera par f l'application isotone $\mathfrak{P}(E') \to F$ définie par $A \to f(A)$. E = ensemble non vide ; φ est une application $E \to E'$.

DÉFINITION 4.a. - Un élément A de $\mathfrak{P}(E)$ sera appelé " h_φ.e " si $\varphi(A)$ est un f.e .

THÉORÈME 2.a. - Si un h_φ.e θ contient un ensemble A , on a

$$\theta \supset \overset{-1}{\varphi}(f(\varphi(A))) .$$

DÉMONSTRATION. - $\varphi(\theta)$ est un f.e contenant $\varphi(A)$, donc : $\varphi(\theta) \supset f(\varphi(A))$.

COROLLAIRE 2.a.1. - Si un h_φ.e θ contient un ensemble A et si

$$\begin{cases} y \in E' \\ \overset{-1}{\varphi}(y) \cap \theta = \emptyset \end{cases} , \text{ alors } y \notin f(\varphi(A)) .$$

Associons à chaque ensemble $A \subset E$ une famille $(\varphi_i)_{i \in I_A}$ d'applications $\varphi_i : E \to E'$.

DÉFINITION 4.b. - Un élément A de $\mathfrak{P}(E)$ sera appelé "h.e" , par rapport à $(\varphi_i)_{i \in I_A}$, si, pour tout $i \in I_A$, $\varphi_i(A)$ est un f.e .

THÉORÈME 2.b. - Si un h.e H contient un ensemble A , on a, pour tout $i \in I_H$,

$$H \supset \overset{-1}{\varphi_i}(f(\varphi_i(A))) .$$

COROLLAIRE 2.b.1. - <u>Si un</u> h.e H <u>contient un ensemble</u> A <u>et si, pour tout</u> $i \in I_H$,

$$\begin{cases} y \in E' \\ \overset{-1}{\varphi}(y) \cap H = \phi , \end{cases} \quad \text{alors} \quad y \notin f(\varphi_i(A)) , \ \text{pour tout} \ i \in I_H .$$

APPLICATION. - $E = E' = C_\omega$, $F = B_c$, $I_A = C - A$, et $\varphi_i(z) = (i - z)^{-1}$; sous ces hypothèses, le théorème 2.b donne le théorème L et le corollaire 2.b.1 donne le théorème de Gauss-Lucas (Rappel I) ; on peut considérer les théorèmes 2.a et 2.b comme constituant la forme intrinsèque (ici : ensembliste) du théorème L, et le corollaire 2.b.1 comme la forme intrinsèque du théorème de Gauss-Lucas.

9. <u>Applications à la géométrie</u> (: <u>localisation</u>) <u>des zéros des polynômes d'une variable</u>.

G.1. - Supposons que $E = E'$ et que E contient au moins 2 éléments ; $\phi \neq E_0 \subset E$; soit g une application de l'ensemble Δ des parties <u>finies</u> non vides de E_0 dans $\mathfrak{P}(E)$ satisfaisant à la condition : Pour tout $A \in \Delta$, $A \subset g(A)$,. Appelons "g.e" toute partie X de E_0 telle que $A \in X \cap \Delta$ implique que $g(A) \subset X$. Posons : Γ = ensemble des g.e de E_0 . Γ est un $\cap$-demi-treillis complet, donc un ensemble F (du paragraphe 8) sur E_0 , donc un ensemble F sur tout sur-ensemble de E_0 . Particularisons à présent ces hypothèses :

G.2. - E_0 = corps commutatif K ; $E = E' = K_\omega$; M = partie donnée de K , contenant 0 et 1 ; B = partie de $\mathfrak{P}(K)$ <u>définie comme dans</u> E.6 (paragraphe 6). B est alors un ensemble Γ (de G.1) sur K , donc un ensemble F sur K_ω ; par conséquent, B <u>est à la fois un</u> S-<u>ensemble sur</u> K <u>et un ensemble</u> F <u>sur</u> K_ω ; si donc φ est l'application $z' = (\zeta - z)^{-1}$, les d_ζ.e de (K_ω , B) sont des h_φ.e et on peut appliquer à ces d_ζ.e le théorème 2.a. Supposons en plus que :

1° A est <u>fini,</u> et

2° $I_H = K - H$. Alors, pour $\varphi_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$ on obtient le :

THÉORÈME 3. - <u>Si</u> (<u>dans les hypothèses</u> G.2) $\mu_i \in M$, $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$, <u>et le</u> d.e H <u>contient tous les éléments</u> $\alpha_i (\neq \omega)$, <u>les deux assertions suivantes sont vraies</u> :

a. <u>Si</u> $\xi \in K_\omega - H$, <u>tous les zéros de la fonction de</u> z

$$\sum_{i=1}^n \mu_i (z - \alpha_i)^{-1} - (z - \xi)^{-1}$$

sont contenus dans H.

b. La relation

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\zeta - \alpha_i)^{-1} = (z - \xi)^{-1}$$

fait correspondre à chaque élément $\zeta \in K - H$ un élément $\xi \in H$.

COROLLAIRE 3.1. - Si, en plus des hypothèses du théorème 3, $\omega \notin H$ (i.e. si H est un s.e ; corollaire 1.1), alors H contient toutes les racines de l'équation en ζ

(P) $$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\zeta - \alpha_i)^{-1} = 0 .$$

Les résultats 3.a et 3.b généralisent, respectivement, les théorèmes L.a et L.b (du Rappel I) ; le corollaire 3.1 généralise le théorème de Gauss-Lucas.

COROLLAIRE 3.1.1. - Si chaque élément d'une famille $(H_i)_{i \in I}$ de d.e $\not\ni \omega$ contient les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ contient toutes les racines de l'équation (P).

Dans la suite, nous nous contenterons d'énoncer les résultats analogues au corollaire 3.1, les énoncés analogues au corollaire 3.1.1 étant évidents modulo les premiers.

Supposons à présent que n est un entier positif donné < caractéristique de K, et que B est l'ensemble des parties n-convexes de K. L'application $\Delta \longrightarrow \mathfrak{D}(K)$, définie par : $A(\in \Delta) \longrightarrow$ enveloppe n-convexe de A, est une application g (de G.1) ; B vérifie donc les hypothèses de G.2. Supposons en plus que K est algébriquement clos, et désignons l'ensemble de ces hypothèses par G.3.

THÉORÈME 4. - Si, dans les hypothèses G.3, $p(z)$ est un polynôme de degré $\leq n$, à coefficients dans K, tout d.e $\not\ni \omega$ contenant tous les zéros de $p(z)$ contient également tous les zéros de sa dérivée formelle $p'(z)$.

COROLLAIRE 4.1. - Si, dans les hypothèses du théorème 4, H est un d.e $\not\ni \omega$ ne contenant pas tous les zéros de $p'(z)$, $K - H$ contient au moins un zéro de $p(z)$.

COROLLAIRE 4.1.1. - Si, dans les hypothèses du théorème 4, H est un d.e $\not\ni \omega$ ne contenant pas tous les zéros de la m-ième dérivée formelle de $p(z)$, $K - H$ contient au moins un zéro de $p(z)$.

Dans le cas classique de (C_ω , B_c) , le théorème 4 donne le théorème de Gauss-Lucas, et le corollaire 4.1.1 donne un lemme essentiel dans la solution du problème de Landau par FEJÉR [13] ; pour le rappeler, nous appellerons le corollaire 4.1.1 "lemme F".

Le théorème 3.a donne le

COROLLAIRE 4.2. - Si, dans les hypothèses du théorème 4, H est un d.e contenant tous les zéros de $p(z)$ et $\xi \in K - H$, alors H contient tous les zéros du polynôme $q(z) = np(z) - (z - \xi)p'(z)$.

COROLLAIRE 4.2.1. - Si, dans les hypothèses du théorème 4, H est un d.e ne contenant ni 0 ni la totalité des zéros de $q(z) = np(z) - zp'(z)$, il existe au moins un zéro de $p(z)$ qui n'appartient pas à H .

Dans le cas de (C_ω , B_c) , ce lemme est dû à BALLIEU [3] ; il est essentiel dans sa solution du problème de Landau ; pour le rappeler, nous appellerons le corollaire 4.2.1 "lemme B" .

Chacun des lemmes F , B permet de démontrer facilement les "d.e -généralisations" de certains résultats classiques relatifs au problème de Landau-Montel ; il suffit d'"imiter" la marche, respectivement, de Fejér, si l'on part du lemme F , de Ballieu, si l'on part du lemme B [13], [3].

10. Le problème de Landau-Montel.

LANDAU a posé le problème suivant : Dans C , le polynôme

$$p_m(z) = 1 + z + a_{V_1} z^{V_1} + \dots + a_{V_{m-1}} z^{V_{m-1}} ,$$

à $m + 1$ termes non nuls, a-t-il toujours un zéro dont la valeur absolue ne dépasse pas un nombre $\sigma(m)$, ne dépendant que du nombre des termes non nuls de $f(z)$ [19] ?

