

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

M. ZISMAN

Variétés différentiables

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 7,
p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A7_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

(Exposé de M. ZISMAN, le 14.1.1957)

I.- DÉFINITION DES VARIÉTÉS

Une application d'un voisinage de R^n dans un voisinage de R^m
 $x'_1 = x'_1(x_1, \dots, x_n)$, ... $x'_m = x'_m(x_1, \dots, x_n)$ est dite de classe C^p
 (resp. C^∞ , resp. analytique réelle) si les fonctions x'_1, \dots, x'_m ont
 des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p (resp. de tout ordre,
 resp. sont analytiques réelles).

1.- DÉFINITION.- Une variété différentiable de classe C^p (resp. C^∞ , resp.
 analytique réelle) est un espace topologique connexe V tel que

a) Il existe un recouvrement de V par des ouverts U_i tels que chaque U_i
 soit homéomorphe à un ouvert d'un espace euclidien à n dimension R^n . (n est
 le même pour tous les U_i). Soit $f_i : U_i \longrightarrow f_i(U_i) \subset R^n$ cet homéomorphisme.
 Si $x \in U_i$, $f_i(x)$ est un point de R^n et a donc n coordonnées
 x_1, x_2, \dots, x_n . Ces n fonctions continues de x s'appellent les coordon-
 nées locales de x dans le voisinage U_i .

b) Soient $x \in U_i \cap U_j$ et x'_1, x'_2, \dots, x'_n les coordonnées locales de x
 dans le voisinage U_j . Alors

$$f_j \circ f_i^{-1} : (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x'_1, \dots, x'_n)$$

est une application différentiable de classe C^p (resp. C^∞ resp. analytique
 réelle) à jacobien $\neq 0$.

c) L'ensemble des U_i est maximal pour les propriétés a) et b). L'entier n
 s'appelle la dimension de V (on écrit souvent V_n). Dans la suite, nous ne nous
 intéresserons qu'au cas C^∞ et nous supprimerons l'expression "de classe C^∞ "
 dans les énoncés.

2.- L'ensemble des fonctions différentiables en un point.

Soit $x_0 \in V$ et U un voisinage de x_0 . Une fonction f définie sur U ,
 à valeurs réelles, est appelée différentiable en x_0 si quelque soit $x \in U \cap U_i$

(quand $x_0 \in U_i$)

$$f(x) = f \circ f_i^{-1} (x_1(x), \dots, x_n(x))$$

est une fonction différentiable en x_1, \dots, x_n .

L'axiome b) nous montre immédiatement que cette notion est indépendante du système de coordonnées choisies en x_0 si $x_0 \in U_i \cap U_j$, et que si une fonction est différentiable en x_0 , elle est différentiable dans tout un voisinage de x_0 (dépendant de la fonction). On écrit $f(x_1, \dots, x_n)$ au lieu de $f \circ f_i^{-1}(x_1, \dots, x_n)$. Nous désignerons l'ensemble des fonctions différentiables en x_0 par $\mathcal{D}(x_0)$. Cet ensemble possède les propriétés suivantes:

a) Les fonctions $x_1(x), \dots, x_n(x)$ définies dans U_i sont différentiables en tout point de U_i .

b) Si F est une fonction différentiable $F(u_1, \dots, u_p)$ définie dans un voisinage de \mathbb{R}^p , et si $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{D}(x_0)$ alors $F(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{D}(x_0)$.

PROPOSITION 2.1.- Soient $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un système de coordonnées dans un voisinage du point x_0 et $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{D}(x_0)$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que toute fonction de $\mathcal{D}(x_0)$ s'exprime comme une fonction différentiable de f_1, \dots, f_m sont

1°) $m = n$

2°) si $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ on a $\left(\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right)_{x_0} \neq 0$

(démonstration immédiate).

Quand les conditions de la proposition sont vérifiées, le théorème des fonctions implicites montre que f_1, \dots, f_n forment un système de coordonnées x_0 dans un certain voisinage ouvert de ce point.

3.- Applications différentiables.

