Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

M. Zisman

Homologie et cohomologie de Čech, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 14, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A14_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
-:-:-:-

Exposé n° 14

HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE DE ČECH, II.

(Exposé de M. ZISMAN, le 11 mars 1957).

1.- On démontre les théorèmes suivants :

1.1. Si X est réduit à un point, $H_q(X\,;\,G) = H^q(X\,;\,G) = 0 \qquad q > 0$

$$H_0(X\,;\,G) = H^0(X\,;\,G) = G$$

(Pour la définition des groupes d'homologie à coefficients dans un groupe G , voir l'annexe).

1.2. Une application continue $f : (X\,,\,A) \longrightarrow (Y\,,\,B)$ induit des applications

$$f_* \;:\; H_q(X\,,\,A\,;\,G) \longrightarrow H_q(Y\,,\,B\,;\,G)$$
$$f^* \;:\; H^q(Y\,,\,B\,;\,G) \longrightarrow H^q(X\,,\,A\,;\,G)$$

1.3. Si $f : (X\,,\,A) \longrightarrow (Y\,,\,B)$ et $g : (Y\,,\,B) \longrightarrow (Z\,,\,C)$ sont 2 applications continues,

$$(gf)_* = g_*\, f_* \qquad\qquad (gf)^* = f^*\, g^*$$

1.4. Homotopies : Si f et $g : (X\,,\,A) \longrightarrow (Y\,,\,B)$ sont deux applications continues homotopes (c'est-à-dire s'il existe une application continue $F(x\,,\,t) : (X \times I\,,\,A \times I) \longrightarrow (Y\,,\,B)$ $\quad I = [0\,,\,1]$, telle que $F(x\,,\,0) = f(x)$, $F(x\,,\,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$)
on a : $\qquad f_* = g_* \qquad\qquad f^* = g^*$

1.5. Excision : Soit U un ouvert de X dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de A . L'inclusion $f : (X - U\,,\,A - U) \longrightarrow (X\,,\,A)$ induit des isomorphismes

$$f_* \;:\; H_q(X - U\,,\,A - U\,;\,G) \approx H_q(X\,,\,A\,;\,G)$$
$$f^* \;:\; H^q(X\,,\,A\,;\,G) \approx H^q(X - U\,,\,A - U\,;\,G)$$

1.6. Suite exacte : On a une suite exacte

$$\longrightarrow H^q(X\,,\,A\,;\,G) \xrightarrow{j^*} H^q(X\,;\,G) \xrightarrow{i^*} H^q(A\,;\,G) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X,A;G) \longrightarrow$$

où i est l'inclusion $A \longrightarrow X$ et j l'inclusion $(X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$; la suite correspondante en homologie n'est pas exacte en général.

1.7. Si f est une application continue $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H^q(Y, B; G) & \xrightarrow{j^*} & H^q(Y; G) & \xrightarrow{i^*} & H^q(B; G) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(Y, B; G) & \longrightarrow \\
& \downarrow f^* & & \downarrow f_1^* & & \downarrow f_2^* & & \downarrow f^* & \\
\longrightarrow & H^q(X, A; G) & \xrightarrow{j^*} & H^q(X; G) & \xrightarrow{i^*} & H^q(A; G) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(X, A; G) & \longrightarrow
\end{array}$$

où f_1 est l'application $X \longrightarrow Y$ induite par f et f_2 l'application $A \longrightarrow B$ induite par f.

1.1. est immédiat ; 1.2. et 1.3. seront démontrés à la fin de l'exposé. Pour les démonstrations de 1.4. - 1.7., on renvoie à la bibliographie.

2.- Premières applications des théorèmes généraux.

2.1. Soit $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ un homéomorphisme. Alors $H_p(X, A; G) \approx H_p(Y, B; G)$ et $H^p(X, A; G) \approx H^p(Y, B; G)$: on applique 1.2. et 1.3. à f et à l'application inverse $f^{-1} : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$.

