Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

J. Guérindon

Sur certaines équivalences de la théorie des idéaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A15_0>

Exposé n° 15

SUR CERTAINES ÉQUIVALENCES DE LA THÉORIE DES IDÉAUX

(Exposé de J. GUÉRINDON, le 18.3.1957)

Cet exposé va indiquer comment dans des cas usuels la notion d'équivalence régulière, pour une ou plusieurs opérations, introduite dans un système d'idéaux d'un anneau permet de donner des propriétés caractéristiques. Il constitue un résumé des chapitres 3 et 4 de ma thèse ([Th.]), le théorème 2 plus loin étant démontré dans une note citée aux Comptes Rendus.

Une opération de fermeture parmi les équivalences régulières entre idéaux d'un anneau conduit à une caractérisation des anneaux complètement intégralement clos, et une interprétation est donnée de ce résultat au moyen d'équivalences simplifiables.

La théorie est renforcée au moyen d'une application de la théorie multiplicative forte classique aux anneaux commutatifs quelconques : l'étude est faite en prenant la factorisation comme point de départ. Le cas dans lequel il y a des diviseurs de zéro est étudié moyennant une légère restriction qui n'affecte pas le cas classique et permet la détermination de toutes les factorisations possibles du type envisagé (th. 5)

Un rôle essentiel est joué dans ce qui suit par la notion de gerbier résidué et les équivalences introduites se déduisent le plus souvent de topologies déterminées sur l'anneau des opérateurs.

1.- Sur une définition de l'équivalence d'Artin.

N'ayant en vue que des caractérisations d'anneaux, nous nous contenterons ici de rappeler qu'il est équivalent pour un anneau d'intégrité A de satisfaire à l'une des deux conditions :

α) $\lambda (\frac{a}{s})^n \in A$ pour tout n, avec $\lambda, a, s \in A - \{0\}$ entraîne $\frac{a}{s} \in A$ et

β) les classes de l'équivalence d'Artin forment un groupe [1].

---

[1] c'est-à-dire aussi que le gerbier des idéaux fractionnaires est complètement entier fermé. Pour le cas général cf. (14) et pour le cas où il existe en A des diviseurs de 0 (cf. le chapitre 4).

<u>THÉORÈME 1.- Pour que les conditions</u> α) <u>et</u> β) <u>soient vérifiées, il faut et il suffit que l'équivalence d'Artin</u> $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ <u>entre idéaux fractionnaires</u> I_j <u>satisfasse à la condition</u> (C) :

$$I_1 \equiv J_1, \ldots, I_p \equiv J_p \quad \text{et}$$

$A \cap (I:J) \cap (J:I) \supseteq (I_1:J_1) \cap (J_1:I_1) \cap \ldots \cap (I_p:J_p) \cap (J_p:I_p) \cap A$ <u>entraînent</u> $I \equiv J \bmod \mathcal{O}\!\mathcal{L}$.

La condition est nécessaire, car on a $(I_\lambda : J_\lambda) \cap (J_\lambda : I_\lambda) \equiv$ $\equiv I_\lambda J_\lambda^{-1} \cap I_\lambda^{-1} J_\lambda$ pour tout λ et donc $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ étant régulière par l'intersection et $I_\lambda J_\lambda^{-1} \equiv I_\lambda^{-1} J_\lambda \equiv A$ le second membre de l'inclusion de l'énoncé est congru à A et on en déduit que l'on a $I \equiv J$.

La condition est suffisante car si on a $I \equiv J$ on a en posant $L = (I:J) \cap (J:I) \cap A$ on a $L = (L:A) \cap (A:L) \cap A$ et donc $(A:L) \cap (L:A) \cap A \supseteq (I:J) \cap (J:I) \cap A$, donc $L \equiv A$ et donc d'après la convexité des classes $(I:J) \cap A \equiv A$. Posons $II^{-1} = R$. On a $R \subseteq A$ et $(R:A) \cap (A:R) \cap A = R$; de plus $R = A \cap (A:R) = A \cap (I^{-1}:I^{-1})$ donc $R \equiv A$ et les classes forment un groupe.