Soient V et W deux variétés différentiables et $f: U \rightarrow W$ une application d'un voisinage U de x_0 dans W . On dit que f est différentiable en x_0 si, quel que soit $g \in \mathcal{D}(f(x_0))$ $g \circ f \in \mathcal{D}(x_0)$. Autrement dit, si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est système de coordonnées autour de x_0 , et $\{y_1, \dots, y_p\}$ un système de coordonnées autour de $f(x_0)$ la fonction f peut s'exprimer par $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_p = f_p(x_1, \dots, x_n)$, les p fonctions $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{D}(x_0)$. Si f est un homéomorphisme $V \rightarrow W$ et si f et f^{-1} sont différentiables on dit que f est un isomorphisme. (il faut remarquer que même dans le cas où f est un homéomorphisme, f différentiable n'entraîne pas toujours f^{-1} différentiable).

II.- ESPACE TANGENT EN UN POINT D'UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

4.- Vecteur tangent en un point.

On appelle vecteur tangent en $x_0 \in V_n$ une application $X : \mathcal{O}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ayant les 2 propriétés suivantes

- a) X est linéaire c'est-à-dire $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$ ($a, b \in \mathbb{R}$)
 ($f, g \in \mathcal{O}(x_0)$) .
- b) X est une différentiation : $X(fg) = X(f) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot X(g)$ ($f, g \in \mathcal{O}(x_0)$).

Soient X et X' 2 vecteurs tangents en x_0 et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.
 L'application $f \rightarrow \lambda X(f) + \lambda' X'(f)$ ($f \in \mathcal{O}(x_0)$) est un vecteur tangent ;
 l'ensemble des vecteurs tangents en x_0 est donc un espace vectoriel que nous désignerons par Tx_0 .

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système de coordonnées en x_0 . Alors $f \in \mathcal{O}(x_0)$ s'écrit $f(x_1, \dots, x_n)$. Pour simplifier nous désignerons par $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $(\frac{\partial f}{\partial x_i})_{x_0}$ la valeur de la dérivée partielle de f par rapport à la i -ième variable prise au point $x_1(x_0), \dots, x_n(x_0)$. On voit immédiatement que l'application $f \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \lambda_i$ est un vecteur tangent en x_0 ($\lambda_i \in \mathbb{R}$).

Nous allons montrer que réciproquement si X est un vecteur tangent quelconque et $f \in \mathcal{O}(x_0)$ alors $X(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} X(x_i)$.

DÉMONSTRATION.- Il est évident que $X(f) = 0$ si f est une fonction constante. Soit $f \in \mathcal{O}(x_0)$. Dans le voisinage U_i de coordonnées $\{x_1, \dots, x_n\}$ on peut écrire

$$f = a_0 + a_1(x_1 - x_1^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) + \sum_{i,j=1}^n (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) g_{ij}$$

$(a_i \in \mathbb{R}, g_{ij} \in \mathcal{O}(x_0), x_i^0 = x_i(x_0))$

appliquons X :

$$\begin{aligned} X(f) &= a_1 X(x_1 - x_1^0) + \dots + a_n X(x_n - x_n^0) + X\left(\sum_{i,j=1}^n (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) g_{ij}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i X(x_i) + \sum_{i,j=1}^n [(x_j(x_0) - x_j^0) g_{ij}(x_0) X(x_i) + (x_i(x_0) - x_i^0) g_{ij}(x_0) X(x_j) + \\ &\quad + (x_i(x_0) - x_i^0)(x_j(x_0) - x_j^0) X(g_{ij})] \end{aligned}$$

le crochet est évidemment nul, d'où le résultat annoncé puisque $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

5.- Posons $X_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Nous obtenons n vecteurs

tangents X_1, \dots, X_n pour lesquels $X_i(x_j) = \delta_{ij}$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants car $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = 0$ entraîne $(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i)(x_j) = 0$ pour tout j c'est-à-dire $\lambda_j = 0$. Si X est un vecteur quelconque de T_{x_0} nous avons

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X_i(f) X(x_i) \quad \text{donc}$$

$$X = \sum_{i=1}^n X(x_i) X_i$$

nous avons donc démontré :

PROPOSITION 5.1.- T_{x_0} est un espace vectoriel à n dimensions.

6.- Application linéaire tangente.

