Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

P. Lévy-Bruhl

Plans multiples et tresses algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 3, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A3_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1956/57
-:-:-:-

PLANS MULTIPLES ET TRESSES ALGÉBRIQUES.

(Exposé de Mme LÉVY-BRUHL, le 26.11.56)

Ces exposés ont pour but de donner un aperçu des recherches actuelles de l'école italienne sur le sujet fort ancien des plans multiples.

I. Généralités sur les plans multiples.

Etant donné une surface algébrique F irréductible et un réseau sur F de courbes irréductibles $|C|$ privé de points de bases, de genre π et de degré n donné, il existe des expressions liant les caractères du réseau aux invariants numériques de la surface. Si l'on suppose que F est plongée dans un espace à trois dimensions et que $|C|$ est découpée sur F par la gerbe de plans de sommet Z, alors la projection de F faite de Z sur un plan générique constitue un plan multiple n-uple dont les points correspondent aux groupes de n points de F appartenant à l'involution I définie par $|C|$, et dont les caractères sont les suivants :

1) le nombre $N = 2n + 2\pi - 2$, nombre d'intersections de C avec la jacobienne C_j est l'ordre de la courbe de diramation D du plan n-uple, courbe lieu des points du plan qui correspondent aux groupes de I dotés de deux points unis au moins.

2) $P = p^{(1)} + 9\pi - 9$, genre de C_j est le genre de D.

3) δ nombre de courbes C d'un faisceau dotées de points doubles.

$$\delta = n + 4\pi + 12\, p_a - p^{(1)} + 9 ,$$ est la classe de D.

4) K, nombre de contacts triples de C (points bases d'un faisceau de C osculatrices est le nombre de cuspides de C.

5) i, nombre de courbes C, dotées d'un cuspide est le nombre d'inflexion de D.

6) d, nombre de contacts doubles de C (points bases d'un faisceau de

courbes bitangentes) est le nombre de noeuds de D .

7) e , nombre de C dotées de deux points doubles est le nombre de tangentes doubles de D .

Le plan multiple est dit général, si le point Z a une position générique par rapport à la surface F dépourvue de courbe double. Le plan multiple est dit simple, si Z est un point multiple de la surface F dépourvue de courbe double. Si Z est le point à l'infini de l'axe Oz , la courbe de diramation s'obtient en annulant le discriminant de la fonction : $D(x , y) = 0$, c'est-à-dire le résultant des équations $F = 0$ $F'_z = 0$. $D = 0$ se décompose en deux parties $D = D_1 D_2^2$, où $D_2 = 0$ est une courbe critique apparente, projection d'une courbe double de F , et $D_1 = 0$ est la courbe de diramation proprement dite de la fonction implicite $z(x , y)$. Les formules pluckeriennes indiquées plus haut, montrent que la courbe de diramation d'un plan n-uple, pour $n > 2$, ne peut être donnée arbitrairement : par exemple, étant donnée la courbe plane $f(x , y) = 0$, on peut construire le plan cyclique $z^n = f(x , y)$ dont la courbe de diramation est constituée par f comptée $n-1$ fois et la droite de l'infini comptée 1 ou plusieurs fois quand l'ordre de f n'est pas multiple de n . Le problème fondamental se pose donc de caractériser les courbes planes qui sont de diramation pour un plan multiple, et pour chacune d'elles de construire effectivement les fonctions $z(x , y)$ correspondantes ; on ramène à ce problème celui analogue pour les variétés de diramation de fonctions de plusieurs variables. On peut donner une solution algébrique du topologique.

II. Aspect algébrique : solution de B. SEGRE.

B. SEGRE a obtenu les conditions suivantes pour que la courbe plane $f(x , y) = 0$ soit de diramation pour un plan n-uple provenant d'une surface générale d'ordre n : f doit être d'ordre $m = n(n-1)$, avoir $\delta = \frac{n(n-1)^2 (n-2)}{2}$ points doubles, dont $k = n(n -1)(n - 2)$ cuspides situés sur une courbe d'ordre $(n - 1)(n - 2)$ de façon à en constituer l'intersection complète. La démonstration est conséquence des théorèmes d'HALPHEN et de NOETHER étendue à la caractérisation des courbes planes, projections de l'intersection complète de deux surfaces. Les résultats se généralisent au cas des plans n-uples provenant des surfaces d'ordre $n + h$, dépourvues de courbes doubles, et douées d'un point multiple d'ordre h : la courbe f est alors d'ordre

$$m = (n + h)\ (n + h - 1) = h(h + 1)\ ,$$

possède une adjointe la touchant en $h(h + 1)$ points et ayant en ceux-ci un contact d'ordre $2n - 5$; enfin f possède $(n + h)(n + h - 1)(n + h - 2) - h(h + 1)(h + 2)$ cuspides.

III. Aspect topologique. Solution d'ENRIQUES et CHISINI.

<u>THÉORÈME D'INVARIANCE D'ENRIQUES</u>.–Soit f une courbe plane d'ordre $2m$ (si l'ordre est impair, il faudra adjoindre la droite de l'infini), et un faisceau de droites dont le sommet 0 a une position générique par rapport à la courbe (par exemple $y = tx$) ; pour une valeur générique de t , on obtient une droite n-uple ayant $2m$ points de diramation distincts. Dans le plan Πx de la variable complexe x , on considère $2m$ lacets issus de 0 et entourant les $2m$ points de diramation, et $2m$ substitutions se réduisant à des échanges $z_i\ z_j$ sur les branches correspondant à ces lacets, telles que le groupe engendré par celles-ci soit transitif, et que leur produit soit la substitution unite. (groupe de monodromie).