Remplaçons dans cet énoncé "C" par "K_ω" , où K est un corps commutatif algébriquement clos, "dont ... $\sigma(m)$" par "qui soit contenu dans le complémentaire d'un d.e $H(m)$" ; le problème ainsi obtenu a un sens ; en voici une réponse :

THÉORÈME 5. - Si l'entier positif V_{m-1} est $<$ caractéristique de K , et si H est un d.e ne contenant ni 0 , ni l'élément

$$- \left(\frac{V_1}{V_1 - 1} \cdots \frac{V_{m-1}}{V_{m-1} - 1} \right) ,$$

<u>alors</u> $K - H$ <u>contient au moins un zéro de</u> $p_m(z)$.

DÉMONSTRATION. - $p_2(z) = 1 + z + a_{V_1} z^{V_1}$; le polynôme

$$q_2(z) = V_1\ p_2(z) - z\ p_2'(z) = V_1 + z(V_1 - 1)$$

a le seul zéro $-\frac{V_1}{V_1-1}$. Dans ce cas, le théorème 5 résulte du lemme B . Achevons la démonstration par récurrence. Supposons le théorème établi pour $p_\lambda(z)$, et considérons

$$q_{\lambda+1}(z) = V_\lambda\ p_{\lambda+1}(z) - z\ p_{\lambda+1}'(z) = V_\lambda\left(1 + \frac{V_\lambda - 1}{V_\lambda} z + \frac{V_\lambda - V_1}{V_\lambda} a_1\ z^{V_1} + \dots + \frac{V_\lambda - V_{\lambda-1}}{V_\lambda} a_{\lambda-1}\ z^{V_{\lambda-1}}\right)$$

Le polynôme entre crochets est le transformé par $z = \frac{V_\lambda}{V_\lambda - 1} x$ d'un polynôme de la forme $p_a(x)$, i.e. d'un polynôme vérifiant l'hypothèse de la récurrence. D'autre part, pour $V_\lambda > 1$, H est un d.e si et seulement si $\frac{V_\lambda}{V_\lambda - 1} H$ est un d.e , d'après le théorème 1.

Dans le cas de (C_ω , B_c) , le théorème 5 rejoint le résultat de BAILIEU ([3], p. 129) cité dans le Rappel II.

RAPPEL II. - LANDAU et HURWITZ [13] ont résolu des cas particuliers du problème de Landau. La première solution générale fut donnée par ALLARDICE [1]. La méthode de démonstration la plus féconde est due à FEJÉR ([13], utilisation du théorème de Gauss-Lucas). CASABONNE a donné une démonstration intéressante de la partie qualitative du théorème d'Allardice (Selecta Montel, p. 204). MONTEL a montré, dans un Mémoire fondamental [19], le fond analytique du problème (dans C) et l'a généralisé dans plusieurs directions ; les nombreux problèmes posés par MONTEL furent étudiés d'une manière très approfondie, et certains d'entre eux furent résolus. On peut trouver des indications sur ces importants travaux dans BIERNACKI [4], ainsi que dans [11] et [17]. En ce qui concerne le problème de Landau proprement dit que nous avons examiné ci-dessus, BALLIEU ([3], p. 129) a obtenu une nette amélioration du théorème d'Allardice ; le même résultat fut retrouvé, indépendamment, par VYTHOULKAS [26].

NOTE. - Rappelons le théorème de Landau pour les fonctions analytiques. Si $a_0 \in C$ <u>et</u> $a_1 \in C^*$, <u>il existe un nombre</u> $R = R(a_0 , a_1)$ <u>tel que toute fonction</u> $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v\ z^v$, <u>régulière pour</u> $|z| \leq R$, <u>prend dans ce disque au moins une des valeurs</u> 0 , 1 . (TITCHMARSH, Theory of Functions, seconde édition, p. 283).

Historiquement, ce théorème est à l'origine du problème de Landau-Montel.

On a cherché à démontrer ce théorème par des méthodes analogues à celles liées au lemme F, énoncé pour (C_ω, B_c). Le fait suivant nous semble probable : Ou une telle démonstration est impossible, ou il existe un "d.e-théorème" de Landau (au moins sous certaines hypothèses supplémentaires).

11. Polynômes apolaires.

Sauf mention expresse du contraire, la signification des lettres f, p, g, q, F dans ce paragraphe n'aura aucun rapport avec leur signification dans les paragraphes précédents.

On supposera invariablement dans tout ce paragraphe que : le corps K est commutatif et algébriquement clos ; les polynômes considérés sont de degré n tel que, pour tout $\lambda (\in N^*) \leq n$, $C_n^\lambda <$ caractéristique de K $\left(C_n^\lambda = \frac{n \ldots (n-\lambda+1)}{\lambda !}\right)$; B = ensemble des parties n-convexes de K ; $\mathcal{D} = \mathcal{D}(K_\omega, B)$.

Rappelons la définition des polynômes apolaires dans C : $f(z) \sum_{v=0}^n C_n^v a_v z^v$ et $g(z) = \sum_{v=0}^n C_n^v b_v z^v$ sont dits "apolaires" quand leurs coefficients vérifient la relation $\sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v a_v b_{n-v} = 0$. Cette définition se transporte dans K.

REMARQUE. - Les énoncés et la déduction d'un certain nombre de résultats bien connus liant les d.c de C_ω et les polynômes apolaires, en particulier le théorème fondamental de GRACE, n'utilisent en réalité que

1° les "quatre opérations" et leurs propriétés générales,

2° l'existence et l'unicité dans C de la décomposition des polynômes en facteurs linéaires,

3° le théorème L ; par conséquent, ces résultats sont vérifiés par les d.e et les polynômes apolaires dans K_ω. Enonçons certains de ces résultats sous leur nouvelle forme. (Notation : Les fonctions symétriques élémentaires des lettres $z_1, \ldots, z_n$ seront désignées par les lettres S_i $(i = 1, \ldots, n)$, dans l'ordre $S_1 = \sum_{j=1}^n z_j, \ldots, S_n = z_1, \ldots, z_n$; on posera : $S_o = 1$).

THÉORÈME de coincidence (SZEGÖ 1922, [20] p. 16). - Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les zéros du polynôme $f(z) \sum_{i=0}^n C_n^i a_i z^i$, et $(z_1, \ldots, z_n)$ une solution de la relation

$$(R) \qquad \sum_{i=0}^n a_p S_p = 0$$

Tout d.c qui contient tous les α_i contient au moins un z_i.

La démonstration est essentiellement la même que dans MONTEL ([20], p. 16) ; la seconde partie de cette démonstration se ramène au théorème L, i.e. au théorème 3.

Les $z_1, \dots, z_n$ du théorème précédent sont les zéros du polynôme $g(z) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i b_i z_i$, où les b_i sont définis par $S_i = (-1)^i C_n^i b_{n-1} b_n^{-1}$. (R) s'écrit alors : $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i a_i b_{n-i}$;par conséquent, $f(z)$ et $g(z)$ sont apolaires ; le théorème de Szegö revient donc à : Tout d.c contenant tous les zéros de f contient au moins un zéro de g. La symétrie des hypothèses dans l'explicitation de cet énoncé entraîne que les conclusions sont elles-mêmes symétriques ; donc : Si les polynômes $f(z)$ et $g(z)$ sont apolaires, tout d.c contenant tous les zéros de l'un d'eux contient au moins un zéro de l'autre. (GRACE, 1901, ([20], p. 19).

NOTE. - Le théorème de Grace montre que dans les hypothèses du théorème de Szegö, tout d.c contenant tous les z_i contient au moins un α_i. "Classiquement" on démontrait ceci de la manière suivante en montrant que sinon il existerait un d.c Θ contenant tous les z_i et pas de α_i, puisque $C_\omega - \Theta$ est lui aussi un d.c ,il existerait donc un d.c contenant tous les α_i et pas de z_i, ce qui est absurde. Mais, dans (K_ω, B) le fait que "Θ est un d.c" n'entraîne pas a priori que "$K_\omega - \Theta$ est un d.c".

APPLICATIONS.

1. THÉOREME de composition des polynômes (SZEGÖ [17], p. 47). - Soient $f(z) = \sum_{v=0}^{n} C_n^v a_v z^v$, $g(z) = \sum_{v=0}^{n} C_n^v b_v z^v$, $p(z) = \sum_{v=0}^{n} C_n^v a_v b_v z^v$; soient α_i les zéros de $f(z)$, β_i ceux de $g(z)$, et γ_i ceux de $p(z)$. Alors, tout d.c contenant tous les α_i contient des α'_i tels que $\gamma_i = -\alpha'_i \cdot \beta_{j_i}$ $(i = 1, \dots, n)$.