Soient V et W deux variétés différentiables et $\Phi : V \longrightarrow W$ une application différentiable en $x_0 \in V$, $X \in T_{x_0}$ et $y_0 = \Phi(x_0)$ à toute fonction $g \in \mathcal{O}(y_0)$ faisons correspondre le nombre réel

$$Y(g) = X(g \circ \Phi)$$

Y est une application $\mathcal{O}(y_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est un vecteur de T_{y_0} . L'application $T_{x_0} \longrightarrow T_{y_0}$ ainsi définie est évidemment linéaire, on l'appelle l'application linéaire tangente induite par Φ , ou différentielle de Φ . On la note $d\Phi$ ou $(d\Phi)_{x_0}$ ou Φ'_{x_0} . Si Ω est une troisième variété différentiable et si $\Psi : W \longrightarrow \Omega$ est différentiable en y_0 , on a

$$d(\Psi \circ \Phi)_{x_0} = (d\Psi)_{y_0} \circ (d\Phi)_{x_0}$$

7.- Champ de vecteurs tangents.

Un champ de vecteurs tangents X sur une variété différentiable V est une application qui fait correspondre à tout point x de V un vecteur tangent en ce point à V , X_x .

Soit f une fonction différentiable définie dans un voisinage U de V ; alors $X_x(f)$ est une fonction définie dans U que nous noterons simplement $X(f)$. Si cette fonction est encore différentiable quelle que soit f différentiable, nous dirons que le champ X est différentiable.

Existence de champs différentiables.

Soit U un voisinage de V dans lequel est défini un système de coordonnées $\{x_1, \dots, x_n\}$, et f une fonction différentiable sur U , qui s'écrit donc $f(x_1, \dots, x_n)$. Posons $X_{i,x}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_x$. $X_{i,x}$ est un vecteur tangent en x et l'application $x \rightarrow X_{i,x}$ est un champ différentiable de vecteurs définis sur U . Les n champs $X_{i,x}$ sont linéairement indépendants et tout champ différentiable peut s'écrire

$$X_x = \sum_{i=1}^n a_i(x) X_{i,x}$$

où $a_i(x)$ est C^∞ dans U puisque $a_i(x) = X_x(x_i)$.

Réciproquement $\sum_{i=1}^n a_i(x) X_{i,x}$ définit un champ différentiable sur U . Au lieu de X_i on écrit parfois $\frac{\partial}{\partial x_i}$ pour rappeler que $X_{i,x}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_x$.

Si X et Y sont 2 champs différentiables définis sur une variété V l'opération $XY - YX$ est appelée crochet de X et de Y et se note $[X, Y]$.

PROPOSITION 7.1.- Si X et Y sont deux champs différentiables de vecteurs tangents, $[X, Y]$ est un champ différentiable de vecteurs tangents.

$$\begin{aligned} \text{En effet si } X &= \sum_{i=1}^n a_i X_i & Y &= \sum_{i=1}^n b_i X_i \\ [X, Y] &= \sum_{i,j=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) X_j \end{aligned}$$

On vérifie que le crochet a les propriétés suivantes :

$$[a_1 X_1 + a_2 X_2, Y] = a_1 [X_1, Y] + a_2 [X_2, Y] \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

$$[X, X] = 0 \quad [X, Y] = -[Y, X]$$

$$[X, [Y, Z]] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad (\text{identité de Jacobi}).$$

PROPOSITION 7.2.- Soient $\Phi : V \rightarrow W$ une application différentiable, X_1 et X_2 des champs de vecteurs tangents différentiables de U alors

$$(d\Phi) [X_1, X_2] = [(d\Phi)X_1, (d\Phi)X_2].$$

Soit r_0 un point quelconque de V et $g \in \mathcal{O}(\Phi(x_0))$. Posons

$$Y_{i,\Phi(x)} = (d\Phi_x) X_{i,x} \quad (i = 1, 2).$$

Alors par définition : $(X_i(g \circ \Phi))_x = (Y_i(g))_{\Phi(x)}$, c'est-à-dire

$(X_i(g \circ \Phi))_x = (Y_i(g) \circ \Phi)_x$, expression qui est valable pour tout point x d'un voisinage convenable de x_0 dans V .