HURWITZ a détermine le nombre r des courbes $C_1 \ldots C_r$ birationnellement distinctes de genre $\Pi = \frac{m}{2} - n + 1$ qui sont représentées par la droite n-uple, $y = tx$. Si f est de diramation pour une surface F rationnellement déterminée, il faut que l'une de ces courbes, par exemple C_1 , section de F , soit rationnellement déterminée, et par suite sa riemanienne R à n feuillets, ne s'échange avec aucune autre, et coïncide avec elle-même pour tout chemin clos parcouru par t dans le plan τ de cette variable complexe.

Si on part de $t = 0$ et si l'on considère un système ordonné de lacets L_1 , $L_2 \ldots L_{2m}$ issus de 0 et entourant les $2m$ points A_i d'intersection de $y = 0$ et de f , quand t décrit un chemin clos du plan τ , C_1 varie par continuité et sa riemanienne peut se construire par feuillets superposés sur Πx , puisqu'à la droite multiple $y = tx$, on peut substituer sa projection sur l'axe des x , faite du point à l'infini de Oy. Il en résulte que si le chemin dans τ est tel qu'il ne comprenne aucun point critique t , pour lequel deux points A_i coïncident il peut se déformer et se réduire à un cycle nul en ne donnant aucune condition d'invariance pour C_1 . Ainsi les conditions d'invariance de R se réduisent à celles correspondant aux lacets de τ entourant les points critiques t associés aux points de contact T des tangentes à f issues de 0 , aux points doubles D , aux cuspides K de f .

ENRIQUES montre que l'ordre des lacets étant convenablement choisi, de façon que deux lacets relatifs à deux points A_i et A_{i+1} qui se confondent, délimitent une aire ne comprenant aucun autre point A_j, c'est-à-dire que ces deux lacets peuvent être infiniment voisins sans traverser d'autres lacets (ils sont dits contigus).

1) si A_i et A_{i+1} se confondent en un point T, les échanges relatifs aux deux lacets sont identiques, et reciproquement s'il en est ainsi la Riemannienne est inchangée.

2) si A_i et A_{i+1} se confondent en un point D, A_i et A_{i+1} coïncident en un point image de deux points distincts de C_1 ; les échanges relatifs aux deux lacets portent sur deux branches différentes, donc sont permutables, et disjoints en général, et réciproquement.

3) si A_i et A_{i+1} se confondent en un point K, K est image d'un point d'inflexion de C_1 ; les échanges relatifs aux deux lacets doivent donner une substitution d'ordre 3 portant sur deux couples de branches ayant une branche commune. Les échanges doivent être enchaînés et réciproquement.

Ces conditions obtenues sont aussi suffisantes: partant de la courbe $f = 0$, et de la droite n-uple $y = tx$, on détermine dans chaque plan du faisceau $y = tx$, la courbe C qui projetée du point à l'infini z donne la droite n-uple. Il existe un nombre fini d'images projectives de C, d'ordre $n + h$ passant par Z, multiple d'ordre h, et coupant l'axe Oz en n points donnés. Ces courbes correspondent à s fonctions diramées $z_i(x)$. Alors $z(x) = \sum_1^0 z_i(x)_i$ correspond à une courbe représentée sur la riemanienne C_1 et rationnellement définie. Par variation de t, cette courbe engendre une surface F, dont la projection est le plan n-uple diramé par f (on ne peut avoir en plus de f des droites issues de O, si les points sur Oz sont tous distincts.

<u>ÉNONCÉ DU THÉORÈME</u>.- Pour $n > 2$, les conditions d'existence d'un plan n-uple ayant une courbe de diramation $f = 0$ donnée, dotée seulement de noeuds et de cuspides, s'expriment par les conditions d'invariance d'une riemanienne représentée sur la droite n-uple $y = tx$ par rapport aux chemins clos que peut décrire le paramètre t, à partir de l'origine O et entourant les points correspondants respectivement aux tangentes à f issues de O, aux droites joignant O aux noeuds et aux cuspides, les échanges sur les déterminations

de z doivent être respectivement identiques, disjoints, enchaînés.

En d'autres termes, à la section de f par $x = 0$ correspond un nombre fini de droites n-uples ; s'il arrive qu'une de ces droites revienne sur elle-même, (c'est-à-dire que se reproduise le système des échanges relatif aux points de diramation), lorsque x varie, alors cette droite multiple décrit un plan n-uple. Ces conditions d'invariance ne changent pas quand f varie par continuité.

COROLLAIRE.- Etant donné dans un plan un système continu de courbes f dotées de noeuds et de cuspides, si l'une d'elles est courbe de diramation d'un plan n-uple, toutes les autres courbes du système le sont aussi.

Ceci permet la construction des courbes de diramation à partir de leurs formes dégénérées.

B. PROPRIÉTÉS DES COURBES DE DIRAMATION.- O. CHISINI a montré que la courbe de diramation f d'un plan m-uple général s'obtient par variation continue de la courbe $2f'$, où $f' = C_1 + C_2 + \dots + C_{m-1}$, les courbes C_i ayant un ordre égal à leur indice, et telles que

1) tout point $Q = C_i \cap C_j$ $(j \neq i \pm 1)$ donne lieu à 4 points doubles de f.