La condition β) peut aussi s'exprimer en introduisant toutes les équivalences régulières (pour la multiplication) E_i du demi-groupe $\Gamma / \mathcal{O}\!\mathcal{L} = D$ des classes de l'équivalence d'Artin (2). On voit facilement qu'il y a correspondance biunivoque entre les équivalences régulières de D et les équivalences régulières en Γ moins fines que $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$. D'autre part, d'après un autre théorème de Thierrin ces équivalences régulières s'identifient aux intersections d'équivalences principales. On en déduit le :

<u>COROLLAIRE</u> : Les conditions α) et β) équivalent aussi aux conditions

γ) toute équivalence régulière moins fine que $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ est simplifiable

δ) toute équivalence principale moins fine que $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ est simplifiable.

On remarquera la nature topologique de la condition (C) : lorsque α) ... β) sont vérifiées par A , la classe unité constitue un système fondamental de voisinages de zéro d'une certaine topologie T .

---

(2) THIERRIN, Thèse Th. 85 (Paris, 1954). Un demi-groupe (abélien) est un groupe si et seulement si ses équivalences régulières sont simplifiables.

Par exemple si A est en plus noethérien les idéaux voisinages de zéro sont ceux dont la profondeur maximum est 1 (tout diviseur premier est premier non nul minimal).

D'autres équivalences simples satisfont comme $\mathfrak{V}$ à la condition

$$I \equiv J \mod \mathfrak{V} \iff (I:J) \cap (J:I) \cap A \text{ est un voisinage.}$$

Par exemple [3] dans tout anneau noethérien A l'équivalence suivante, liée à la théorie des chaines maximales, peut se définir à partir de la topologie T des idéaux de hauteur maximum 1 (tout diviseur premier est maximal), ce qui fournit avec $\mathfrak{V}$ deux cas extrêmes.

$$I \equiv J \mod E \iff (I+J)/I \cap J \text{ est de longueur finie comme } A\text{-module.}$$

E peut se définir par la condition $I:J \cap J:I \cap A$ est un voisinage par T .

Ceci permet d'associer à toute équivalence E d'un type très général une fermeture de Galois dans le domaine général suivant.

2.-Soit Γ un $\cup$-demi treillis muni d'un gerbier d'opérateur G avec les lois évidentes $g_1(g_2\alpha) = (g_1g_2)\alpha$, $g(\alpha_1 \cup \alpha_2) = g\alpha_1 \cup g\alpha_2$, $(g_1 \cup g_2)\alpha = g_1\alpha \cup g_2\alpha$ qui en fait une structure algébrique à opérateurs. Le treillis de structure S de Birkhoff [4] est l'ensemble des relations d'équivalences E qui sont régulières pour toutes les lois internes et externes.

<u>EXEMPLES</u> : 1) Γ ensemble des sous-modules d'un A-module et G gerbier des idéaux entiers de A . L'équivalence donnée plus haut en liaison avec la théorie des chaines maximales est - lorsque l'on a $m = A$ - un exemple d'une telle équivalence.

2) Γ = idéaux fractionnaires, G ensemble des idéaux entiers.

3) $\Gamma = G$ gerbier des idéaux de radical fixé d'un anneau <u>noethérien</u> fixé [5].

---

(3) [Th.] Chap. 2 et Chap. 3 pour l'opération de fermeture.

(4) [Th.] sect. 18. Cf. exposé à ce séminaire, le 21 novembre 1955.

(5) L'équivalence introduite par P. SAMUEL (Some asymptotic properties of powers of ideals, Annals of Math., 1952, p. 11) est un élément du treillis de structure S attaché à ce troisième exemple.

Dans les cas usuels (et en particulier dans les 3 cas précédents) on a, en un sens évident, une résiduation externe des éléments α de Γ à valeur en G . On posera, en G , $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 : \alpha_2) \cap (\alpha_2 : \alpha_1)$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma)$. Alors la relation (C) permet d'associer à tout élément E de S ,c'est-à-dire aux équivalences régulières par l'union, finie, en G et la multiplication externe, un élément E' ainsi défini :

$\alpha, \beta \in \Gamma$, $\alpha \equiv \beta \pmod{E'} \rightleftarrows$ il existe des $(\alpha_1, \beta_1); \ldots; \alpha_p, \beta_p$ tels que l'on ait $\alpha_1 \equiv \beta_1 ; \ldots ; \alpha_p \equiv \beta_p \pmod{E}$ et

$[\alpha, \beta] \supseteq [\alpha_1, \beta_1] \cap \ldots \cap [\alpha_p, \beta_p]$.