Donc

$$\begin{aligned} (Y_1 Y_2(g))_{\Phi(x)} &= X_1(Y_2(g) \circ \Phi)_x = (X_1 X_2(g \circ \Phi))_x \\ (Y_2 Y_1(g))_{\Phi(x)} &= (X_2 X_1(g \circ \Phi))_x, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} ([Y_1, Y_2](g))_{\Phi(x)} &= ([X_1, X_2](g \circ \Phi))_x \quad \text{c'est-à-dire} \\ [Y_1, Y_2]_{\Phi(x_0)} &= (d\Phi)_{x_0} [X_1, X_2]_{x_0} \end{aligned}$$

III.- FORMES DIFFÉRENTIELLES

8.- Différentielle d'une fonction.

Une fonction différentielle $f \in \mathcal{D}(x_0)$ peut être considérée comme une application différentiable en x_0 de V dans la variété R des nombres réels définie par une seule coordonnée y . L'application linéaire tangente df est une application linéaire de T_{x_0} dans T_{y_0} ($y_0 = f(x_0)$). Mais T_{y_0} est un espace vectoriel à 1 dimension sur R , engendré par le vecteur Y_0 défini par $Y_0(y) = 1$. On peut donc identifier T_{y_0} à R en identifiant Y_0 avec le nombre 1. df devient alors une fonction linéaire définie sur T_{x_0} à valeurs réelles, telle que

$$df(X) = X(f) \quad (X \in T_{x_0}).$$

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions appartenant à $\mathcal{D}(x_0)$, nous avons $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(X) = \lambda_1 df_1(X) + \lambda_2 df_2(X)$. L'espace des différentielles df , pour $f \in \mathcal{D}(x_0)$ est donc un sous-espace vectoriel de l'espace dual de T_{x_0} .

Mais si $\{x_1, \dots, x_n\}$ forment un système de coordonnées en x_0 , les différentielles dx_1, \dots, dx_n sont linéairement indépendantes; par conséquent:

PROPOSITION 8.1.- L'espace des différentielles en un point x_0 de V est l'espace dual de T_{x_0} .

9.- Algèbre des formes différentielles extérieures.

DÉFINITION 9.1.- L'algèbre extérieure construite sur l'espace vectoriel des différentielles en un point x_0 d'une variété V s'appelle l'algèbre différentielle en x_0 à la variété V . Nous la désignerons par E_{x_0} .

DÉFINITION 9.2.- Une application qui à tout point x d'un sous-ensemble A de U fait correspondre un élément homogène de degré p de E_x s'appelle une forme différentielle extérieure de degré p , définie sur A . Une forme différentielle de degré 1 s'appelle une forme de Pfaff.

Une forme différentielle de degré 0 est une fonction à valeur réelle. Nous savons donc ce que signifie une forme différentiable de degré 0. Par analogie, nous allons étendre cette notion à une forme de degré quelconque.

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système de coordonnées dans un voisinage de x_0 . Si x est un point de ce voisinage, $(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x$ forment une base pour les éléments de degré 1 de E_x . Une forme différentielle θ de degré p définie dans ce voisinage peut donc s'écrire au point x :

$$(1) \quad \theta_x = \sum u_{i_1 i_2 \dots i_p}(x) (dx_{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})_x$$

la sommation étant étendue au $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ p \end{smallmatrix} \right\}$ combinaisons de $\{i_1, \dots, i_p\}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$.

Par définition, θ est différentiable en x_0 si les $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ p \end{smallmatrix} \right\}$ fonctions $u_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{O}(x_0)$.

Pour justifier cette définition, il faut démontrer que cette notion est indépendante du système de coordonnées choisies en x_0 :

Soient $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ un autre système de coordonnées en x_0 . Alors dans un voisinage de x_0 nous avons

$$x_1 = f_1(x'_1, \dots, x'_n), \dots, x_n = f_n(x'_1, \dots, x'_n) \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(x_0).$$

Si x est assez près de x_0 , nous avons

$$(dx_i)_x = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_j} \right)_x (dx'_j)_x,$$

où $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_j} \right)_x$ est la valeur de $\frac{\partial f_i}{\partial x'_j}$ pour $x'_i = x'_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$

puisque $X(f_i(x'_1, \dots, x'_n))_x = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_j} \right)_x X(x'_j)_x$ pour tout $X \in T_x$.