2) tout point $P = C_i \cap C_{i+1}$ donne lieu à trois cuspides et à un point de contact d'une tangente parallèle à Oy de f.

3) trois courbes C n'ont pas de point commun, et n'ont que des singularités essentielles (si en enlevant à une courbe de diramation un point singulier, la courbe obtenue n'est plus de diramation pour un plan multiple de même type, le point singulier est dit essentiel).

Condition suffisante.- Oy étant générique, les points d'intersection avec f forment des couples de points infiniment voisins des intersections de cet axe avec chaque C_i. La fonction $z(y)$, à m branches, a pour points de diramation les valeurs de y associées aux intersections précédentes de façon qu'à un de ces points soit associé le couple de points infiniment voisins de C_i auquel correspond l'échange $(i, i+1)$ de $i = 1$ à $m-1$. En faisant varier x par continuité, les points de diramation précédents définissent $z(x, y)$.

<u>Condition nécessaire</u>.- Une surface F d'ordre m dont le point à l'infini Z de Oz a une position générique et dépourvue de courbes doubles donne lieu à un plan n-uple du type précédent : la propriété est démontrée d'abord pour la surface d'ordre 4

$$A_0 z^4 + A_1 f_1(x , y) z^3 + A_2 f_2(x , y) z^2 + A_3 f_3(x , y) z + A_4 f_4(x , y) = 0$$

où la courbe de diramation f a pour équation le déterminant de Sylvester associé, égalé à 0 ; pour A_0, A_1, A_2 tendant vers 0 ; f tend vers une courbe 2f' ayant les propriétés voulues.

<u>Généralisation</u>.- Si la surface F dépourvue de courbe multiple est d'ordre m + h et possède un point h-uple au point à l'infini Z. Le plan m uple associé est simple et la courbe de diramation f variant dans un système continu peut dégénérer en une courbe 2f' où $f' = C_1 + \dots + C_{m-1}$, les C_i ayant pour ordre h + i - 1, et jouissant des propriétés 1, 2, 3.

C. <u>TRESSES ALGÉBRIQUES DE CHISINI (ou faisceaux caractéristiques.)</u>

L'application directe du théorème d'ENRIQUES pour reconnaître si une courbe est de diramation est difficile. C'est pourquoi CHISINI a introduit la notion de tresse algébrique. Celle-ci construite, il est aisé de reconnaître si la courbe est ou non de diramation d'un plan multiple et de déterminer ces plans s'ils existent.

<u>Définition de la tresse algébrique</u>.- Si f(x , y) = 0, est une courbe plane algébrique, elle définit y comme fonction de x , et y(x) possède dans le plan Πx des points D_1, D_m de diramation effective ou apparente. On considère un système de lacets $L_1 , \dots , L_m$ qui issus d'une origine O générique entoure les points D_i. L'ensemble ordonné de ces lacets constitue une ligne L' de Πx, close, orientée, que l'on peut supposer parcourue par un point mobile x qui dépend univoquement d'un paramètre t , et tel que pour parcourir un lacet, le mobile emploie une unité du temps t . Pour chaque point x de L', on a n valeurs $y : y_r = y'_r + iy''_r$; y' et y'' sont des fonctions réelles de t . Dans S_3 rapporté aux trois axes orthogonaux t , y' , y'' on détermine ainsi n courbes gauches qui s'entrelacent entre elles pour former la tresse algébrique relative à f . On peut ainsi concevoir la tresse de la façon suivante : à l'origine correspond dans Πy n valeurs de y que l'on peut ordonner de 1 à n . Par une transformation

topologique sur Πy, on peut amener ces points à être les sommets d'un polygone régulier orienté P. Quand le plan Πy se meut en fonction du temps t, par translation perpendiculaire à lui-même et dans le sens positif, les n déterminations y_i décrivent des courbes réelles f_i qui ne se rencontrent pas, mais s'entrelacent selon le groupe de monodromie de $f(x, y) = 0$.

Propriétés.-

1) pour toute valeur entière de t, c'est-à-dire pour tout passage de x par 0, le groupe de n points y_r reprend sur Πy la même configuration (bien que les n points composant le même groupe puissent s'échanger entre eux).

2) A chaque lacet L_i correspond un trait ou secteur de la tresse limité par deux diaphragmes correspondant à deux passages successifs de x à l'origine. Cette séparation de la tresse en secteurs la fait différer de celle de ARTIN.

3) Propriété fondamentale. Si l'on fait subir à la position finale du plan Πy une rotation négative, les fils f_i peuvent devenir sans se couper les arêtes latérales d'un prisme régulier.

4) Chaque trait est symétrique par rapport à un plan équidistant des deux diaphragmes (chaque lacet est parcouru deux fois en sens opposé).

5) Lorsque x parcourt L' en entier, chaque valeur y_r se reproduit et on peut faire coïncider les premiers et derniers diaphragmes. La tresse prend une forme torique. Si l'on supprime les diaphragmes, la tresse se réduit à un groupe de n hélices parallèles qui font chacune un tour entier autour de leur axe commun.

6) La représentation plane s'obtient en plaçant les $n-1$ premiers côtés du polygone P sur l'axe réel de façon que les points $y_1 \dots y_n$ appartiennent au segment orienté $y_1 y_n$. Les fils sont appliqués sur un plan, et il est nécessaire d'indiquer lequel des deux fils passe sur l'autre en tout point d'intersection apparente. Chaque trait plan est doué d'une symétrie géométrique déduite de celle du trait spacial.