DÉMONSTRATION. - On applique le théorème de Grace aux polynômes $f(z)$ et $z^n \cdot g(-\gamma_i z^{-1})$, lesquels sont apolaires en vertu de l'égalité

$$\sum_{v=0}^{n} (-1)^v C_n^v a_v [(-1)^v b_v \gamma_i^v] = 0 .$$

1.b. - En 1955, BIERNACKI a déduit du théorème précédent le résultat suivant, dont l'importance est évidente, puisque il constitue en quelque sorte une réciproque du théorème de Gauss-Lucas, dans C [5] : Supposons que tous les zéros d'un polynôme soient contenus dans un domaine A borné, fermé et convexe. Soit $a \in A$

Alors, tous les zéros de $\int_a^z f(z)\,dz$ sont contenus dans le domaine fermé $Y(A, a)$ contenant A et délimité par la courbe Γ, transformée par homothétie de la podaire de la frontière de A par rapport au point a, le centre d'homothétie étant a et le rapport d'homothétie égal à 2. On constate aisément que la frontière de $Y(A, a)$ est aussi l'enveloppe des circonférences qui passent par le point a et dont les centres décrivent la frontière de A. Le domaine $Y(A, a)$ ne peut être remplacé par un domaine strictement contenu dans $Y(A, a)$.

En fait, le théorème de Biernacki précise un théorème vrai dans nos hypothèses générales.

Soient : H un d.c contenant les zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $f(z) = \sum_{v=0}^{n} C_n^v a_v z^v$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ les zéros de $h(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(z)\,dz$ ($\int$ ayant ici un sens purement formel) ; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les zéros de

$$g(z) = \frac{1}{z}\int_0^z (1+z)^n\,dz = \frac{(1+z)^{n+1}-1}{(n+1)z} = \sum_{v=0}^{n} C_n^v \frac{z^v}{v+1}.$$

Alors, $h(z)$ est composé (dans le sens du théorème de composition des polynômes) des polynômes $f(z)$ et $g(z)$; H contient donc des éléments α_i' tels que $\gamma_i = -\alpha_i' \beta_{j_i}$ ($i = 1, \ldots, n$) ; donc $\gamma_i = (-\beta_{j_i}) \cdot \alpha_i'$. L'ensemble $(-\beta_{j_i})H$ est un d.c ; d'autre part, les β_{j_i} sont les $\neq 0$ racines de l'équation $(z+1)^{n+1} = 1$, i.e. les n-éléments $-1 + \sqrt[n+1]{1}_i$ ($\sqrt[n+1]{1}_i$ décrit l'ensemble des n $(n+1)$-ièmes racines de l'unité différentes de 1). D'où le

THÉORÈME 6. - Si, dans les hypothèses générales de ce paragraphe, H est un d.c contenant les zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ du polynôme $f(z)$ de degré n, chaque zéro du polynôme $h(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(z)\,dz$ (intégration formelle) est contenu dans au moins un des d.c $(-1 + \sqrt[n+1]{1}_i)H$ ($i = 1, \ldots, n$). (Nous n'avons pas supposé que $0 \in H$ ou que H est n-convexe).

2. RAPPEL III. - Un corollaire célèbre du théorème de Grace est le résultat suivant, démontré indépendamment par GRACE (1901) et HEAWOOD (1907), ([17], p. 84) : Considérons, dans C un polynôme $f(z)$ de degré constant n qui a deux zéros distincts z_1, z_2 fixes, et les autres zéros entièrement arbitraires. Alors,

1° z_1 et z_2 déterminent entièrement un disque contenant au moins un zéro de $f'(z)$;

2° le disque de centre $\frac{z_1+z_2}{2}$ et de rayon $\frac{|z_2-z_1|}{2}\cot\frac{\pi}{n}$ est un tel disque.

L'importance de ce résultat réside dans ce qu'il "remplace" dans C le théorème de Rolle. (Toutefois, il n'est pas une généralisation de ce dernier. DIEUDONNÉ [9] et FAVARD [12] ont donné des généralisations du théorème de Rolle pour des classes importantes des fonctions).

L'extension du théorème de Grace à K_ω entraîne l'extension suivante du théorème de Grace-Heawood : dans K_ω, et dans les hypothèses générales de ce paragraphe, considérons deux zéros distincts de $f(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$, z_1 et z_2 ; alors $\sum_{v=1}^{n} a_v(z_1^v - z_2^v) = 0$; mais

$$\sum_{v=1}^{n} va_v \frac{z_1^v - z_2^v}{v} = 0$$

est une relation linéaire par rapport aux coefficients va_v de la dérivée formelle $f'(z)$ de $f(z)$; elle détermine donc, à un commun multiple près, les coefficients d'un polynôme $g(z)$ apolaire à $f'(z)$; les coefficients de $g(z)$ ne dépendant que de z_1, de z_2 et de n ; en fait,

$$g(z) = \sum_{v=1}^{n}(-1)^v C_n^v(z_1^v - z_2^v)z^{n-v} = (z - z_1)^n - (z - z_2)^n .$$

D'où le

THÉORÈME 7. - Dans K_ω, et dans les hypothèses générales de ce paragraphe, chaque couple de zéros distincts z_1, z_2 d'un polynôme de degré constant n, dont les autres $n-2$ zéros sont arbitraires, détermine entièrement un ensemble de d.e dont chacun contient au moins un zéro de $f'(z)$; cet ensemble est constitué de tous les d.e contenant toutes les racines de l'équation $(z - z_1)^n = (z - z_2)^n$.

Il nous semble que ce théorème montre clairement que les "causes" du théorème de Grace-Heawood sont essentiellement différentes de celles du théorème de Rolle.

3. - On peut ([11], p. 12) énoncer le théorème de coïncidence comme suit : Si n éléments $z_1, \ldots, z_n$ de K vérifient une relation de la forme $a_0 + a_1 S_1 + \ldots + a_n S_n = 0$, tout d.e contenant $z_1, \ldots, z_n$ contient n éléments confondus en ζ et vérifiant cette relation. On en déduit le

THÉORÈME 8 (dû à WALSH dans le cas classique ([17], p. 46). - Si $L(z_1, \ldots, z_n)$ est une fonction symétrique des z_i, linéaire-affine par rapport à chaque z_i, et si le d.e H contient les éléments $\xi_1, \ldots, \xi_n$, alors il existe un élément $\zeta \in H$ tel que $L(\xi_1, \ldots, \xi_n) = L(\zeta, \ldots, \zeta)$.

WALSH a tiré de ce théorème des corollaires très utiles ; leur extension à (K_ω, B) est immédiate.

COROLLAIRE 8.1.- Si les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ appartiennent à un d.e H, il existe pour chaque $x \in K$ un $\alpha (= \alpha(x)) \in H$ tel que $\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i) = (x - \alpha)^n$.

COROLLAIRE 8.2. - Si un d.e H contient tous les zéros d'un polynôme $f(z)$ de degré n et si $c \in K$, la réunion ensembliste des n d.e $H + \sqrt[n]{c}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ contient tous les zéros de $f(z) - c$. (Notation : $\sqrt[n]{c}_1, \dots, \sqrt[n]{c}_n$ sont les n racines n-ièmes de c).

APPLICATION. - $f_1(z) = z + a_1$ a le seul zéro $-a_1$. Considérons $f_2(z) = (z + a_1)z + a_2$; si un d.e H_1 contient $-a_1$ et 0, la réunion des d.e $H_{2i} = H_1 + (-\sqrt{a_2}_i)$ $(i = 1, 2)$ contient tous les zéros de $f_2(z)$; chaque d.e contenant $-a_1 - \sqrt{a_2}_i$ et $-\sqrt{a_2}_i$, pour $i = 1, 2$, est à la fois un H_{21} et un H_{22}, donc il contient tous les zéros de $f_2(z)$. Une récurrence évidente achève la démonstration du

THÉORÈME 9. - $f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a \in K$. Tout d.e contenant : $-a_1 - \sqrt{a_2}_{i_2} - \dots - \sqrt[n]{a_n}_{i_n}$, $-\sqrt{a_2}_{i_2} - \dots - \sqrt[n]{a_n}_{i_n}$, $\dots$, $-\sqrt[n]{a_n}_{i_n}$, où les i_j décrivent (indépendamment les uns des autres) respectivement les ensembles $\{1, \dots, j\}$, contient tous les zéros de $f_n(z)$.

Dans le cas $(K_\omega, B) = (C_\omega, B_c)$, un tel d.e est le disque fermé de centre 0 et de rayon

$$|a_1| + |a_2|^{\frac{1}{2}} + \dots + |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad ;$$

c'est un des corollaires cités de WALSH ([11], p. 14).

12. Remarques.

1. Hypothèse $(K_\omega, B) = (C_\omega, B_c)$. - Soient $f(z)$ et $g(z)$ des polynômes apolaires ; désignons respectivement par F et G les ensembles de leurs zéros. On a alors le théorème de TAKAGI ([17], p. 46) : Si $A_F(\supset F)$ et $A_G(\supset G)$ sont des parties fermées convexes de C, alors $A_F \cap A_G \neq \emptyset$. Ce théorème s'applique, en particulier, aux deux polygones qui sont respectivement les enveloppes convexes de F et de G.

La remarque simple suivante (: cas particulier d'un résultat bien connu de CARATHEODORY [7]) permet de préciser ce résultat : L'enveloppe convexe d'un ensemble fini E de points du plan est un polygone convexe dont tous les sommets appartiennent à E (démonstration par induction).