L'application $E \dashrightarrow E'$ de S en lui-même est alors une fermeture de Galois. On dira que E' est résiduellement fermée. En particulier, l'équivalence d'Artin $\mathfrak{A}$ est résiduellement fermée si et seulement si A est complètement intégralement clos en son corps des quotients.

D'autre part si τ est une topologie définie sur un anneau A par un système $\{I_\alpha\}$ d'idéaux, pris comme voisinages fondamentaux de zéro, il est immédiat que l'équivalence $E(\tau)$:

$I \equiv J \mod E(\tau) \rightleftarrows I:J \cap J:I \cap A$ est un voisinage de zéro est résiduellement fermée .

Par exemple à la topologie I-adique d'un anneau noethérien A est associée l'équivalence

$$U \equiv V \rightleftarrows U:I^n = V:I^n \text{ pour } n \text{ grand}$$

et précisément la classe de tout U est déterminée par son élément maximum $U_0 = \sum_n (U:I^n) = U:I^{n_0}$.

En général pour un E fermée $(E = E')$ il n'y a pas d'élément maximum dans chaque classe. Il est intéressant de remarquer que la condition suivante imposée à un anneau :

(L) toute chaine ascendante de résiduels d'un élément arbitraire est stationnaire et donne lieu pour la classe de toute équivalence associée à une topologie τ définie par des idéaux à un élément maximal, donc maximum d'après la régularité par rapport à l'addition. On sait par ailleurs que (L) entraîne que tout idéal irréductible est primaire [6].

---

(6) Les conditions d'irréductibilité, faible ou forte, pour l'union ou l'intersection, conduisent à diverses caractérisations d'anneaux et modules (Th. sect. 13, 14 et 15) et à des calculs d'invariants (Th. sect. 16).

L'étude des treillis de structures s'avère difficile dans le cas général. La condition de modularité de Dedekind (ou de la semi-modularité) permet d'y introduire la notion de recouvrement ([7]) et d'y faire une théorie de la normalité.

Y. Mori par exemple avait remarqué depuis longtemps que des conditions d'irréductibilité sont liées à des notions de normalité ; il avait par exemple établi qu'un domaine d'intégrité noethérien est intégralement clos dans son corps des quotients si et seulement si les idéaux primaires de rang un (primaires de radical premier-non-nul minimal) sont irréductibles. Ceci permet aussi ([6]) de caractériser les anneaux de Dedekind, ou la condition minimale restreinte, et rejoint la théorie multiplicative générale des idéaux donnée plus loin.

3.- Dans le cas classique ([8]) cette théorie n'est précise que si on considère des anneaux normaux (endliche diskrete Haupordnung de Krull) dont l'intérêt a augmenté encore depuis que l'on sait, avec Y. Mori et Nagata, que la clôture intégrale d'un anneau d'intégrité noethérien est un tel anneau et lorsque on remarque aussi, avec J.-P. Serre, que les anneaux locaux les plus usuels sont les images homomorphes des anneaux locaux réguliers, donc normaux : anneaux locaux complets, anneaux de fonctions analytiques, anneaux locaux de la géométrie algébrique. On appellera "module de Krull" un module de type fini sur un anneau normal (de Krull).

Le point de vue adopté dans ce qui suit ([9]) est celui d'une factorisation posée a priori par une famille d'idéaux fractionnaires appelés réguliers. La technique des anneaux de fractions d'une part et celle de l'équivalence d'Artin dans les gerbiers généraux d'autre part, conduisent aux définitions suivantes. Le cas dans lequel A est noethérien se rattache à la théorie de la normalisation ([10]), le théorème 2 suivant précisant le lien avec la notion de dépendance intégrale.

Soit A un anneau commutatif muni d'un élément unité non nul, pouvant

---

([7]) Cette théorie est donnée dans [Th.] section 2 et aussi sa relation avec l'irréductibilité [Th. sect. 13]

([8]) Séminaire d'Algèbre, année 1954/1955, exposé 22 (Compléments) ; NAGATA (Mem. coll. Sc. Kyoto, 1955, p. 293) et article de J.-P. SERRE au Symposium de Tokyo, 1955.

([9]) [Th.] Chap. 4.

([10]) M.-L. DUBREIL-JACOTIN et P. DUBREIL, Colloque de Liège (1949) p. 57.

contenir des diviseurs de zéro et S un sous-demi groupe de A qui ne comprend pas 0. On supposera pour l'instant que S contient les diviseurs de ses éléments en A, en particulier contient les éléments inversibles de A. Le cas usuel est celui dans lequel S est l'ensemble des éléments s de A non reliés à un idéal fixé $(I:As = I)$, par exemple le complément d'un idéal premier p : cet ensemble S est d'ailleurs l'intersection des compléments des idéaux premiers reliés maximaux de I.