7) Torsion d'un couple de fils : la torsion d'un couple de fils est égale au nombre de fois que l'un quelconque des fils entoure l'autre. Ce nombre est donné par l'application du théorème de l'indicateur logarithmique de Cauchy

à la fonction $y_i - y_j = re^{i\theta}$ sur une ligne S extérieure à L', ligne constituée par les lacets qui aboutissent aux pôles de la fonction $y(x)$ (y compris le pôle infini), y_i et y_j étant les déterminations associées aux deux fils.

$$\frac{1}{2\pi}\int_S d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_{L'} d\theta = N_0 - N_\infty$$

N_0 et N_∞ indiquent le nombre des zéros et des pôles de la fonction $w = y_i - y_j$ à l'intérieur de S. Ce nombre est le nombre de fois que le fil associé à w entoure la ligne zéro ; puisqu'une transformation continue n'altère pas le nombre des enroulements de deux fils, on peut amener f_j sur la ligne zéro.

Vu la propriété fondamentale des tresses, chaque couple de fils d'une tresse a nécessairement sur toute la tresse la torsion positive d'un tour.

8) Ordre. L'ordre n_i d'un fil est égalé au nombre des pôles de la fonction $y(x)$ qui appartiennent au ième feuillet de la riemannienne obtenu en coupant le plan π_x suivant les lacets L.

Si la courbe ne passe pas par le point à l'infini de Oy, il existe un seul pôle sur chaque lacet (le pôle est infini), donc l'ordre des fils est 1, et la somme des ordres des fils est égale à l'ordre de la courbe. La torsion des deux fils d'ordre n_i et n_j est $N_0 - N_\infty = -(n_i + n_j - 1)$.

9) Trait canonique. Si le lacet L correspond à l'échange $y_i\ y_j$ sans changement des autres déterminations y_k, les fils f_k de la tresse sont les arêtes latérales du prisme et n'entourent aucun des fils f_i et f_j. Ces deux fils appelés principaux s'enroulent entre eux et donnent les torsions suivantes, l'unité d'angle étant le demi tour :

$$(ij) = 1 + \alpha$$

$(ik) = (jk) = 0$ si k n'appartient pas à l'intervalle i, j.

Si i précède j dans l'ordre naturel, et si k est compris entre i et j,

$$(ik) = -1 \quad , \quad (jk) = 1$$

10) Trait élémentaire, et élémentaire inverse. Si le lacet L correspond à l'échange y_i, y_j en changeant aussi avec y_i, y_j la détermination y_k,

le fil f_k fait un tour négatif avec le fil f_i ou f_j qui le suit dans l'ordre cyclique naturel et un tour positif avec l'autre. Ce trait est appelé élémentaire.

Si le fil f_k fait un tour positif avec f_i ou f_j qui le suit dans l'ordre naturel des indices et un tour négatif avec l'autre fil, le trait est appelé élémentaire inverse.

Les traits canoniques et élémentaires se présentent en particulier quand l'origine O est voisine du point de diramation.

Tout fil différent de f_i, f_j, f_k a même torsion que dans le trait canonique (ij) . Si f_i est le fil précédant f_k, et si le trait est élémentaire, la torsion (ik) est celle du trait canonique augmentée de 2 , la torsion (jk) est celle du trait canonique diminuée de 2 . Si le fil est élémentaire inverse, on prend la convention de signe différente.

11) Trait quasi élémentaire. Dans le trait élémentaire au fil f_k est substitué un ensemble H de fils qui sont consécutifs dans l'ordre naturel des indices, parallèles, et tels qu'entre deux de ceux-ci ne soit compris aucun des fils f_i et f_j. Ce trait est appelé quasi élémentaire. De plus à H peut être substitué un ensemble de fils H_k ayant chacun les propriétés de H .

12) Trait élémentaire généralisé. Le fil f_k entoure de plus l'ensemble des deux fils f_i et f_j suivant m tours positifs et négatifs.

13) <u>Traits relatifs aux lacets qui entourent un point remarquable</u>.

a) Si le lacet L correspond à un point d'abscisse $x = a$ de contact d'une tangente simple à f parallèle à Oy, et s'il conduit à l'échange $y_i\ y_j$, le couple des fils $f_i\ f_j$ a la torsion 1 , car $y_i - y_j$ est équivalent dans le domaine du point à $(x - a)^{\frac{1}{2}}$ et son argument varie de π .

b) Si le lacet L correspond à un point double de F en lequel coïncident y_i et y_j, alors le couple des fils f_i et f_j a la torsion 2 . En effet $y_i - y_j$ est équivalent à $x - a$ dans le domaine du point double d'abscisse $x = a$, et son argument varie de 2π ; ce résultat s'obtient encore comme limite de deux points de diramation simples confondus. Le trait se note $(y_i\ y_j)^2$.