THÉORÈME 10. - Dans les hypothèses du théorème de Takagi, $(A_F \cap G) \cup (A_G \cap F) \neq \emptyset$

2. - Le théorème 9 n'est pas la seule généralisation possible du résultat cité de WALSH ; nous avons démontré dans [28] que : dans un anneau, non nécessairement associatif ou commutatif, normé par $|\ |$, l'ensemble des zéros de la série $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$, $a_v \in A$, et $a_0 \neq 0$, de rayon de convergence r, est extérieur au disque $0 \leq |z| < \rho'$, où

$$\rho' = \min \left\{ r , \left(\sum_{v=1}^{\infty} \left| \frac{a_v}{a_0} \right|^{\frac{1}{v}} \right)^{-1} \right\} \quad ;$$

si de plus $|\ |$ est une valeur absolue, i.e. si $|ab| = |a|\ |b|$, la version originale du théorème de Walsh (i.e. le théorème pour la majoration des valeurs absolues des zéros du polynôme $\sum_{v=0}^{n} b_v z^v$) est également vraie.

Cet exemple souligne la différence entre les deux modes de généralisation (1, 2 dans l'Introduction) que nous avons considérés ; l'intérêt particulier de cet exemple (i.e. du théorème de Walsh) réside en ce qu'il est susceptible de deux généralisations, appartenant respectivement aux modes en question.

3. - La définition de l'apolarité de deux polynômes $f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$ et $g(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \beta_i)$ est équivalente à la condition : il existe des éléments $\lambda_i \in K$ tels que $f(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (z - \beta_i)^n$. Démonstration. Transcription de celle du cas classique ([20], p. 19).

Il serait peut-être intéressant d'étudier les polynômes apolaires en partant de cette définition. Plus généralement, l'étude des polynômes de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (z - \beta_i)^m$, où les λ_i vérifient les conditions données, pose beaucoup de problèmes. Dans le cas classique, on peut aussi considérer des séries $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (z - \beta_i)^m$; le théorème fondamental de HURWITZ ([17], p. 4) semble être utile dans ces dernières questions, parce que, dans beaucoup de cas, la série $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (z - \beta_i)^m$ converge uniformément.

4. - Donnons à la situation qui se présente dans le théorème 8 sa généralité propre : on désignera par E et E' des ensembles non vides, par J un ensemble non vide d'indices, et par σ une application $E^J \to E'$; notation :

Δ = diagonale de E^J .

DÉFINITION. – Une partie A de E sera appelée "σ.w" si $\sigma(A)^J = \sigma(\Delta)$.

Notation : $\mathcal{W}(\sigma)$ = ensemble des σ.w .

Considérons également $F = (\sigma_i)_{i \in I}$, où $\sigma_i : E^J \to E$, et posons $W(F) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}(\sigma_i)$; tout élément de $W(F)$ sera appelé "F.e" .

a. Supposons que, dans une structure donnée et avec des notations évidentes, une équation en z soit de la forme

$$f(z\ ;\ (\sigma_i(z\ ;\ (\alpha_{ij})_{j \in J}))_{i \in I}) = 0 . \tag{a}$$

On peut considérer les $\sigma_i(z\ ;\ (\alpha_{ij})_{j \in J})$ comme des fonctions en les α_{ij} . S'il existe, pour chaque $i \in I$, un σ_i.w A_i contenant tous les α_{ij} $(j \in J)$, ~~on~~ on peut remplacer dans $\sigma_i(z\ ;\ (\alpha_{ij}))$, α_{ij} par certain $\zeta_i \in A_i$, le même pour tous les $j \in J$. Les racines de l'équation (a) appartiennent donc, à l'ensemble des racines des équations en z , $f(z\ ;\ (\sigma_i(z\ ;\ (\zeta_i)))_{i \in I}) = 0$, où les ζ_i décrivent, respectivement et indépendamment les uns des autres, les A_i .

On peut appliquer le même procédé à f , par rapport aux ζ_i , et continuer ainsi si cela est possible et souhaitable. On a ainsi une méthode d'"approximation" des racines de (a), dans le sens suivant : dans les "bons" cas, (a) est remplacé par un ensemble d'équations plus simples, dont l'ensemble des racines contient l'ensemble des racines de (a).

EXEMPLE. – Le théorème des combinaisons linéaires des polynômes (MARDEN, ([17], p. 54) pour le cas classique) : dans les hypothèses générales du paragraphe 11, soient $\sigma_i(z)$ $(i = 1, \dots, p)$ des polynômes de degrés respectivement n_i . Alors, si H_i est un d.e contenant tous les zéros de $\sigma_i(z)$, les zéros du polynôme $f(z) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sigma_i(z)$, où $\lambda_i^n \neq 0$, appartiennent tous à l'ensemble des zéros des polynômes $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (z - \zeta_i)$ où, indépendamment les uns des autres, les ζ_i décrivent respectivement les H_i .

b. Problème : Étant donné F , déterminer $W(F)$.

EXEMPLE. – $E = E' = K$ = corps commutatif algébriquement clos ; $J = \{1, \dots, n\}$ où n est constant ; F = ensemble des fonctions symétriques des variables z_i $(i = 1, \dots, n)$, linéaires-affines par rapport à chaque z_i .

Considérons, d'autre part, l'ensemble Y des parties de K qui, mises à la place des d.c, vérifient le théorème de coïncidence énoncé pour les polynômes de degré n, et dans lequel on a remplacé K_ω par K. (Nous ne faisons à présent aucune hypothèse sur la caractéristique de K. Il est évident que les éléments de Y vérifient les corollaires du théorème de coïncidence cités dans le paragraphe 11, pourvu qu'on les énonce de façon appropriée ; en particulier $W(F) = Y$.

Est-ce que, dans les hypothèses générales du paragraphe 11, Y est la trace sur K de l'ensemble des d.c de K_ω ? (Dans l'affirmative on pourrait définir cette trace par $W(F)$; on aurait alors une définition des d.c qui s'appliquerait aux anneaux commutatifs)

c. On peut se poser le problème réciproque : E, E' et un ensemble X de parties de E étant donnés, déterminer une famille F telle que $X = W(F)$. Un tel problème a été étudié de façon approfondie par DIEUDONNÉ [10];il en a déduit une caractérisation importante de la relation d'apolarité dans C.

d. L'ensemble des problèmes b. et c. entre dans un schéma logique que l'on rencontre souvent dans les Mathématiques modernes.

f. Dans les paragraphes précédents, nous avons obtenu les d.c-généralisations d'un certain nombre de résultats de la "géométrie des zéros d'un polynôme d'une variable complexe" ; on peut aussi considérer ces résultats comme des informations indirectes sur les d.c des (K_ω, B) considérés ; on pourrait ainsi essayer de faire une "géométrie des d.c de (K_ω, B)" ; l'exploitation des rapports entre les homographies et les d.c constituerait l'outil le plus immédiat dans ce travail ; mais le but du présent exposé est beaucoup plus modeste.

13. Appendice au paragraphe 10.

Supposons que K est un corps commutatif, algébriquement clos, valué par $|\ |$. Les résultats du paragraphe 10 subsistent, pourvu que l'on ne confonde pas les d.c (: généralisations "projectives" des d.c) avec les disques $|x - a| \leq r$ (généralisations "métriques" des disques de C) ; mais on peut démontrer des résultats "qualitativement" analogues pour disques.

Tout d'abord, $f_1(z) = 1 + z + a_{V_1} z^{V_1}$ a au moins un zéro z_j dans le disque $|z + 1| \leq 1$.

DÉMONSTRATION. - $f_1(\zeta - 1) = \zeta + a_{V_1}(\zeta - 1)^{V_1}$, donc $|\zeta_1 \cdots \zeta_{V_1}| = 1$; il existe donc z_{j_1} tel que $|z_{j_1} + 1| \leq 1$. Imitons à présent le raisonnement ingénieux de CASABONNE (Selecta Montel, p. 204), en y remplaçant "C" par "K" , etc. $f_2(z) = 1 + z + a_{V_1} z^{V_1} + a_{V_2} z^{V_2} = f_1(z) + a_{V_2} z^{V_2}$; soit ξ_1 un zéro de $f_1(z)$ contenu dans $|z + 1| \leq 1$; posons $\zeta = \xi_1 + z$.

$$f_2(\zeta - \xi_1) = \sigma(\zeta) + a_V(\zeta - \xi_1)^{V_2} ,$$

où $\sigma(\zeta)$ est un polynôme de degré $< V_2$ n'ayant pas de terme indépendant de ζ ; donc $|\zeta_1 \cdots \zeta_{V_2}| = |\xi_1|^{V_2}$; il existe donc z_{j_2} tel que $|z_{j_2} + \xi_1| \leq |\xi_1|$; comme $|\xi_1 + 1| \leq 1$, z_{j_2} est contenu dans un disque indépendant des a_{V_1} , a_{V_2} , V_1 , V_2 ; ce disque est contenu dans les disque $|z_{j_2} + \xi_1| \leq 2$. Une récurrence évidente permet de démontrer le résultat analogue pour $f_m(z)$ (on remplacera $|z_j + \xi_1| \leq 2$ par $|z_j + \xi_1| \leq 2^{m-1}$) .