2.2. Espaces homotopiquement équivalents. On dit que (X, A) et (Y, B) sont homotopiquement équivalents s'il existe 2 applications $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ et $g : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ telles que gf (resp fg) soit homotope à l'identité de (X, A) (resp (Y, B)). Dans ces conditions, f^* et f_* sont des isomorphismes, et $f_*^{-1} = g_*$, $f^{*-1} = g^*$. En effet, $(fg)_* = f_* g_*$ (1.3.) et $(fg)_* =$ identité (1.4.).
Soit $f_* g_* = id$ de même $g_* f_* = id$.

On montre de même que les applications verticales du diagramme 1.7. sont alors des isomorphismes.

2.3. Espaces contractibles, retracts. On dit qu'un espace X est contractible sur un point $P \in X$ si l'application identique de X (soit i) est homotope à l'application $f : X \longrightarrow P$. Soit alors $F : X \times I \longrightarrow X$ une homotopie telle que $F(x, 0) = i(x) = x$ $F(x, 1) = f(x) = P$; définissons $g : P \longrightarrow X$ par $g(P) = P$. On a : $f.g =$ identité de P
$g.f$ homotope à l'identité de X (car $F(x, 1) = gf(x) = P$
$F(x, 0) = i(x) = x$) donc (2.2.)

$$H^p(X\ ;\ G) = H_p(X\ ;\ G) = 0 \qquad p > 0$$

$$H^0(X\ ;\ G) = H_0(X\ ;\ G) = G \qquad \text{d'après (1.1.)}$$

Soit maintenant $X_1 \subset X$, $A_1 \subset A$ et $g : (X_1\ ,\ A_1) \longrightarrow (X\ ,\ A)$ l'inclusion. Supposons qu'il existe $f : (X\ ,\ A) \longrightarrow (X_1\ ,\ A_1)$ telle que gf soit homotope à l'identité de $(X\ ,\ A)$; $(X_1\ ,\ A_1)$ et $(X\ ,\ A)$ ont alors même homologie et même cohomologie d'après (2.2.) puisque fg = identité de $(X_1\ ,\ A_1)$. De même f induit des isomorphismes pour les flèches verticales du diagramme (1.7.). On dit que f est une rétraction, que $(X_1\ ,\ A_1)$ est un retract de $(X\ ,\ A)$.

2.4. Soit $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$, les X_i étant des <u>ouverts disjoints</u> et $A = \cup A_i$ où $A_i \subset X_i$. On a alors

$$H^p(X\ ,\ A\ ;\ G) = \sum_{i=1}^{n} H^p(X_i\ ,\ A_i\ ;\ G)$$

$$H_p(X\ ,\ A\ ;\ G) = \sum_{i=1}^{n} H_p(X_i\ ,\ A_i\ ;\ G) \qquad (\textstyle\sum = \text{somme directe})$$

(démonstration par récurrence sur n en utilisant l'excision).

2.5. <u>0-ième groupe de cohomologie réduite</u> $\tilde{H}^0(X\ ;\ G)$. Soit P un point et f l'unique application $f : X \longrightarrow P$. f induit

$$f^* : H^p(P\ ;\ G) \longrightarrow H^p(X\ ;\ G) \quad , \quad \text{qui se réduit (1.1.) à}$$

$$G = H^0(P\ ;\ G) \longrightarrow H^0(X\ ;\ G) \quad .$$

On pose

$$\tilde{H}^0(X\ ,\ G) = H^0(X\ ,\ G) / f^* H^0(P\ ;\ G) \quad ;$$

en particulier, $\tilde{H}^0(P\ ;\ G) = 0$ puisque f se réduit alors à l'identité (cette notion est intéressante car $H^0(X\ ;\ G)$ n'est <u>jamais</u> nul et il peut être utile d'avoir des zéros dans certaines suites exactes, y compris en dimension zéro).