Si le lacet L correspond à un point r-uple, à tangentes toutes distinctes et non parallèles à Oy , il existe r fils associés formant $\frac{1}{2}\, r(r-1)$ couples ayant chacun la torsion 1 .

c) Si le lacet L correspond à un point de diramation double, c'est-à-dire à une tangente d'inflexion parallèle à Oy , il existe une substitution cyclique d'ordre 3 , et les trois déterminations correspondent à trois couples de fils de torsion $\frac{2}{3}$. Si la tangente parallèle à Oy a un contact d'ordre r , il existe r fils de la tresse donnant lieu à des couples de fils de torsion $\frac{2}{r}$.

d) Si le lacet L entoure un cuspide en lequel coïncident trois points de diramation simples, la torsion des trois couples coïncidants de fils est 1 . Donc la torsion du couple de fils correspondant aux deux déterminations y_i y_j qui coïncident est 3 : le trait est noté $(y_i\, y_j)^3$.

D. OPÉRATIONS SUR LES TRESSES.- La construction de la tresse d'une courbe donnée contient plusieurs arbitraires : position de l'origine des lacets L dans le plan Πx , configuration de l'ensemble des lacets L , ordre dans Πy des déterminations y_r .

Le changement de l'ordre des déterminations y_r peut s'obtenir par les transformations K circulaires définies par DEDO faisant passer du polygone P au polygone P' de mêmes sommets, mais différemment joints dans Πy ; si K opère seulement sur deux déterminations y_1 et y_2 , K consiste en un demi-tour positif du segment $y_1\, y_2$ autour de son milieu. K se décompose ainsi en opérations élémentaires K' telles que $K'^2 = K$ et telles que K' opérant, sur l'échange y_1 , y_2 dans les plans Πy se réalisent en échangeant sur chaque diaphragme les points y_1 et y_2 de façon que, se déplaçant sous les fils intermédiaires, l'un pivote d'un demi tour autour de l'autre : K opérant sur les fils f_i et f_j transforme le trait canonique ik en trait $ik(j)$.

La variation de configuration de l'ensemble des lacets L peut s'obtenir par des échanges successifs entre lacets consécutifs, échanges qui sont de deux natures désignés par DEDO sous le nom d'opérations P et S : étant donnés un couple de lacets A , B (c'est-à-dire deux traits consécutifs de la tresse), P laisse fixe le premier lacet A et fait passer le deuxième de la gauche à la droite de celui-ci. S laisse fixe le second et fait passer le premier de la droite à la gauche de celui-ci.

Comme la torsion totale d'un couple de fils d'une tresse est égale à un tour, et si l'on suppose moyennant un changement de numérotation sur les lacets que A et B sont les deux derniers, la torsion de tout couple de fils sur l'ensemble AB reste inchangée si on effectue une opération P ou S sur AB .

Pour obtenir le transformé par S , on calcule la torsion U sur l'ensemble des traits AB , c'est-à-dire qu'on ajoute à la torsion dans A , la torsion du couple transformé dans B par l'échange défini par A . Les torsions dans le nouveau trait s'obtiennent en retranchant de ce total les torsions associées dans B , et ces torsions sont celles des couples transformées par la substitution liée à B .

Pour faire opérer P , on retranche à la torsion de l'ensemble U la torsion des transformés de couples de A par la substitution liée au transformé de A . Ceci conduit à l'interprétation algébrique suivante.

<u>Interprétation algébrique des tresses.</u>

Nous appellerons secteur une expression de la forme

$$T = (s \ , \ s_1^{p_1} \ , \ s_2^{p_2} \qquad s_n^{p_n})$$

où s et les s_i sont des permutations des entiers 1 , 2 , N .

Le monôme écrit à gauche de la virgule ne doit pas s'entendre au point de vue du produit des permutations, mais les s_i doivent être considérées comme des variables indépendantes, le produit des s_i étant associatif. Au contraire les s , s' , s'' se composeront comme des permutations.

Nous allons définir pour les secteurs une structure de groupe en définissant le produit de deux secteurs, un secteur inverse d'un secteur donné et un secteur neutre.

a) Produit de deux secteurs.

Soient $T = (s \ ; \ \prod s_i^{p_i})$ i de 1 à n

et $T' = (s' ; \ \prod s_i'^{p_i'})$ i de 1 à n'

on pose

$$TT' = (s's \ ; \ \prod_{1,n} s_i^{p_i} \ \prod_{1,n'} (s^{-1} \ s_j' s)^{p_j'})$$

où $s^{-1} \ s_j' \ s$ est la transformée de s_j' par s .

On vérifie immédiatement qu'un tel produit est associatif

$$(TT')T'' = T(T'T'')$$

On trouve en effet pour les deux nombres

$$TT'T'' = (s''s's \ ; \prod s_i^{p_i} \prod (s^{-1} s_i' s)^{p_i'} \prod (s^{-1} \ s^{-1} \ s_i'' \ s' \ s)^{p_i''}$$

b) Inverse d'un secteur.

L'inverse du secteur T est défini par

$$T^{-1} = (s^{-1} \ , \prod (s \ s_i \ s^{-1})^{-p_i})$$

et l'élément neutre $E = (e \ ; \ e^0)$

<u>Représentation d'un secteur comme produit de secteurs fondamentaux.</u>

Soit une permutation quelconque des membres $(1 \ , \ 2 \ , \ \ldots \ , \ n)$: soit P' . Nous dirons que nous effectuons sur P' l'opération T_i quand nous échangeons les éléments occupant la ième et la i+1 ème place. Nous affecterons T_i d'un exposant égal à + ou - 1 , suivant que cet échange d'éléments consécutifs s'est effectué avec une torsion positive ou une torsion négative. T_i^e avec $e = \pm 1$ sera dit <u>secteur fondamental</u>.