Cette démonstration est indépendante de toute hypothèse particulière sur la valuation $|\ |$; en fait, on peut toujours améliorer quantitativement ce résultat

1° Si la valuation de K est archimédienne, alors K est isomorphe à un sous-corps de C , d'après le théorème fondamental d'Ostronski ; on est donc dans le cas classique et on peut appliquer le théorème 5 aux d.c de C_ω .

2° Si la valuation de K est non-archimédienne, il résulte de l'inégalité ultramétrique que l'égalité

$$\left|\sum_{i=1}^{V_m} z^{-1}\right| = 1$$

entraîne :

$$\max_{i=1,\dots,m} (|z_i|^{-1}) \geq 1 ,$$

i.e. $\min(|z_i|) \leq 1$. Le disque de Casabonne est alors remplacé par le disque $|z| \leq 1$, i.e. par un disque indépendant du nombre des termes non nuls. Ce renforcement du résultat classique incite à étudier le problème de Landau-Montel dans les corps valués non-archimédiens. (En ce qui concerne l'étude générale de ces corps, nous renvoyons le lecteur à ARTIN [2] et à KRASNER [15]). Du point de vue : "énoncé", on peut rapprocher du théorème de Landau (Selecta Montel, p. 205) dans C , le résultat obtenu ci-dessus dans les corps valués; ce rapprochement est-il superficiel ou non ?

3. Généralisation de la notion de d.c. - Cas des espaces vectoriels.

14. Le théorème 2.a pour les espaces vectoriels.

Le contenu du paragraphe 8 et de G.1 (paragraphe 9) est purement ensembliste ; on peut donc l'appliquer aux espaces vectoriels ; nous n'insisterons pas sur certaines généralités tout à fait évidentes.

Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif k (que l'on peut toujours supposé contenu dans E), et M une partie de K contenant les éléments 0, 1 ; soit B l'ensemble des parties A de E telles que, pour tout $n (\in N^*)$, l'appartenance des éléments $a_1, \dots, a_n$ à A implique que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i \in A$, pour toute suite $\mu_1, \dots, \mu_n$ d'éléments de M telle que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$. B est un $\cap$-demi-treillis complet.

Soit φ une surjection de E sur lui-même ; on peut appliquer aux données $\{E, B, \varphi\}$ le théorème 2.a ; le résultat analogue au théorème 3.b s'énonce :

<u>Si</u> $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ $(\mu_i \in M)$ <u>et si</u> H <u>est un</u> h_φ.e <u>contenant tous les</u> α_i $(i = 1, \dots, n)$, <u>il existe</u> $\xi \in H$ <u>tels que</u> $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi(\alpha_i) = \varphi(\xi)$.

Appelons ce résultat : THÉORÈME 3.V.

15. La structure E_ω et les permutations invertives.

Supposons à présent que $Q \subset k \subset R$. Adjoignons à k un élément ∞, faisant k un corps projectif k_∞, et à E un élément ω satisfaisant aux conditions :

1° Pour tout $a \in E$, $a + \omega = \omega + a = \omega$;

2° pour tout $\lambda \in k^*$, $\lambda\omega = \omega$;

3° pour tout $a \in E - \{0\}$, $\infty a = \omega$.

$E \cup \{\omega\}$ muni de cette structure sera noté E_ω. (L'introduction de cette structure a pour but de simplifier certains énoncés).

Si L est une droite affine de E, L (de $E \subset E_\omega$) et $L \cup \{\omega\}$ seront appelées "droites" de E_ω.

DÉFINITION 5. - Une permutation f de E_ω définie par $x \rightarrow f(\zeta - x)$, où ζ est un élément fixe de E, sera dite <u>invertive</u> si elle satisfait à la condition Pour tout $(\lambda, a) \in k_\infty \times E$, $f(\lambda a) = \lambda^{-1} f(a)$.

NOTATION. — $\varphi_\zeta(x) = f(\zeta - x)$; on dira que ζ est le <u>pôle</u> de φ_ζ .

CONSÉQUENCES. — a. Si φ_ζ est une permutation invertive et $\lambda \in k^*$, la permutation $f(\lambda(\zeta - x))$ est également invertive ; en particulier, $f(x - \zeta)$ est invertive.

b. $\varphi_\zeta(\omega) = 0$.

c. $\varphi_\zeta(\zeta) = \omega$.

16. <u>Le cas des espaces euclidiens. Extension du théorème de Jensen.</u>

Supposons à présent que $k = R$ et que s est une application $E \times E \to R$ bilinéaire, symétrique, positive (i.e. $s(o , o) = 0$, et $s(x , x) > 0$ pour tout $x \neq 0$), et telle que, pour tout $(x , y) \in R^2$, $s(x , y) = xy$.

NOTATION. — $s(x , y) = \langle x , y \rangle$. On appelle $\langle x , y \rangle$ <u>produit scalaire</u> de x et de y .

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit <u>euclidien</u>.

NOTATION. — $\langle a , a \rangle^{\frac{1}{2}} = |a|$. Alors $|b - a|$ est une <u>distance</u> qui fait de E un espace <u>métrique</u>.

TERMINOLOGIE. — L'ensemble $\{ x : \langle x - a , b \rangle = \gamma \}$, où a , b et γ sont donnés, sera appelé <u>hyperplan</u> ou <u>plan</u>. L'ensemble $\{ x : \langle x - a , b \rangle < \gamma \}$ enrichi d'une partie (arbitrairement choisie) de l'hyperplan précédent sera dit <u>demi-espace</u> ; on dira que l'hyperplan considéré ci-dessus est l'hyperplan d'un quelconque des demi-espaces correspondant aux mêmes éléments a , b et γ . La définition des demi-espaces entraîne que, $\{ x : \langle x - a , b \rangle > \gamma \}$ $(= \{ x : \langle x - a , -b \rangle < -\gamma \})$ enrichi d'une partie quelconque de l'hyperplan déjà cité est également un demi-espace correspondant au même hyperplan que $\{ x : \langle x - a , b \rangle < \gamma \}$.

Dans un espace <u>métrique quelconque</u>, les ensembles $\{ x : |x - a| \leq r \}$ et $\{ x : |x - a| < r \}$, où a et le nombre positif r sont donnés, seront appelés respectivement "boule sphérée" et "boule non sphérée". (Ces termes sont dûs à KRASNER ; ils permettent d'éviter la confusion avec les termes topologiques "fermée" et "ouverte" qui ne leur sont pas toujours équivalents ; dans le cas d'un espace <u>ultramétrique</u> KRASNER appelle les boules sphérées (respectivement, non sphérées) "cercles circonférenciés" (respectivement "non circonférenciés") ; définition évidente de la <u>sphère</u> $(\{ x : |x - a| = z \})$ qui correspond à une boule.

Revenons au cas d'un espace euclidien E, et considérons E_ω. L'application φ_b : $\varphi_b(x) = \frac{x-b}{\langle x-b, x-b\rangle}$ est une permutation invertive (de E_ω) de pôle b ; on l'appellera <u>inversion</u> (de E_ω).

NOTATION. - $\langle x-b\rangle^2 = \langle x-b , x-b\rangle$.

On supposera invariablement par la suite que E est un espace <u>euclidien</u>, que E_ω est la structure construite ci-dessus à partir de E, et que $\varphi_b(x) = \frac{x-b}{\langle x-b\rangle^2}$

DÉFINITION 6.a. - <u>Une partie</u> A <u>de</u> E_ω, <u>ne contenant pas</u> $b \in E$, <u>sera appelée</u> "d_b.e" <u>de</u> E_ω <u>si</u> $\varphi_b(A)$ <u>est convexe</u>.

NOTATION. - $\mathcal{D}_b(E_\omega)$ = ensemble des d_b.e de E_ω.

DÉFINITION 6.b. - <u>Une partie</u> A <u>de</u> E_ω <u>sera appelée</u> "d.e" <u>de</u> E_ω <u>si, pour tout</u> $b \in E - A$, $\varphi_b(A)$ <u>est convexe, ou si</u> A <u>est un des ensembles</u> $\emptyset$, E, E_ω.

NOTATION. - $\mathcal{D}(E_\omega)$ = ensemble des d.e de E_ω.

JUSTIFICATION. - Si l'on identifie les espaces homéomorphes R^2_ω et C_ω, alors $\mathcal{D}(R^2_\omega) = \mathcal{D}(C_\omega , B_c)$.

Considérons les transformations de la forme $\sigma_b = a + \lambda\varphi_b$, où $a \in E$ et $\lambda \in R^*$; si l'on remplaçait, dans la définition 6.b, φ_b par l'une quelconque des σ_b, ceci n'affecterait pas $\mathcal{D}(E_\omega)$.

Les données $\{E_\omega , M = R_+ , \varphi_b$, et H est un d.e$\}$ entraînent que H est un h_{φ_b}.e (et, également, un h_{σ_b}.e), dans les notations du paragraphe 8 ; par conséquent, <u>ces données vérifient le théorème</u> 3.V (paragraphe 14). Résultat analogue évident pour les d.e.