On montre facilement que $G \approx f^* H^0(P\ ;\ G)$, que $f^* H^0(P\ ;\ G)$ est facteur direct dans $H^0(X\ ;\ G)$, et que la suite exacte de cohomologie où l'on a remplacé les premiers termes

$$0 \longrightarrow H^0(X\ ,\ A\ ;\ G) \xrightarrow{j^*} H^0(X\ ;\ G) \xrightarrow{i^*} H^0(A\ ;\ G) \xrightarrow{\delta} H^1(X\ ,\ A\ ;\ G)$$

par

$$0 \longrightarrow H^0(X\ ,\ A\ ;\ G) \xrightarrow{\tilde{j}^*} \tilde{H}^0(X\ ;\ G) \xrightarrow{\tilde{i}^*} \tilde{H}^0(A\ ;\ G) \xrightarrow{\tilde{\delta}} H^1(X\ ,\ A\ ;\ G)$$

($\tilde{j}^*$, $\tilde{i}^*$, $\tilde{\delta}$ définis à partir de j^* , i^* , δ par passage au quotient) reste exacte.

3.- La cohomologie des sphères.

Dans R^{n+1} , espace euclidien à n+1 dimensions, on définit la sphère S_n ; comme étant le lieu des points x de coordonnées $(x_1 , \dots , x_{n+1})$ tels que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ et la boule B_{n+1} comme étant l'ensemble des points avec $\|x\| \leqslant 1$. Dans la suite, on n'écrira pas explicitement le groupe des coefficients G pour simplifier l'écriture.

3.1. $H^q(B_{n+1}) = H_q(B_{n+1}) = 0$ si $q > 0$; $H^0(B_{n+1}) = H_0(B_{n+1}) = G$.

En effet B_{n+1} est contractible sur un point (2.3.). Pour le voir il suffit de poser $F(x , t) = tx$ (multiplication du vecteur x par t) . On a bien $F(x , 0) = \text{origine}$, $F(x , 1) = x$.

3.2. $H^{q+1}(B_{n+1} , S_n) \approx H^q(S_n)$ pour $q > 0$; en effet, on a la suite exacte (1.6.)

$$H^q(B_{n+1}) \longrightarrow H^q(S_n) \longrightarrow H^{q+1}(B_{n+1} , S_n) \longrightarrow H^{q+1}(B_{n+1}) ,$$

et comme $H^q(B_{n+1}) = H^{q+1}(B_{n+1}) = 0$, $0 \to H^q(S_n) \to H^{q+1}(B_{n+1} , S_n) \to 0$

C.Q.F.D.

3.3. L'ensemble des points de S_n tels que $x_{n+1} = 0$ est la sphère S_{n-1} . On désigne par E^+ (resp E^-) le sous-ensemble des points de S_n tels que $x_{n+1} \geqslant 0$ (resp $x_{n+1} \leqslant 0$) et par E'^+ (resp E'^-) le sous-ensemble des points de S_n tels que $x_{n+1} \geqslant -\varepsilon$ (resp $x_{n+1} \leqslant +\varepsilon$) ($\varepsilon > 0$ petit). Ces quatre ensembles sont homéomorphes à B_n . Le théorème d'excision (1.5.) donne un isomorphisme :

$$H^q(S_n , E'^+) \approx H^q(E'^- , E'^+ \cap E'^-)$$

(en prenant pour U le complémentaire de E'^-)

mais $(E'^- , E'^+ \cap E'^-)$ se rétracte sur (E^- , S_{n-1}) car $E'^+ \cap E'^-$ est homéomorphe à $S_{n-1} \times I$ où I est le segment $[-\varepsilon \; +\varepsilon]$ donc

$$H^q(S_n , E'^+) \approx H^q(E^- , S_{n-1}) = H^q(B_n , S_{n-1}) \quad \text{d'après (2.3.)}$$

pour $q \geqslant 0$.

D'autre part, on a la suite exacte

$$H^{q-1}(E'^{+}) \longrightarrow H^q(S_n\ ,\ E'^{+}) \longrightarrow H^q(S_n) \longrightarrow H^q(E'^{+}) \quad \text{et}$$

$$H^{q-1}(E'^{+}) = H^q(E'^{+}) = 0 \qquad \text{si} \quad q > 1$$

donc

$$H^q(S_n) \approx H^q(S_n\ ,\ E'^{+}) \approx H^q(B_n\ ,\ S_{n-1})\ .$$

Comparons avec le résultat de (3.2.) :