La succession des T_i est évidemment associative, et comme l'inverse de T_i^e est évidemment T_i^{-e} , il est clair que les T_i forment un groupe, le produit $T_i T_j$ étant défini par la succession des opérations T_i et T_j .

Dans ce groupe, il n'y a pas commutativité en général, mais on a les relations suivantes, conformes à celles de Mr ARTIN :

1) $T_i^{\,a} \ T_i^{\,b} = T_i^{\,a+b}$

2) $T_i T_j = T_j T_i$ si $j \neq i+1$ et de $i-1$

3) $T_i^{a_i} \ T_{i+1}^{1} \ T_i^{-a_i} = T_{i+1}^{-a_i} \ T_i^{1} \ T_{i+1}^{a_i}$ $\qquad a_i = \pm 1$

Ces trois formules sont évidentes si on écrit les suites successives de permutations avec les torsions correspondantes, ou si l'on considère les fils d'une tresse sur lesquels on effectue les opérations indiquées.

Un secteur quelconque pouvant être engendré par des échanges successifs de fils consécutifs peut être représenté par un produit de secteurs fondamentaux, étant entendu que deux secteurs sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une des opérations (1 , 2 , 3) . Pour obtenir le trait sous la forme définitive, avec les noms des fils initiaux, il suffira d'appliquer les règles du paragraphe précédent.

D'après ce qui précède tout secteur peut s'écrire comme produit de monômes T_i tels que dans chacun de ces monômes les indices soient consécutifs. Cela revient une fois les produits effectués à avoir une suite d'échanges portant sur un même fil i : soient s_1 ; ... , s_h où les échanges portent sur le fil i et sur les h - 1 consécutifs. Nous désignerons le monôme $s_1^a \dots s_h^m$ par la notation S_{ij} , si le fil i se trouve, après h échanges, voisin du fil j . Un secteur T peut alors se représenter sous la forme

$$T = (s \; ; \prod S_{ij})$$

On appelle fil canonique dans le secteur tout fil dont l'indice ne figure pas dans la suite des indices (i , j) . On peut considérer que ces fils ne se déplacent pas dans les échanges successifs, mais que ce sont les autres qui tournent autour d'eux.

Dans ce qui suit, nous supposerons que les s figurant dans les traits sont des échanges portant sur deux fils.

L'opération P effectuée sur les deux traits T , T' revient à chercher le trait tel que $TT' = XT$, ou $X = TT'T^{-1}$

$$TT'T^{-1} = (t \; ; \prod s_i^{p_i} \prod (s^{-1} s'_i s)^{-p'_i} \prod t^{-1} s_i t)^{-p_i}$$

en posant $t = s^{-1}s's$, et à condition de prendre les s_i de T^{-1} dans l'ordre inverse de celui de T .

L'opération S faite sur deux secteurs revient à chercher X , tel que $TT' = T'X$ ou $X = T'^{-1}TT'$.

$$T'^{-1}TT' = s'ss'^{-1} \; ; \prod (ss'_i s^{-1})^{p'_i} \prod (s's_j s'^{-1})^{p_j} \prod (s's^{-1}s'_i ss'^{-1})^{p'_i}$$

Trait canonique : le trait canonique (ij) est le trait

$$S_{ij} \, (ij)^{+1} \, S_{ji}$$

où tous les exposants du premier S_{ij} sont - 1 ; tous ceux de $S_{j,i}$ sont + 1 .

Trait élémentaire : il a les trois formes fondamentales suivantes. On le note par ij(k) .

a) $i < j < k$ $\qquad S_{kj}^{+1}\ (kj)^2 S_{ji}^{-1}\ (ij)^1 S_{jk}^{1}\ (ki)^{-2} S_{ki}^{-1}$

b) $k < i < j$ $\qquad S_{ki}^{-1}\ (ki)^{-2} S_{ij}^{-1}\ (ij)^1 S_{jk}^{-1}\ (jk)^2 S_{ki}^{-1}$

c) $i < k < j$ $\qquad S_{ik}^{-1}\ (ik)^1\ S_{ij}^{-1}\ (ij)^1 S_{jk}^{1}\ (jk)^{-1} S_{\text{[illegible]}}^{1}$

Les exposants indiqués sur chaque S_{uv} indiquent l'exposant commun de chaque facteur de S_{uv} .

Exemple 1.- Le trait canonique 1 , 4 peut s'écrire comme produit de secteurs fondamentaux sous la forme $T_1^{-1} T_2^{-1} T_3\ T_2\ T_1 = T_3^{-1} T_2^{-1} T_1\ T_2\ T_3$, comme le montre les suites de permutations

1 2 3 4		1234
2 1 3 4		1243
2 3 1 4	ou	1423
2 3 4 1		4123
2 4 3 1		4213
4 2 3 1		4231

qu'on peut aussi représenter avec les s_i où l'on considère les noms des fils par

$$(12)^{-1}(13)^{-1}(14)^{1}(43)^{1}(42)^{1} = (34)^{+1}(42)^{1}(41)^{1}(12)^{-1}(13)^{-1}$$

ou
$$S_{14}^{-1}(14)\ S_{41}^{1} = S_{41}^{1}\ (14)\ S_{14}^{-1}$$

Pour obtenir le secteur $14(2)$, il faudrait par exemple faire précéder le premier schéma de deux échanges $(12)^{+1}$ et le faire suivre de deux échanges $(42)^{-1}$.