Considérons à présent la classe suivante de d.e de E_ω :

Les parties de E : $\emptyset$, E, les boules non sphérées enrichies d'une certaine partie de leur sphère (: partie déterminée implicitement par la condition que la boule enrichie considérée soit un d.e de E_ω), les demi-espaces $\{ x : \langle\ \ \rangle < \ \}$ enrichis d'une certaine partie de leur hyperplan (condition analogue à celle pour les boules).

Les complémentaires de ces ensembles dans E_ω.

On vérifie immédiatement que cette classe contient les boules sphérées, non sphérées, etc.

Chaque élément de cette classe sera dit "d.c" de E_ω .

NOTATION.- $\mathcal{D}_o(E_\omega)$ = ensembles de d.c de E_ω .

NOTE. - $\mathcal{D}_o(R^2_\omega) = \mathcal{D}(R^2_\omega)$.

Problème : Dans le cas d'un E_ω quelconque (euclidien), existe-t-il des d.e qui ne soient pas des d.c , i.e. $\mathcal{D}_o(E_\omega) \neq \mathcal{D}(E_\omega)$?

On n'examinera pas ici ce problème.

Transformons $\langle x - a \rangle^2 \leqslant r^2$ par φ_b ; on obtient :

$$1 + 2 \langle y , b - a \rangle + [\langle b - a \rangle^2 - r^2] y^2 \leqslant 0 ,$$

i.e. un d.c . Donc, φ_b induit une permutation de $\mathcal{D}_o(E_\omega)$; même remarque pour σ_b . Ainsi, les d.c de E_ω sont aux transformations σ_b ce que les d.e de (K_ω , B) sont aux homographies.

NOTATION. - On écrira par la suite $\langle a , b \rangle = (a , b)$.

Etendons à présent à E_ω un résultat classique de JENSEN [14]. Si a et x sont deux vecteurs de E , on posera $p_a(x) = \frac{(x,a)}{|a|}$ et on appellera $p_a(x)$ projection de x sur a.

On raisonnera dans la structure affine de E . Soient a un vecteur donné, b un point donné, et λ un nombre réel donné. Considérons les points $b + \lambda a$ et $b - \lambda a$; ils sont situés sur la sphère $\{ x : |x - b| = |\lambda|.|a| \}$.

NOTATION. - S = ladite sphère, W la boule non sphérée de sphère S . Considérons la fonction vectorielle

$$f(x) = \frac{x - (b+\lambda a)}{(x-b(b+\lambda a))^2} + \frac{x - (b-\lambda a)}{(x-(b-\lambda a))^2} ,$$

définie pour $x \neq b + \lambda a , b - \lambda a$; nous voulons étudier le signe de $p_a(f(x))$. Il est le même que le signe de

$$q(x) = (x - (b + \lambda a) , a)(x - (b - \lambda a))^2 + (x - (b - \lambda a) , a) (x - (b + \lambda a))^2 = 2I ;$$

$$I = (x - b , a)[(x - b)^2 + \lambda^2 a^2] - 2(\lambda a , a)(x - b , \lambda a) .$$

Posons

$$(x - b)^2 = \lambda^2 a^2 + \delta ;$$

alors,

$$I = \delta(x - b\,,\, a)\,.$$

Donc :

1° $\{\delta > 0$ et $(x - b\,,\, a) \nless 0\}$ implique $I > 0$;

2° $\{\delta > 0$ et $(x - b\,,\, a) < 0\}$ implique $I < 0$.

1° et 2° assurent que I ne peut s'annuler dans le complémentaire de la réunion de l'hyperplan $(x - b\,,\, a) = 0$ et de la boule sphérée $W \cup S$. Dans le cas particulier $E = R^2$, ceci fut démontré par WALSH ([27], p. 10) , dans le langage des "attractions et répulsions mécaniques" de Gauss.

THÉORÈME 11. - Soient (dans l'espace affine E) a un vecteur donné non nul, $C_i = \lambda_i a$ ($i \in N$, $\lambda \in R$) une suite donnée de vecteurs, et $(b_i)_{i \in N}$ une suite donnée de points. Considérons les boules sphérées $\{x : |x - b_i| \leq |C_i|\}$ et désignons par E_1 le complémentaire par rapport à E de la réunion de ces boules ; considérons ensuite l'intersection E_2 de la famille $(\{x : (x - b_i\,,\, a) > 0\})_{i \in N}$ de demi-espaces et l'intersection E_3 de la famille $(\{x : (x - b_i\,,\, a) < 0\})_{i \in N}$ de demi-espaces. Alors $(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$ ne contient pas de zéros de la fonction vectorielle

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \left[\frac{x-(b_i+C_i)}{(x-(b_i+C_i))^2} + \frac{x-(b_i-C_i)}{(x-(b_i-C_i))^2} \right] ,$$

où les δ_i sont des nombres non négatifs non tous nuls.

Cas particulier : $E = R^2$, tous les b_i appartiennent à une même droite, et $\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_n = 1$ tandis que $\delta_i = 0$ pour $i > n$. Sous ces hypothèses, le théorème 11 donne le théorème cité de JENSEN, qui fut démontré par WALSH ([27], p. 10).

En fait l'énoncé de Jensen ([14], p. 190) laisse supposer que JENSEN avait démontré le théorème non seulement pour les polynômes mais aussi pour certaines séries.

17. Le cas de R^n . Caractérisation des d.c de R^n_ω .

Dans le cas de R^n , il y a coïncidence des termes "boule sphérée" et "boule fermée", etc. On appellera sphère (en élargissant un peu sa définition précédente), ou $(n - 1)$-sphère, de R^n_ω la frontière d'un d.c ($\neq \phi$, R^n_ω) de R^n_ω .

TERMINOLOGIE. - ensemble sphérique = ensemble $(n-1)$-sphérique = partie d'une sphère ; plan = $(n-1)$-plan = hyperplan = variété linéaire affine de dimension $n-1$; ensemble plan = partie d'un plan (cas particulier d'ensemble sphérique).

L'application φ_ξ définie dans le paragraphe précédent est un homéomorphisme de R^n sur lui-même.

Soient : $\mathcal{E}$ un ensemble donné, $\mathfrak{D}_0$ une partie donnée de $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$, et f une permutation de $\mathcal{E}$ induisant une permutation de $\mathfrak{D}_0$; on dira, pour abréger que f "conserve" les éléments de $\mathfrak{D}_0$.

D'après le paragraphe précédent, les inversions conservent les d.c de R^n_ω ; elles conservent également les sphères de R^n_ω. Plus généralement, on sait que le groupe anallagmatique est le groupe de toutes les permutations de R^n_ω qui conservent les sphères (CARATHEODORY [8]; R. LAGRANGE [16], p. 6); il est donc aussi le groupe de toutes les permutations de R^n_ω qui conservent les d.c .

THÉORÈME 12. - Une partie A de R^n_ω est un d.c (de R^n_ω) si et seulement si elle a la propriété (c) : Pour tout $\xi \in R^n - A$, $\varphi_\xi(A)$ est convexe.

DÉMONSTRATION. - La 2e assertion est conséquence évidente du théorème sur la conservation des d.c par les inversions (nous l'avons d'ailleurs utilisé implicitement dans la définition des d.c) ; occupons-nous donc de la 1re. On supposera invariable dans la suite de la démonstration que A est non-vide et qu'il possède la propriété (c).

LEMME 12.1. - A est de dimension n (i.e. la variété linéaire affine que A engendre est de dimension n).

DÉMONSTRATION. - Sinon A serait contenu dans un $(n-1)$-plan P . Pour $\xi \in R^n - P$, $\varphi_\xi(A)$ serait alors un ensemble sphérique non plan, donc un ensemble non convexe ; mais ceci est contraire à l'hypothèse.

LEMME 12.2. - L'intérieur $\mathring{A}$ de A est homéomorphe soit à R^n soit à R^n_ω .

DÉMONSTRATION. - Cas trivial : $A = R^n_\omega$ ou R^n . Supposons à présent $A \neq R^n$, R^n_ω. A ne peut pas être sphérique, puisqu'il existerait alors un point $\xi \in R^n - \bar{A}$ ($\bar{A}$ = fermeture de A) et $\varphi_\xi(A)$ serait un ensemble sphérique non plan, donc non convexe. Supposons donc que A n'est pas sphérique. $\varphi_\xi(A)$ est alors, pour ξ $R^n - A$, de dimension n, et convexe par hypothèse, donc (BOURBAKI, V , Ch II, p. 54, ex. 9.a) $\mathring{\varphi_\xi(A)} \neq \emptyset$ (et $\mathring{A} \neq \emptyset$). Ceci implique

(BOURBAKI, loc. cit., p. 51, Cor.1) la convexité de $\overset{\circ}{\widehat{\varphi_\xi(A)}}$ et $\overline{\overset{\circ}{\varphi_\xi}(A)}$; mais alors, si $\omega \notin \varphi_\xi(A)$, (BOURBAKI, loc. cit., p. 54, ex. 10) $\widehat{\varphi_\xi(A)}$ est homéomorphe à R^n. Donc, dans tous les cas, $\overset{\circ}{A}$ (qui est homéomorphe à $\overset{\circ}{\widehat{\varphi_\xi(A)}}$) est homéomorphe soit à R^n soit à R^n_ω. Il suffit évidemment de démontrer le théorème dans le 1er cas ; on se place donc dans $R^n (\subset R^n_\omega)$.