$$H^{q+1}(S_n) \approx H^q(S_{n-1}) \qquad \text{pour} \quad q > 0\ .$$

3.4. Si $q = 0$: $\tilde{H}^0(B_n) = 0$ puisque $H^0(B_n) = G$ et $\tilde{H}^0(B_n) = G/G$, les suites exactes utilisées dans 3.2. et 3.3. donnent alors

$$H^1(S_n) \approx \tilde{H}^0(S_{n-1})\ .$$

Or S_0 est composé de 2 points, donc ((2.4.) ou grâce à un calcul direct)

$$H^0(S_0) = G + G \qquad H^p(S_0) = 0 \quad p > 0 \quad ,\ \text{soit} \quad \tilde{H}^0(S_0) = G\ .$$

Enfin, $\tilde{H}^0(S_n) = 0$ car $H^0(S_n\ ,\ E'^{+}) \approx \tilde{H}^0(S_n)$ et

$$H^0(S_n\ ,\ E'^{+}) \approx H^0(B_n\ ,\ S_{n-1}) \subset \tilde{H}^0(B_n) = \{0\}$$

en utilisant toujours les mêmes suites exactes. $\tilde{H}^0(S_n) = 0$ entraîne $H^0(S_n) = G$ (on montrera plus loin que $H^0(X) = G$ pour tout X connexe par un procédé direct).

Par récurrence sur n , on montre alors immédiatement :

<u>THÉORÈME 3</u> :

$$H^q(S_n) = 0 \qquad \text{pour} \quad q \neq 0\ ,\ n \qquad n \neq 0$$

$$H^0(S_n) = H^n(S_n) = G$$

$$H^0(S_0) = G + G \quad , \quad H^q(S_0) = 0 \qquad q > 0\ .$$

4.- <u>Espaces triangulables</u>.

Soit s un simplexe, c'est-à-dire une collection de $q+1$ éléments $a_0\ , \ldots ,\ a_q$. On associe à s un sous-ensemble de R^{q+1} de la manière suivante : on donne à $a_0\ , \ldots ,\ a_q$ les coordonnées $(1\ ,\ 0\ ,\ \ldots\ ,\ 0)$ $(0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ 0)$ etc. et on associe à s le sous-espace $|s|$, intersection de l'hyperplan $\sum\limits_{i=0}^{q} x_i = 1$ et du secteur $x_i \geqslant 0$ $(i = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ q)$.

Soit maintenant K un complexe simplicial ayant un nombre fini de sommets et s le simplexe défini par l'ensemble des sommets de K. Tout simplexe de K est une face de s. On désigne par $|K|$ le sous-espace de $|s|$ qui correspond aux simplexes de K. $|K|$ est évidemment un ensemble compact.

On dit que (X , A) est triangulable s'il existe un complexe simplicial fini (K , L) et un homéomorphisme $f : (|K| , |L|) \longrightarrow (X , A)$. On démontre alors le théorème suivant :

<u>THÉORÈME 4</u> :

$$H^q(K , L ; G) \approx H^q(X , A ; G) \qquad H_q(K , L ; G) \approx H_q(X , A ; G) .$$

Ceci démontre en particulier que la cohomologie définie à l'aide d'une triangulation particulière est indépendante de cette triangulation.

<u>Applications</u> : a) Si s est un n simplexe, on a évidemment $|s|$ homéomorphe à S^n. D'où un moyen de retrouver le résultat du théorème 3 par récurrence sur n en calculant $H^q(s ; G)$ (et aussi de calculer $H_q(S_n)$).

b) La suite exacte d'homologie existe pour les complexes simpliciaux, elle est donc aussi valable pour des espaces (X , A) triangulables.

5.- <u>Les espaces de dimension finie</u>.

On dit qu'un espace topologique X est de dimension finie $\leq n$ si tout recouvrement U possède un recouvrement plus fin V tel que tout point x de X ne soit contenu que dans $n+1$ au plus des ouverts distincts de V. La dimension est n si il existe un recouvrement V pour lequel tout $x \in X$ appartient exactement à $n+1$ ouverts distincts de V. On démontre que R^n est de dimension n, qu'une variété différentiable de dimension (différentiable) n est de dimension n.