Remarquons que le produit de deux échanges (ij) et (hk) laissent toujours inchangé les fils autres que i , j , h , k . Donc dans le produit de deux secteurs un fil canonique reste canonique. Il suffit donc de s'occuper des parties autres que les S_{ij} et de rétablir dans le résultat final les S_{uv} nécessaires pour décrire le secteur.

Etude des opérations P et S dans différents cas.

I.- Les traits T et T' portent sur des échanges distincts $s = (ij)$ $s' = hk$

$$i < j \quad , \quad h < k$$

$$T = (ih)^{-e}(ik)^{-e'}(ij)^{1}(jk)^{e'}(jh)^{e} \qquad T' = (ih)^{-f}(jh)^{-f'}(hk)^{1}(jk)^{f'}(ik)^{f}$$

où e , e' , f , f' sont égaux à 1 ou 0 si T et T' sont canoniques.

$$TT'T^{-1} = (ih)^{-e}(ik)^{-e'}(ij)^{1}(jk)^{e'}(jh)^{e-f}(ih)^{-f'}\underline{(hk)}^{1}(ik)^{f'}(jk)^{f-e}(jh)^{-e'}(ij)^{1}(ih)^{e'}(ik)^{e}$$

et $$T'^{-1}TT' = (ih)^{-f}(jh)^{-f'}(hk)^{-1}(jk)^{f'}(ik)^{f-e}(ih)^{-e'}\underline{(ij)}^{1}(jh)^{-e'}(jk)^{e-f}(ik)^{-f}(hk)^{1}(ih)^{f'}(jh)^{f}$$

Si les traits sont canoniques :

I.- Si (ij) et (hk) ne s'enchevêtrent pas, il existe 3 cas (extérieurs l'un à l'autre $e = e' = f = f' = 0$; intérieurs $e = e'$, $f = f'$ un des couples étant nuls, l'autre égal à 1), les formules donnent :

$$TT'T^{-1} = T' \quad \text{et} \quad T'^{-1}TT' = T \, .$$

après réduction s'il y a lieu suivant les règles 1 , 2 , 3) .

II.- Si (ij) et (hk) s'enchevêtrent :

a) $i < h < j < k$: $e = 1$ $e' = 0$ $f = 0$ $f' = 1$.

$$TT'T^{-1} = (ih)^{-1}(ij)^{1}(jh)^{1}\underline{(hk)}(ik)^{1}(jk)^{-1}(ij)^{-1}(ik)^{1}$$

après réduction :

$$= (ih)^{-2}(jh)^{1}\underline{(kh)}^{1}(jk)^{-1}(ik)^{2}$$

et $$T'^{-1}TT' = (jk)^{-2}(jh)^{-1}\underline{(ij)}^{1}(ih)^{1}(ik)^{2}$$

b) $h < i < k < j$: $e = 0$ $e' = 1$ $f = 1$ $f' = 0$.

$$TT'T^{-1} = (ik)^{-1}(ij)^{1}(jk)^{1}(jh)^{-1}\underline{(hk)}^{1}(jk)^{1}(jh)^{-1}(ij)^{-1}(ih)^{1}$$

$$= (jk)^{2}(ik)^{-1}\underline{(kh)}^{1}(ih)^{1}(jh)^{-2}$$

et $$T'^{-1}TT' = (ih)^{-1}(hk)^{-1}(ik)^{1}(ih)^{-1}\underline{(ij)}(jh)^{1}(jk)^{-1}(hk)^{1}(jh)^{1}$$

$$= (ih)^{-2}(ik)^{1}\underline{(ij)}^{1}(jk)^{-2}(jh)^{2}$$

<u>THÉORÈME</u>.- Si les échanges (ij) et (hk) portant sur 2 traits canoniques T et T' forment deux couples non enchevêtrés, le transformé de T (ou T') par S (ou P) est T' (ou T) . Si les couples s'enchevêtrent, le transformé de T par S est (ij) (h , k) et celui de T' par P est (hk) (i , j)

- Si les traits T et T' ne sont plus canoniques mais élémentaires :

$$T = (j\ell)^{2}(mi)^{-2}(ih)^{-e}(ik)^{-e'}(ij)^{1}(jk)^{e'}(jh)^{e}(mj)^{2}(j\ell)^{-2}$$

Si $n < i < j < \ell$ si n est un fil élémentaire $i < n < j$ il faudra intercaler $(in)^{-1}$ et $(jn)^{+1}$ par rapport à h, k ~~dans la suite.~~ T' ~~a une~~ forme analogue.

En écrivant $TT'T^{-1}$ et $T'^{-1}TT'$ sur ces nouvelles formes on arrive aux résultats :

Si les traits $T = ij(\ell)$ et $T' = (hk)(\ell')$ sont tels que $(ij\ell)$ et $(hk\ell')$ ne s'enchevêtrent pas, les opérations P et S les transforment l'un dans l'autre.

Cas particuliers.- Si T a pour fil élémentaire h ou k et T', i ou j, les formes du trait canonique suffisent mais les exposants e e' f f' sont différents.

: $T = ij(h)$ et $T' = hk(i)$ où $i < h < k < j$.

alors $e = -1$ $e' = 1$ $f = 2$ $f' = 0$

on trouve : $TT'T^{-1} = (ih)^{+1}(ik)^{-1}(ij)(jk)^{1}(jh)^{-3}\underline{(hk)}^{1}(jk)^{3}(jh)^{-1}(ij)^{-1}(ih)^{1}(ik)^{-1}$

l'échange est (hk) i est élémentaire inverse, j aussi mais avec enroulement.