LEMME 12.3. - Au moins l'un des ensembles A ou $R^n - A$ est convexe.

DÉMONSTRATION. - Si une partie B de R^n, est non convexe, il existe des sections planes non convexes de B ; si une partie B' de R^n vérifie (c), alors une section plane quelconque de B' vérifie (c) dans le plan de la section. Ces deux remarques évidentes montrent qu'on peut ramener par récurrence la démonstration au cas où $n = 2$. Démonstration : Si A est borné, il existe sur toute droite des points extérieurs à un disque contenant A. Si ξ est un tel point d'une droite D ayant une intersection non convexe avec A, l'inversion φ_ξ transforme A en un ensemble ayant une intersection non convexe avec la transformée de D (qui est également une droite), donc en un ensemble non convexe, ce qui est contraire à l'hypothèse (c). Si A n'est pas borné, le seul cas qui échappe à l'extension de l'argument précédent est celui où $R^2 - A$ est convexe, cas qui vérifie l'assertion du lemme.

NOTATION. - F = frontière de A.

On voit aisément qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où F est homéomorphe à une sphère (i.e. à une $(n - 1)$-sphère) non réduite à un point ; on supposera donc par la suite qu'il y a homéomorphisme, sans que F soit elle-même une sphère. Il suffit de montrer qu'on arrive alors à une contradiction.

LEMME 12.4. - Il existe au moins un point de F possédant, dans la topologie induite sur F, un voisinage ouvert et simplement connexe non sphérique.

DÉMONSTRATION. - Si F n'est pas réunion de parties connexes (toutes d'intérieur non vide) de sphères, l'assertion est évidente. Si F est une telle réunion, il suffit de considérer un point de F appartenant à l'intersection de deux des sphères (distinctes) en question. Ce point vérifie le lemme.

Achevons la démonstration du théorème en supposant, pour fixer les idées, $n = 3$ (la démonstration générale est tout à fait analogue).

Soient $\mu \in F$ et V un voisinage de μ dans F vérifiant les conditions du lemme 12.4 ; alors $\overline{V}$ n'est pas un ensemble 2-sphérique.

Soient a, b et c trois points distincts de la frontière de V dans F ; a, b, c et μ déterminent une 2-sphère S qui contient ces points sans contenir V tout entier. On peut choisir a, b, c et μ de façon qu'au moins l'un des triangles sphériques $a\mu b$, $b\mu c$, $c\mu a$ coupe le complémentaire de $\overline{V}$; choisissons-les de cette manière, et soit $a\mu b \not\subset \overline{V}$. (Notation : Σ = la boule ouverte de sphère S, $\overline{\Sigma}$ la boule fermée).

LEMME 12.5. - Il existe des points de S extérieurs à A.

DÉMONSTRATION. - Il suffit évidemment de démontrer que $\overline{\Sigma} \not\subset A$. Or, d'après le lemme 12.3, deux cas sont possibles :

1. A est convexe. Cette hypothèse rend impossible chacune des alternatives :

1° S est un plan.

2° S n'est pas un plan et $\overline{\Sigma} \subset A$.

2. $R^3 - A$ est convexe. Cette hypothèse rend impossible 1°, 2°.

Soient à présent $\xi \in S$ et $\xi \in R^3 - A$. L'inversion φ_ξ transforme S en un plan $\varphi_\xi(S)$, et A en l'ensemble $\varphi_\xi(A)$ dont la frontière $\varphi_\xi(F)$ a les points $\varphi_\xi(a)$, $\varphi_\xi(b)$, $\varphi_\xi(c)$ et $\varphi_\xi(\mu)$ en commun avec $\varphi_\xi(S)$, sans que le triangle euclidien (dans $\varphi_\xi(S)$) $\varphi_\xi(a)\,\varphi_\xi(b)\,\varphi_\xi(c)$ soit contenu tout entier dans $\varphi_\xi(F)$. L'ensemble $\varphi_\xi(A)$ ne saurait alors être convexe. Cette contradiction achève la démonstration du théorème 12.

Mr BOULIGAND nous a suggéré une démonstration du théorème 12, de nature très différente ; on pourra voir la démonstration de Mr BOULIGAND dans un article que nous espérons publier prochainement. Cet article traitera en outre des questions suivantes :

THÉORÈME I. - Une partie A de R^n_ω, où $n \geq 3$, est un d.c (dans R^n_ω) si et seulement si toute section plane de A est un d.c dans le plan sécant. (Pour $n = 2$, l'énoncé est faux).

Ce théorème donne une caractérisation récurrente des d.c de R^n_ω. Ce théorème donne par récurrence une démonstration immédiate du théorème 12, pour $n \geq 3$.

Les théorèmes 12 et I sont des théorèmes de caractérisation. Ils posent les problèmes suivants :

a. Considérons l'énoncé : Une partie A de R^n_ω est un d.c (de R^n_ω), si et seulement si la partie $Y(A)$ de R^n_ω a la propriété : pour tout $\xi \in Y(A)$,

$\varphi_\xi(A)$ est convexe.

Quelles applications $Y : \mathfrak{D}(R^n_\omega) \to \mathfrak{D}(R^n_\omega)$ vérifient cet énoncé ?

Remarques faciles : 1. Il suffit que l'ensemble $Y(A)$ soit partout dense dans $R^n - A$ (notre démonstration marche encore).

2. Si l'on suppose A borné dans R^n et si H est une boule contenant A, il suffit que $Y(A)$ soit partout dense dans $H - A$.

Il s'agit évidemment de trouver des réponses plus fines.

b. Considérons l'énoncé : Une partie A de R^n_ω est un d.c (de R^n_ω), si et seulement si la famille $\mathfrak{F}(A)$ de sections planes de A est composée exclusivement de d.c (dans les plans sécants respectifs).

Quelles familles $\mathfrak{F}(A)$ vérifient cet énoncé ?

D'autres problèmes se posent en rapport avec la conjecture suivante : Une partie de R^n_ω, homéomorphe à une boule fermée, est convexe si et seulement si chacune de ses sections planes est simplement connexe dans le plan sécant. (Ceci se confond avec la définition même de la convexité dans le cas $n = 2$. Dans le cas $n = 3$, sa démonstration est immédiate, comme Y. KATZNELSON nous l'a indiqué). L'intérêt des liaisons entre la convexité et la connexité est évident.

On peut généraliser les problèmes considérés de deux manières, i.e. soit en se plaçant dans des espaces plus généraux que R^n, soit en remplaçant les inversions par d'autres transformations.

COROLLAIRE 12. 1. - Pour $E = R^n$, la réponse au problème posé dans le paragraphe 16 est négative.

Note historique sur le théorème 12. - Dans le cas particulier $n = 2$, WALSH a déjà démontré le résultat suivant, qui lui est essentiellement équivalent (dans ce cas [27], p. 62) : Si A est une ensemble fermé du plan complexe, tel que pour toute triple $\{z_1 \in A, z_2 \in A, \xi \notin A\}$ il existe $\zeta \in A$ vérifiant l'équation $\frac{1}{\xi - z_1} + \frac{1}{\xi - z_2} = \frac{2}{\xi - \zeta}$, alors A est une "région circulaire".

18. Applications convexisantes. Les théorèmes de Gauss-Lucas-Porter et de Bôcher.

Revenons pour un moment au cas d'un espace vectoriel quelconque E sur R. Terminologie de ce paragraphe : R-automorphisme de E = automorphisme de la structure algébrique de E induisant l'automorphisme identique sur R ;

R-autonorphisme de E_ω = automorphisme de la structure algébrique de E_ω induisant l'automorphisme identique sur R et faisant correspondre ω à lui-même. Application convexisante pour A = application $E \longrightarrow E$ transformant la partie A de E en une partie convexe de E ; même définition pour E_ω.

Les R-automorphismes de E préservent la convexité. Par conséquent, si φ est une permutation de E_ω convexisante pour $A (\in E_\omega)$ et τ un R-automorphisme de E_ω, $\tau\varphi$ est elle aussi convexisante pour A.

Soit $((f_i)_{i \in I_A})_{A \in \mathfrak{P}(E_\omega)}$ une famille donnée de familles de permutations de E_ω ; nous noterons Θ les parties de E_ω telles que chacune des permutations f_i, où $i \in I_\Theta$, soit convexisante pour Θ. On peut alors élargir l'ensemble donné des f_i en l'ensemble $\{\tau f_i\}$ (τ étant un R-automorphisme quelconque de E_ω) sans que ceci affecte l'ensemble des Θ.

Considérons à présent le cas particulier où $E = R^n$, f_i = inversion φ_i de pôle i, et $I_A = R^n - A$. (On n'a pas besoin ici d'expliciter les propriétés très fortes que les R-automorphismes ont dans le cas de R^n).