<u>THÉORÈME 5</u> : <u>Si</u> X <u>est de dimension</u> $\leq n$, $H^p(X ; G) = H_p(X ; G) = 0$ <u>pour</u> $p > n$.

<u>Démonstration</u> : L'ensemble des recouvrements V qui interviennent dans la définition de la dimension est cofinal dans $R(X)$. On peut donc, pour calculer $H^p(X ; G)$ et $H_p(X ; G)$ se restreindre à ceux-là.

Soit U l'un d'eux, et X_U le nerf du recouvrement U. Soit s un simplexe de dimension $p > n$ $s = \{i_0 , \dots , i_p\}$ on a $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \neq \emptyset$ et $p > n$ les $i_0 , \dots , i_p$ ne sont donc pas tous distincts. Montrons que le théorème s'en déduit :

Soit S un complexe simplicial quelconque et $C'(S)$ le sous-groupe différentiel gradué de $C(S)$ obtenu en

identifiant à zéro les chaînes élémentaires où 2 sommets coïncident

identifiant $a_0 \ \ldots \ a_q$ et $\varepsilon a_{i_0} \ \ldots \ a_{i_q}$ où ε est la parité de la permutation $\begin{pmatrix} i_0, & \ldots, & i_q \\ 0 & & q \end{pmatrix}$.

Un calcul (long mais facile) permet de montrer que les groupes d'homologie et de cohomologie de $C(S)$ et de $C'(S)$ sont isomorphes ($C'(S)$ s'appelle le complexe des chaînes alternées). Le théorème 5 s'en déduit immédiatement.

6.- Interprétation de $H^0(X ; G)$.

Soit U un recouvrement de X et X_U le nerf de U . Puisque la différentielle augmente les degrés de 1 unité, il n'y a pas de 0-cobords et $H^0(X_U ; G) \approx$ 0-cocycles mais un 0-cocycle est une application $f : \sum (U) \longrightarrow G$ telle que

$$df(i_0 , i_1) = f(i_0) - f(i_1) = 0 \quad \text{si} \quad (i_0 , i_1) \in X_U$$

c'est-à-dire si $U_{i_0} \cap U_{i_1} \neq \emptyset$.

Donc $H^0(X ; G) = \underbrace{G + \ldots + G}_{n \text{ fois}}$ où n est le nombre de composantes connexes de X .

7.- Deux autres théorèmes.

a) Soit V une variété différentiable C^∞ dénombrable à l'infini (c'est-à-dire qui soit réunion dénombrable d'ensembles compacts), et R le corps des réels ; alors :

THÉORÈME de de RHAM : $H^q(V ; R) \approx$ q-ième groupe de cohomologie définie par l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles sur V (ce théorème sera démontré dans un exposé ultérieur).

b) THÉORÈME de KÜNNETH : Soient X et Y deux espaces sans torsions et G un anneau principal , on a alors :

$$H(X \times Y ; G) \approx H(X ; G) \otimes_G H(Y ; G) \approx H(X ; H(Y ; G))$$

en homologie et en cohomologie.

Si G est un corps, le théorème est vrai sans restrictions sur la torsion de X ou Y (il s'agit de produits tensoriels de groupes gradués c'est-à-dire :

$$H^p(X \times Y ; G) = \sum_{m+n=p} H^m(X ; G) \otimes_G H^n(Y ; G)) .$$

<u>Application</u> : Si T^n est le tore à n dimension , le polynome de Poincaré du tore est : $P(T^n , t) = (1 + t)^n$ puisque T est un cercle,

et $P(T , t) = 1 + t$ d'après le théorème 3 .

8.- <u>Démonstration de (1.2.) et (1.3.)</u>.

Soit $f : (X , A) \longrightarrow (Y , B)$ et $V = \{V_\alpha\}$ un recouvrement de (Y , B) . Puisque f est continue, $f^{-1}(V_\alpha) = U_\alpha$ est ouvert et $U = \{U_\alpha\}$ est un recouvrement de (X , A) (on écrira $U = \bar{f}^{1}(V)$) indexé par le même ensemble d'indices $(\sum(U) , \sum_A(U)) = (\sum(V) , \sum_B(V))$.