Soit le noyau $N(S) = \{x,\ sx = 0 \quad s \in S\}$, φ l'homomorphisme naturel $A \to A' = A/N(S)$, S' l'image $\varphi(S)$ d'ailleurs sans diviseur de 0, A_S l'anneau classique $A'_{S'} = \{\alpha'/s'\ ;\ \alpha' \in A'\ ;\ s' \in S'\}$. A_S est aussi l'ensemble des couples (a,s) $a \in A$, $s \in S$ modulo la relation d'équivalence $(a_1, s_1) \equiv (a_2, s_2) \rightleftarrows \exists\, \sigma \in S$ avec $\sigma(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$.

Considérons dans l'ensemble des idéaux fractionnaires de A (c'est-à-dire les sous A'-modules I' de $A'_{S'} = A_S$ qui sont tels que pour un $s' \in S'$ on ait $s'I' \subseteq A'$) le sous-ensemble $T(S)$ de ceux qui contiennent un élément $\xi = \dfrac{s'_1}{s'_2}$ $(s'_1, s'_2 \in S')$. Il revient au même de prendre les I' qui coupent S' et on voit facilement que $T(S)$ est un treillis multiplicatif résidué ; on posera l'équivalence de Artin $\mathfrak{A}(S)$

$$I' = J' \mod \mathfrak{A}(S) \Longleftrightarrow A':I' = A':J' .$$

<u>DÉFINITION</u> : <u>On dit que A est S-normal si tout idéal entier régulier I' de A' est congru modulo $\mathfrak{A}(S)$ à un produit d'idéaux entiers réguliers premiers P'_i de A'.</u>

<u>EXEMPLE</u> : tout A est normal au sens de Krull (donc sans diviseur de 0) est S-normal avec $S = A - [0]$. La réciproque sera établie avec le théorème 4.

<u>THÉORÈME 2 (d'unicité)</u> : <u>Si A est S-normal, les P'_i incongrus à A' sont déterminés à l'ordre près. L'ensemble E des P'_i pour I' variable est celui des idéaux premiers réguliers minimaux ou encore celui des idéaux premiers réguliers, maximaux parmi les idéaux réguliers incongrus à A'</u> [11].

La démonstration se fait en supposant que l'on a $S = S'$ et en montrant que tout composant premier incongru à A est composant d'un idéal principal $As(s \in S)$. L'unicité se démontre alors par récurrence. On en déduit que $T(S)$ est complètement entier fermé.

---

[11] Cf. [Th.] théorème (23,1) et C.R. Acad. Sc. Paris, (1956) t. 243, p. 936.

Nakayama a montré (Proc. Imp. Acad. Tokyo, 18, 1942 ; voir aussi démonstration de P. Jaffard au moyen de la théorie des groupes : exposé à ce séminaire, 1955/56.) qu'il existe des anneaux d'intégrité complètement intégralement fermés en leur corps des quotients qui ne sont pas des anneaux normaux de Krull. Ceci montre que la propriété de S-normalité ne se réduit pas à la complète fermeture de $T(S)$.

Le cas des anneaux de Dedekind est un cas particulier du théorème suivant qui généralise un résultat déjà exposé (Anneaux à condition minimale restreinte, Sém. d'Algèbre 1955/56, théorème 4).

THÉORÈME 3 : Si A est S-normal il y a équivalence entre les trois propriétés :

a) tout idéal premier p S-régulier est régulier minimal,

b) l'équivalence d'Artin en $T(S)$ est l'égalité,

c) tout idéal S-régulier entier est égal à un produit d'idéaux entiers premiers.