Par conséquent, d'après (1)

$$\theta_x = \sum u_{i_1 \dots i_p} (x) \frac{D(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p})}{D(x'_{j_1}, x'_{j_2}, \dots, x'_{j_p})} (dx'_{j_1}) \wedge \dots \wedge (dx'_{j_p})$$

la sommation étant effectuée sur tous les systèmes

$(i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_p)$ tels que $i_1 < \dots < i_p$; $j_1 < \dots < j_p$

posons $u'_{j_1 \dots j_p} (x) = \sum_{i_1, \dots, i_p} u_{i_1 \dots i_p} (x) \frac{D(f_{i_1}, \dots, f_{i_p})}{D(x'_{j_1}, \dots, x'_{j_p})}$

et nous avons

$$\theta_x = \sum_{j_1, \dots, j_p} u'_{j_1 \dots j_p} (x) (dx'_{j_1}) \wedge \dots \wedge (dx'_{j_p})$$

si $u_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{D}(x_0)$ il en est de même de $u'_{j_1 \dots j_p}$ ce qui justifie la définition.

10.- Différentiation extérieure.

Soit θ une forme différentielle, différentiable en x_0 , de degré p .
Si $p = 0$ $\theta \in \mathcal{D}(x_0)$ et $(d\theta)_x$ a déjà été défini.

Dans le cas général, on définit la différentielle de θ donnée par l'expression (1) par :

$$(2) \quad (d\theta)_x = \sum (d u_{i_1 \dots i_p}) \wedge (dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})$$

là encore, il faut montrer que cette définition est indépendante du système de coordonnées choisies. Cependant, la vérification directe étant trop longue, nous établirons d'abord quelques propriétés formelles de l'opérateur d défini ci-dessus pour un système particulier de coordonnées.

$$(3) \quad (d(a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2))_x = a_1 (d\theta_1)_x + a_2 (d\theta_2)_x \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

(4) d est une antidérivation c'est-à-dire

$$(d(\theta \wedge \eta))_x = (d\theta)_x \wedge \eta_x + (-1)^p \theta_x \wedge (d\eta)_x$$

(θ, η différentiables, $p = \text{degré de } \theta$)

(5) $d^2 \theta = 0$ pour toute forme θ différentiable.

démonstration de (4) et (5) ((3) est immédiat)

Si θ et η sont différentiables en x_0 , on voit facilement que $\theta \wedge \eta$ est aussi différentiable en x_0 . D'après (3) il suffit de démontrer (4) quand

$$\theta_x = u(x) (dx_{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})_x$$

$$\eta_x = v(x) (dx_{j_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{j_r})_x$$

($i_1 < \dots < i_p$; $j_1 < \dots < j_r$; $u(x), v(x) \in \mathcal{D}(x_0)$).

Si les ensembles $\{i_1, \dots, i_p\}$ et $\{j_1, \dots, j_r\}$ ont un élément en commun, $\theta \wedge \eta = 0$, $d\theta \wedge \eta = 0$, $\theta \wedge d\eta = 0$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc ces 2 ensembles disjoints, et soit $\{k_1, k_2, \dots, k_{p+r}\}$ la réunion des i et j réordonnés de façon croissante. Nous avons

$$(\theta \wedge \eta)_x = \varepsilon u(x) v(x) (dx_{k_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{k_{p+r}})_x$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que la permutation

$$\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p & j_1, \dots, j_r \\ k_1, & \dots & k_{p+r} \end{pmatrix}$$

est paire ou impaire. Donc

$$\begin{aligned} (d(\theta \wedge \eta))_{x_0} &= \varepsilon ((du)_{x_0} v(x_0) + u(x_0)(dv)_{x_0}) (dx_{k_1})_{x_0} \wedge \dots \wedge (dx_{k_{p+r}})_{x_0} = \\ &= (d\theta)_{x_0} \wedge \eta_{x_0} + u(x_0)(dv)_{x_0} (dx_{i_1})_{x_0} \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})_{x_0} \wedge (dx_{j_1})_{x_0} \wedge \dots \wedge (dx_{j_r})_{x_0} = \end{aligned}$$

$$= (d\theta)_{x_0} \wedge \eta_{x_0} + (-1)^p \theta_{x_0} \wedge (d\eta)_{x_0}$$

$$\text{puisque } (dv)_{x_0} \wedge (dx_i)_{x_0} = - (dx_i)_{x_0} \wedge (dv)_{x_0}$$

démonstration analogue si p ou $r = 0$.