<u>LEMME 8.1.</u> : <u>Le nerf</u> X_U <u>de</u> $U = \bar{f}^{1}(V)$ <u>est un sous-complexe du nerf</u> Y_V <u>et</u> A_U <u>est un sous-complexe de</u> B_V .

Soit $s \in X_U$ et $s = \{i_0 , \dots , i_p\}$ il faut montrer que le simplexe $\{i_0 , \dots , i_p\}$ de $S(V)$ a un support non vide ; or :

$$f(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}) \subset V_{i_0} \cap \dots \cap V_{i_p} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Même démonstration pour $s \in A_U$, l'inclusion $X_U \longrightarrow X_V$ est notée f_V ; f_V s'étend de manière évidente à une application des groupes de chaînes et de cochaînes.

<u>LEMME 8.2.</u> : <u>Si</u> $f : (X , A) \longrightarrow (Y , B)$ <u>et</u> $g : (Y , B) \longrightarrow (Z , C)$ <u>sont deux applications continues, et</u> W <u>un recouvrement de</u> $R(Z , C)$, $V = \bar{g}^{1}(W)$, <u>on a</u> $\bar{f}^{1}\,\bar{g}^{1}(W) = (gf)^{-1}W$ <u>et</u> $(gf)_W = g_W\, f_V$ (démonstration immédiate).

<u>LEMME 8.3.</u> : <u>Soient</u> $f : (X , A) \longrightarrow (Y , B)$, $U < V$ <u>deux recouvrements de</u> (Y , B) , $U' = f^{-1}(U)$ $V' = f^{-1}(V)$. <u>On a</u> $U' < V'$. <u>Si</u> $p = (Y_V , B_V) \longrightarrow (Y_U , B_U)$ <u>et une projection,</u> p <u>applique</u> $(X_{V'} , A_{V'})$ <u>dans</u> $(X_{U'} , A_{U'})$; <u>désignons par</u> p' <u>la restriction de</u> p <u>à</u> $(X_{V'} , A_{V'})$:

<u>le diagramme suivant est commutatif</u> :

$$\begin{array}{ccc} (X_{V'}\ ,\ A_{V'}) & \xrightarrow{p'} & (X_{U'}\ ,\ A_{U'}) \\ \downarrow f_V & & \downarrow f_U \\ (Y_V\ ,\ B_V) & \xrightarrow{p} & (Y_U\ ,\ B_U) \end{array}$$

en effet, $\sum(V') = \sum(V)$ par définition et, pour tout $\alpha \in \sum(V)$, $V_\alpha \subset U_{p\alpha}$ donc $f^{-1}(V_\alpha) \subset f^{-1}(U_{p\alpha})$ c'est-à-dire $V'_\alpha \subset U'_{p\alpha}$.

Si l'on pose $p'\alpha = p\alpha$ pour tout α , p' est une projection qui applique $(X_{V'}\ ,\ A_{V'})$ dans $(X_{U'}\ ,\ A_{U'})$ car il en est ainsi pour toute projection associée à $U' < V'$. Le diagramme est commutatif car f_V et f_U sont des injections et p' est défini à l'aide de p .

<u>THÉORÈME 1.2.</u> : <u>Soit</u> $f : (X\ ,\ A) \longrightarrow (Y\ ,\ B)$ et $f^{-1} : R(Y\ ,\ B) \longrightarrow R(X\ ,\ A)$ <u>l'application associée des recouvrements, et pour tout</u> $U \in R(Y\ ,\ B)$, f_U <u>l'inclusion</u> $(X_{U'}\ ,\ A_{U'}) \longrightarrow (Y_U\ ,\ B_U)$ <u>du nerf de</u> $U' = f^{-1}(U)$, <u>dans le nerf de</u> U .