II.- Les traits T et T' portent sur des échanges enchainés $s = ij$ $s' = ik$.

1) si $i < j$: $T = (ik)^{-e}(ij)(jk)^{+e}$
et $i < k$ $T' = (ij)^{-f}(ik)(jk)^{+f}$

$$TT'T^{-1} = (ik)^{-e}(ij)^{1}(jk)^{e}(ij)^{-f}\underline{(jk)}^{1}(ik)^{f}(jk)^{-e}(ik)^{-1}(ij)^{e}$$

$$T'^{-1}TT' = (ji)^{-f}(ik)^{-1}(kj)^{f}(ik)^{-e}\underline{(kj)}^{1}(ji)^{e}(kj)^{-f}(ij)^{1}(ik)^{f}.$$

Si $\underline{i < j < k}$ et T et T' canoniques ; $e = 0$ $f = 1$.

$$TT'T^{-1} = (jk) = T'^{-1}TT'$$

Si $\underline{i < k < j}$ et T et T' canoniques : $e = 1$ $f = 0$

$$TT'T^{-1} = (ik)^{-1}(ij)(jk)(ik)^{-1}(ij)^{1} = (ik)^{-2}(jk)(ji)^{2} = T'^{-1}TT'$$

2) si $i > j$ et $i > k$ $\left| \begin{array}{l} T = (jk)^{-e}(ji)(jk)^{e} \\ T' = (jk)^{-f}(ki)(ji)^{f} \end{array} \right.$

3) si $j < i < k$: $T = (ij)$ $T' = (ik)$
ou $k < i < j$

<u>CONCLUSION</u>.- Si T et T', canoniques, portent sur les échanges (ij) et (ik), si l'ordre $i\ j\ k$ est l'ordre naturel, T et T' ont même transformé : le trait canonique (jk) ; si l'ordre $i\ j\ k$ présente une inversion le transformé unique est $(jk)\,(i)$, élémentaire i. De façon analogue : si T porte sur l'échange (ij) et a un fil élémentaire ℓ, si ik et ℓj ne s'enchevêtrent pas le fil est élémentaire, sinon il est élémentaire inverse dans le transformé précédent, mais le fil ℓ tourne autour des fils (ij) qui s'échangent.

Exemple : $i < j < \ell < k$: $T = (\ell j)^2(ij)(\ell i)^{-2}$

$$T' = (ij)^{-1}(\ell i)^{-1}(ik)(\ell k)^1(jk)^1$$

$$TT'T^{-1} = (\ell j)^2(ij)(\ell i)^{-2}(ij)^{-1}(j\ell)^{-1}\underline{(jk)}^1(\ell k)^{+1}(ik)^1(\ell i)^{+2}(ik)^{-1}(\ell k)^{-2}$$

$$T'^{-1}TT' = (ji)^{-1}(\ell i)^{-1}(ik)^{-1}(\ell k)^{+1}(kj)^{+1}(\ell j)^2\underline{(kj)}(\ell k)^{-2}(kj)^{-1}(\ell j)^{-1}(ij)^1(\ell i)^1(ik)^{-1}$$

<u>Cas particuliers</u>.- $T = (ij)(k)$ $\quad T' = (ik)(j)$

Si par exemple $i < j < k$: $T = (jk)^2(ij)^1(ik)^{-2}$

$$T' = (ij)^{+1}(ik)^1(kj)^{-1}$$

$$TT'T^{-1} = (jk)^2(ij)^1(ik)^{-2}(ij)^1\underline{(jk)}(ki)^{-1}(ij)^2(ik)^{-1}(jk)^{-2}$$

$$T'^{-1}TT' = (ij)^{+1}(ik)^{-1}(kj)^{-1}(ij)^2\underline{(kj)}(ik)^{-2}(jk)^1(ji)^1(ik)^{-1}\ .$$

Les transformés ont des formes plus compliquées que les traits canoniques ou élémentaires.

III.- <u>Les</u> 2 <u>traits</u> T <u>et</u> T' <u>portent sur le même échange</u> $s = s' = ij$

S'ils sont tous deux canoniques, il y a identité. Si l'un est élémentaire ℓ, il y a enroulement supplémentaire du fil ℓ.

Exemple : si $i < \ell < j$ $\quad T = (i\ell)^{-1}(ij)(j\ell)^1 \quad T' = (i\ell)^{+1}(ij)(j\ell)^{-1}$

$$TT'T^{-1} = (i\ell)^{-1}(ij)(j\ell)^2(ij)^1(i\ell)^{-2}(ij)^{-1}(j\ell)^1\ .$$

<u>CONSÉQUENCES</u>.- L'opération P et S peut être itérée sur une suite de secteurs ou sur des secteurs où l'exposant de l'échange est $1 + \alpha$; en particulier si $i\ j\ k$ est l'ordre naturel :

$$\begin{aligned} P : \quad (ik)^2(jk) &= (jk)(ij)^2 \\ (jk)(ij)^2 &= (ij)^2[jk](i) \\ (ik)^2(jk)^2 &= (jk)^2[[ik](j)]^2. \end{aligned}$$

où (ij) , (jk) , (ik) représentent 3 traits canoniques et $(ik)^2$, par exemple, un trait canonique où les fils i et k ont une torsion d'un tour.