En particulier, si $\omega_1, \dots, \omega_r$ sont des formes de Pfaff différentiables en x_0 nous avons

$$(4') \quad (d(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r))_{x_0} = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} (\omega_1)_{x_0} \wedge \dots \wedge (\omega_{i-1})_{x_0} \wedge (d\omega_i)_{x_0} \wedge \dots$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{D}(x_0)$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

$$(df)_x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_x (dx_i)_x$$

puisque $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est C^∞ en x_0 , df est différentiable en x_0 et nous avons

$$(d(df))_{x_0} = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{x_0} (dx_i)_{x_0} \wedge (dx_j)_{x_0}$$

mais $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ donc $d^2 f = 0$.

Si $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(x_0)$ la formule (4') nous montre que

$$(5') \quad d(df_1 \wedge \dots \wedge df_r) = 0.$$

Si maintenant θ_x est donnée par (1) et $(d\theta_x)$ par (2), (3) et (5') montrent que $d(d\theta) = 0$. C.Q.F.D.

Montrons maintenant que l'opération d est définie indépendamment du système de coordonnées choisies.

Nous avons $\theta_x = \sum u_{i_1 \dots i_p}(x) (dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})$ dans le système de coordonnées $\{x_1, \dots, x_n\}$. Soient $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ un autre système de coordonnées dans le voisinage de x_0 , et d' l'opération de différentiation définie dans ce nouveau système; d' possède aussi les propriétés (3) (4) (5) par conséquent

$$\begin{aligned} (d'\theta)_{x_0} &= \sum (d'(u_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}))_{x_0} = \\ &= \sum (d' u_{i_1 \dots i_p})_{x_0} \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})_{x_0} + \\ &+ \sum u_{i_1 \dots i_p}(x_0) (d'(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}))_{x_0} \end{aligned}$$

mais par définition $d'f = df$ pour toute fonction f donc le deuxième \sum s'annule d'après (5'), et $d'u_{i_1 \dots i_p} = du_{i_1 \dots i_p}$. On a donc

$$(d'\theta)_{x_0} = \sum (du_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1 \dots i_p})_{x_0} = (d\theta)_{x_0}.$$

11.- Application induite sur E_{x_0} par une application différentiable $\Phi: V \rightarrow W$

Soient $x_0 \in V$, $\Phi(x_0) = y_0 \in W$, Φ'_{x_0} l'application linéaire tangente $T_{x_0} \rightarrow T_{y_0}$, E_{x_0} , E_{y_0} les algèbres extérieures en x_0 et y_0 . Φ'_{x_0} induit une application duale $\Phi'^*_{x_0}$ de E_{y_0} dans E_{x_0} de la manière suivante:

Soit $\theta \in E_{y_0}$, de degré p . C'est par définition une forme p -linéaire alternée sur T_{y_0} . Posons, pour tout système de p vecteurs

$$\begin{aligned} X_1, X_2, \dots, X_p \text{ de } T_{x_0} \\ (\Phi'^*_{x_0} \theta)(X_1, \dots, X_p) = \theta(\Phi'_{x_0} X_1, \dots, \Phi'_{x_0} X_p). \end{aligned}$$

$\Phi_{x_0}^* \theta$ est une forme p-linéaire alternée sur T_{x_0} donc un élément de degré p de E_{x_0} . On vérifie immédiatement que l'application

$\Phi_{x_0}^* : E_{y_0} \longrightarrow E_{x_0}$ est linéaire, et qu'elle est un homomorphisme d'anneaux :

$$\Phi_{x_0}^* (\theta \wedge \eta) = \Phi_{x_0}^* \theta \wedge \Phi_{x_0}^* \eta .$$

On montre enfin que d commute avec Φ^* :

Si θ est une forme différentielle différentiable en y_0 l'application $x \longrightarrow \Phi_x^* \theta$ définit une forme différentielle différentiable en x_0 que nous désignerons par $\Phi_x^* \theta$ et l'on a

$$d(\Phi_x^* \theta) = \Phi_x^* (d\theta) .$$