<u>Les homomorphismes induits</u>

$$f_{U*} : H_q(X_{U'}\ ,\ A_{U'}\ ;\ G) \longrightarrow H_q(Y_U\ ,\ B_U\ ;\ G)$$
$$f_U^* : H^q(Y_U\ ,\ B_U\ ;\ G) \longrightarrow H^q(X_{U'}\ ,\ A_{U'}\ ;\ G)$$

<u>et</u> f^{-1} , <u>forment une application</u> $\Phi(f)$ <u>du système projectif (resp inductif) définissant</u> $H_q(X\ ,\ A\ ;\ G)$ <u>dans celui de</u> $H_q(Y\ ,\ B\ ;\ G)$ <u>(resp définissant</u> $H^q(Y\ ,\ A\ ;\ G)$ <u>dans celui de</u> $H^q(X\ ,\ A\ ;\ G)$.

<u>Démonstration</u> : $f^{-1} : R(Y\ ,\ B) \longrightarrow R(X\ ,\ A)$ préserve l'ordre (lemme 8.3.) ; il reste donc à démontrer que

$$\begin{array}{ccc} H_q(X_{U'}\ ,\ A_{U'}) & \xleftarrow{\pi^{V'}_{U'}} & H_q(X_{V'}\ ,\ A_{V'}) \\ \downarrow f_{U*} & & \downarrow f_{V*} \\ H_q(Y_U\ ,\ B_U) & \xleftarrow{\pi^{V}_{U}} & H_q(Y_V\ ,\ B_V) \end{array}$$

est commutatif pour $U < V$ dans $R(Y\ ,\ B)$.

Or le lemme 8.3. nous montre que

$$p : (Y_V\ ,\ B_V) \longrightarrow (Y_U\ ,\ B_U) \quad \text{induit} \quad p' : (X_{V'}\ ,\ A_{V'}) \longrightarrow (X_{U'}\ ,\ A_{U'})$$

et que $f_U p' = p f_V \implies f_{U*}\, p'_* = p_*\, f_{V*}$ or par définition même,

$$p'_* = \pi^{V'}_{U'} \quad \text{et} \quad p_* = \pi^{V}_{U} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

l'application Φ^∞ (resp Φ_∞) associée à Φ est une application notée f_* (resp f^*) qui est l'application du théorème 1.2.

<u>THÉORÈME 1.3.</u> : Pour le démontrer, on applique le lemme 2 et la définition du produit d'application $\Phi \circ \Psi$ de familles inductives (resp projectives).

APPENDICE

HOMOLOGIE À COEFFICIENTS DANS UN GROUPE G .

Soit K un complexe simplicial. Nous avons défini le groupe des chaînes $C(K)$, comme étant le groupe abélien libre engendré par les q-chaînes élémentaires de K . De même qu'il est utile de considérer des groupes de cohomologie à coefficients dans un groupe abélien G , il est utile de considérer l'analogue en homologie :

On pose $C(K ; G) = C(K) \otimes G$, le produit tensoriel étant pris sur Z et G étant considéré comme un Z-module. $C(K ; G)$ est le <u>groupe des chaînes à coefficients dans</u> G . La différentielle ∂ de $C(K)$ induit une différentielle de $C(K ; G)$. On peut donc définir les groupes d'homologie du groupe différentiel $C(K ; G)$ gradué par $C_q(K ; G) = C_q(K) \otimes G$. On désigne ces groupes par $H_q(K ; G)$. On définit de même les groupes d'homologie de Čech à coefficients dans G par la limite projective des $H_p(X_U ; G)$ etc. Si K est sans torsion, et si G est un anneau principal, on montre que $H_p(K , G) = H_p(K) \otimes G$.

BIBLIOGRAPHIE.

EILENBERG-STEENROD.- <u>Foundations of Algebraic Topology</u>. Princeton, Math. Ser. N° 15 .

Groupes différentiels gradués : Chapitre 5 .
Complexes simpliciaux : Chapitre 6 .
Théorie de Čech : Chapitre 9 et 10 .

Le chapitre 9 contient la démonstration des théorèmes 1.4. , 1.7. de cet exposé.
Le chapitre 1 étudie les propriétés du paragraphe 2 .
Le chapitre 9, paragraphe 9 démontre le théorème 4 .
Le chapitre 6, paragraphe 6 étudie le complexe des chaînes alternées.