On se bornera à établir que c) $\longrightarrow$ a) . Si c) est vérifiée et si $S = S'$ on a pour un $s \in S \cap P$, $As = P_1^{(\alpha_1)} \cap \ldots \cap P_r^{(\alpha_r)}$ puisque As est maximum dans sa classe, posant $P_1^{(\alpha_1)} = (P_1^{\alpha_1})^* = A : (A:P_1^{\alpha_1})$. On a par hypothèse $As = \pi_1^{\beta_1} \ldots \pi_s^{\beta_s}$ et on a $As . (As)^{-1} = A$ donc $\pi_j \pi_j^{-1} = A$ $(j = 1,\ldots,s)$ De plus $As \equiv P_1^{\alpha_1} \ldots P_r^{\alpha_r}$ et la loi Φ montre que $As \equiv \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_{r-\lambda}^{\alpha_{r-\lambda}}$ d'où $As \supseteq \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_{r-\lambda}^{\alpha_{r-\lambda}} \supseteq \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_r^{\alpha_r}$ d'où $\pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_{r-\lambda}^{\alpha_{r-\lambda}} = \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_r^{\alpha_r}$. Comme les π_j sont A-inversibles on a $\lambda = 0$ et finalement $As = P_1^{\alpha_1} \ldots P_r^{\alpha_r}$: il y a pour tout idéal identité entre la factorisation et la quasi-factorisation. On en déduit alors que tout idéal premier S-régulier P est S-minimal car si on a $P \supset \pi \supset (0)$ et $x \in P - \pi$ les décompositions de $\pi + Ax$ et $\pi + Ax^2$ conduisent facilement à une contradiction.

Les conditions précédentes peuvent aussi s'exprimer ainsi : pour tout idéal I régulier A/I est un anneau d'Artin : c'est la "condition minimale restreinte au sens des idéaux réguliers".

De plus le cas dans lequel il y a en plus un seul élément P constitue une des généralisations naturelles de la notion d'anneau de valuation discrète (12).

---

(12) Autre généralisation fondée sur les systèmes d'idéaux, en K.E. AUBERT Duke math. Journ., 1954, p. 517 et ce séminaire (1956/57).

On voit aussi que $\mathfrak{N}(S)$ peut, dans le cadre du théorème 2, se définir au moyen de la topologie des idéaux dont aucun diviseur n'est en E . Le groupe des classes est isomorphe à $\mathcal{E}$ copies de Z (anneaux des entiers), si $\mathcal{E}$ est la puissance cardinale de E . Le cas $S = A - (0)$ est donné au moyen du

THÉORÈME 4 : Un anneau d'intégrité A est un anneau normal (de Krull) si et seulement si les idéaux premiers non nuls engendrent multiplicativement les classes de l'équivalence d'Artin.

La proposition directe est classique (Cf. Krull, Ideal Theorie, sect. 43). Si on a inversement pour tout I non nul $I \equiv P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$, les P_i incongrus à A sont déterminés d'après le théorème 2 et il est alors facile de construire les valuations essentielles attachées à A . On a aussi le :

COROLLAIRE : un domaine d'intégrité est à factorisation unique si et seulement si tout idéal entier est quasi-égal à un produit fini d'idéaux principaux premiers.

4.- L'étude de l'ensemble des S rendant A S-normal se fait sans restriction si A est un anneau d'intégrité. Dans le cas général les comparaisons des différents noyaux $N(S)$ ne se feraient aisément que dans le cas d'application du lemme suivant, en particulier dans le cas où A n'a pas de diviseurs de 0 .

LEMME 1 . Pour que S soit tel que $N(\Sigma) = N(S)$ pour tout $\Sigma \subseteq S$ il faut et il suffit que l'on ait $S \subseteq \operatorname{rad}[(0) : N(S)]$. (F)

Lorsque A est noethérien la condition (F) précédente revient à dire que "tout idéal premier minimal qui coupe S le contient". [13] La démonstration du lemme est immédiate. On dira que A est fortement S-normal si on a (F) et s'il est S-normal ; la considération d'images homomorphes d'anneaux de Dedekind prouve qu'il existe des S rendant A fortement normal et ne comprenant que des diviseurs de zéro.

LEMME 2 . Si A est fortement S_1-normal il est fortement S_2-normal pour tout $S_2 \subseteq S_1$.

([13]) Cf. [th.] sect. 26.

On posera $A' = A/N_1 = A/N_2$ et on a immédiatement $T(S_2) \subseteq T(S_1)$. Soit alors I' un idéal entier en $T(S_2)$ on a $I' \equiv P'_1 P'_2 \ldots P'_h \mod \mathfrak{C}(S_1)$. Or d'après le théorème 2, $T(S_1)$ est complètement fermé et on en déduit que P'_i (pour tout $i = 1,2,\ldots h$) est maximum dans sa classe, donc que $P'_i \supseteq I'$ donc P'_i est S_2-régulier et on a $I' \equiv P'_1 \ldots P'_h \mod \mathfrak{C}(S_2)$; donc A est fortement S_2-normal.