Ainsi toute inversion φ_ξ dont le pôle ξ est extérieur à un d.c est convexisante pour ce d.c et les propriétés qui découlent de ce fait se transposent au cas plus général des permutations $\tau\varphi_\xi$ (où τ désigne un R-automorphisme quelconque de R^n_ω). Tel est, par exemple, le cas du théorème de GAUSS-LUCAS-PORTER démontré ci-dessous. Il suffit donc de faire la démonstration pour les inversions $\varphi_\xi = \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2}$ et celles-ci se prêtent à un langage vectoriel simple. C'était, au fond, pour cette raison que, dans le plan complexe, certains auteurs passaient aux relations conjuguées des relations de la forme $\sum(\xi_i - z_i)^{-1} = 0$ etc., et utilisaient ensuite l'interprétation mécanique introduite par GAUSS ([25], p. 695 ; [17], p. 6 ; [27], p. 5).

Rappelons la notation : $p_a(x)$ = projection de $x \in R^n$ sur $a = \frac{(x,a)}{|a|}$.

LEMME. - Si $(x_i)_{i \in N}$ est une suite de vecteurs non tous nuls telle que $p_a(x_i) \geqslant 0$ pour tout i, alors $\sum_{i=0}^{\infty} x_i \neq 0$.

Ce lemme (de démonstration évidente) généralise ([17], p. 5, ex 2). Ce lemme permettait de démontrer directement le théorème de Gauss-Lucas pour R^2, dans son énoncé relatif à l'enveloppe convexe des zéros etc. ([17] p. 14). La situation est analogue pour R^n ; en effet, soit $(x_i)_{i \in N}$ une suite de points de R^n et Δ leur enveloppe convexe fermée ; Δ est alors l'intersection des demi-espaces contenant Δ. Soit π le plan qui est la frontière, dans R^n, d'un de ces demi-espaces, et x un point du demi-espace complémentaire au dit demi-espace. La suite $\left(\frac{x_i-x}{(x_i-x)^2}\right)_{i\in N}$ vérifie l'hypothèse du lemme précédent, donc la somme de ses termes est $\neq 0$. D'où le "théorème de Gauss-Lucas-Porter" pour R^n :

THÉORÈME 14. - Les zéros de la fonction vectorielle $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x-x_i}{(x-x_i)^2}$, où $x_i \in R^n$, sont tous contenus dans l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des x_i.

Dans le cas $n = 2$, ce théorème démontre le théorème suivant de PORTER :

Toute région convexe (infinie) qui contient tous les zéros d'une fonction entière de genre 0, contient également tous les zéros de sa dérivée. ([17], p. 16, ex 3).

Nous allons étendre à présent à R^n un résultat classique de Bôcher pour R^3.

NOTATION (BOURBAKI, II, Ch. VI, p. 40). - S_{n-1} = la sphère unité dans R^n, $e_n = (o, \dots, o, 1)$, y la projection stéréographique de x ; on remplacera seulement $||x||$ par $|x|$ dans la notation de la norme usuelle. Il n'y a pas de rapport entre la signification des lettres F, f ci-dessous et dans les paragraphes précédents. $m_j \in R^*$, $j = 1, \dots, \ell$.

THÉORÈME 15. - Soit : $F(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{m_j(x-x_j)}{(x-x_j)^2}$, $f(y) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{m_j(y-y_j)}{(y-y_j)^2}$, $\sum_{j=1}^{\ell} m_j = 0$ et $x, x_j \in S_{n-1}$.

Alors,

1° le vecteur $F(x)$ est tangent à S_{n-1}, et

2° sa projection stéréographique est le vecteur $\frac{1+|y|^2}{2} f(y)$.

Dans le cas $n = 3$, ce théorème est dû à Bôcher ([17], p. 34).

DÉMONSTRATION.

1° Il suffit de démontrer que $\left(x, \sum_{j=1}^{\ell} \frac{m_j(x-x_j)}{(x-x_j)^2}\right) = 0$, donc, puisque $\sum_{j=1}^{\ell} m_j = 0$ par hypothèse, que

$$\sum_{j=2}^{\ell} m_j \left(\frac{x^2-(x_j,x)}{(x-x_j)^2} - \frac{x^2-(x_1,x)}{(x-x_1)^2} \right) = 0 \; ;$$

ceci sera assurément vrai si, pour $j = 2, \ldots, n$

$$\frac{x^2-(x_j x)}{(x-x_j)^2} - \frac{x^2-(x_1 x)}{(x-x_1)^2} = 0 ;$$

mais cette dernière égalité est une conséquence immédiate de l'hypothèse : $x^2 = x_j^2 = x_1^2$.

2° La démonstration est tout à fait analogue à celle du cas $n = 3$, pourvu que l'on utilise proprement les notations vectorielles.

En généralisant de façon évidente l'interprétation mécanique de Gauss à R^n, on obtient le corollaire (généralisation d'un corollaire classique ([17], p. 37) : Les points d'équilibre du champ sphérique se projettent sur les points d'équilibre du champ plan. (Corollaire 15.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLARDICE (R. E.). - On a limit of the roots of an equation that is independent of all but two of the coefficients, Bull. Amer. math. Soc., t. 13, 1906-1907, p. 443-447.

[2] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions. - Princeton University, New York University, 1950/51 (multigraphié).

[3] BALLIEU (Robert). - Limitations en module et localisations des zéros de polynômes, Mém. Soc. royale Sc. Liège, Série 4, t. 1, 1936, p. 85-181.

[4] BIERNACKI (Mieczyslaw). - Commentaire sur les [travaux de Paul Montel relatifs aux] modules des zéros des polynômes, Selecta, Cinquantenaire scientifique de Paul Montel. - Paris, Gauthier-Villars, 1947 ; p. 225-228.

[5] BIERNACKI (Mieczyslaw). - Sur les zéros des polynômes, Annales Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A, Math., t. 9, 1955, p. 81-98.

[6] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. - New York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ. n° 25).

[7] CARATHEODORY (Constantin). - Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 32, 1911, p. 193-217.

[8] CARATHEODORY (Constantin). - The most general transformations of plane regions which transform circles into circles, Bull. Amer. math. Soc., t. 43, 1937, p. 573-579.

[9] DIEUDONNÉ (Jean). - Sur une généralisation du théorème de Rolle aux fonctions d'une variable complexe, Application aux fonctions entières de genre zéro et un, Annals of Math., Series 2, t. 31, 1930, p. 79-116.

[10] DIEUDONNÉ (Jean). - Sur le théorème de Grace et les relations algébriques analogues, Bull. Soc. math. France, t. 60, 1932, p. 173-196.

[11] DIEUDONNÉ (Jean). - La théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients quelconques). - Paris, Gauthier-Villars, 1938 (Mémor. Sc. math., fasc. 93).

[12] FAVARD (Jean). - Remarques sur le théorème de Grace, Bull. Sc. math. France, t. 60, 1936, p. 79-96.

[13] FEJÉR (Leopold). - Über die Wurzel von kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung, Math. Annalen, t. 65, 1908, p. 413-423.

[14] JENSEN (J.L.W.V.). - Recherches sur la théorie des équations, Acta Math., t. 36, 1913, p. 181-195.

[15] KRASNER (Marc). - Séminaire sur la théorie des corps valués, 1953/54.

[16] LAGRANGE (René). - Produits d'inversions et métrique conforme. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Cahiers scientifiques n° 23).

[17] MARDEN (Morris). - The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable. - New York, American mathematical Society, 1949 (Mathematical Surveys n° 3).

[18] MARKOVITCH (D.). - Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme, Acad. Serbe Sc. Publ. Inst. math., t. 2, 1948, p. 236-242.

[19] MONTEL (Paul). - Sur les modules des zéros des polynômes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 40, 1923, p. 1-34.

[20] MONTEL (Paul). - Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. - Paris, Gauthier-Villars, 1933 (Collection de monographies sur la théorie des fonctions).

[21] MONTEL (Paul). - Sur quelques rapports nouveaux entre l'algèbre et la théorie des fonctions, Mathematica Cluz, t. 9, 1935, p. 47-55.

[22] ORE (Oystein). - Some studies on closure relations, Duke math. J., t. 10, 1943, p. 761-785.

[23] ORE (Oystein). - Mappings of closure relations, Annals of Math., Series 2, t. 47, 1946, p. 56-72.

[24] VALIRON (Georges). - Théorie des fonctions. - Paris, Masson, 1948 (Cours d'analyse mathématique).

[25] VAN VLECK (E. B.). - On the location of roots of polynomials and entire functions, Bull. Amer. math. Soc., t. 35, 1929, p. 643-683.

[26] VYTHOULKAS (Dennis P.). - On the minimum modulus of a root of a polynomial, Proceedings of the international Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass. 1950. - Providence, American mathematical Society, 1952 ; p. 332-333.

[27] WALSH (J. L.). - The location of critical points of analytic and harmonic functions. - New York, American mathematical Society, 1950 (Amer. math. Soc. Coll. Publ. n° 34).

[28] ZERVOS (Spiros). - Une méthode de minoration des valeurs absolues des zéros des séries de Taylor, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 394-396.

[29] ZERVOS (Spiros). - Sur la minoration des valeurs absolues des zéros des séries de Taylor, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 619-622.