<u>THÉORÈME 5</u> : <u>Dans tout anneau</u> A <u>il existe des demi-groupes maximaux</u> Sm <u>rendant</u> A <u>fortement normal et tous les autres sont les sous-demi groupes des</u> Sm .

A est fortement normal pour l'ensemble A_0 des éléments inversibles de A . Si l'on établit que A est fortement normal pour l'union $S = \bigcup_k S_k$ d'une famille non vide totalement ordonnée $\{S_k\}$ de S_k rendant chacun A fortement normal le théorème de Zorn, et le lemme 2 conduirait au résultat.

Or si N est le S-composant de (0) en A on a pour tout k $N = N_k$ d'après la condition (F) et la condition d'ordre total ; on posera $A' = A/N$. Soit alors U' un élément entier de $T(S) = \bigcup_k T(S_k)$. Par hypothèse U' coupe S' donc un S'_{k_0} et on peut supposer qu'il coupe tous les S'_k , sans changer S' , image de S . On a $U' \equiv P'^{\alpha_1}_1 \ldots P'^{\alpha_h}_h \mod \mathfrak{C}(S_{k_0})$ et pour tout $S_k \supseteq S_{k_0}$ on a, d'après l'unicité du théorème 2 ,

$$U' \equiv P'^{\alpha_1}_1 \ldots P'^{\alpha_h}_h \, P'^{\alpha_{h+1}}_{h+1} \ldots P'^{\alpha_\ell}_\ell \mod \mathfrak{C}(S_k) \quad \text{donc aussi}$$

mod $\mathfrak{C}(S_{k_0})$. Si on avait $\ell > h$ P'_ℓ serait un idéal premier essentiel minimal de I' , de plus S_k-minimal en $T(S_k)$. On aurait alors $P'_\ell \equiv A' \mod \mathfrak{C}(S_{k_0})$ donc P'_ℓ contiendrait strictement un idéal premier π qui couperait S_{k_0} donc S_k et P'_ℓ ne serait pas S_k-minimal, d'où une contradiction. Finalement on a pour tout $S_k \supseteq S_{k_0}$ $U' \equiv P'^{\alpha_1}_1 \ldots P'^{\alpha_k}_k \mod \mathfrak{C}(S_k)$ et donc mod $\mathfrak{C}(S)$. Donc A est S-normal et le théorème est démontré.

5.- Le cas dans lequel A <u>est noethérien</u> donne lieu à une grande simplification, puisque on voit aussitôt que, conformément à la théorie des treillis [14] A est S-normal si et seulement si $T(S)$ est entier fermé.

---

[14] Cf. M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, Théorie des Treillis, II, Ch. VI, th. 15.

Lorsque A est sans diviseur de 0 et $S = A - (0)$ il est classique que ceci équivaut à la fermeture intégrale de A en son corps des quotients. Y. Mori, Yoshida et Sakuma ont étudié le cas général suivant : A est noethérien quelconque, S est l'ensemble des éléments non diviseurs de zéro ([15]).

Une étude analogue peut être faite dans le cas général (Cf. [Th.] sect. 27) et on voit que la S-normalité n'entraîne pas toujours la fermeture intégrale de A' en $A'_{S'} = A_S$.

Toutes ces considérations rejoignent des problèmes de structure : attacher à un module sur un anneau normal A (ce qui est un cas usuel, je propose d'appeler un tel module un module de Krull : en plus des exemples donnés au paragraphe 3 on trouve des clôtures intégrales d'anneaux de la géométrie algébrique) des invariants, finis si possible, qui les déterminent à un A-isomorphisme près. Ce problème n'est soluble que dans quelques cas particuliers, le théorème d'Ulm-Zippin, seul outil connu de cette détermination ([16]) , n'étant valable que sur des modules à base dénombrable. Il est surprenant à ce sujet que les modules qui s'imposent sont ceux qui ont permis à Geddes d'interpréter, par passage à une limite projective, le complété d'un anneau local, savoir pour un anneau M-adique

$$A/M \oplus A/M^2 \oplus \dots \oplus A/M^n \oplus \dots$$

ainsi qu'il sera expliqué en un prochain exposé.

([15]) Cf. Journal of Hiroshima, A, vol. 17, n° 3 (1954) p. 311.

([16]) KAPLANSKY, Infinite abelian groups, Michigan University, 1954.