M. Zisman

Homologie et cohomologie de Čech

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 11, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A11_0>

HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE DE ČECH

(Exposé de M. ZISMAN, le 11.2.1957)

I.- LIMITE INDUCTIVE ET LIMITE PROJECTIVE.

1.- Définitions.

Soit M un ensemble préordonné (c'est-à-dire qu'il existe dans M une relation $\alpha < \beta$ réflexive et transitive). On dira que M est filtrant si quelles que soient $\alpha, \beta \in M$, il existe $\gamma \in M$ tel que $\alpha < \gamma$ et $\beta < \gamma$. M' filtrant est un sous-ensemble de M si $\alpha \in M' \Rightarrow \alpha \in M$, $\alpha < \beta$ dans $M' \Rightarrow \alpha < \beta$ dans M.

Un sous-ensemble M' de M est cofinal si quel que soit $\alpha \in M$, il existe $\beta \in M'$ tel que $\alpha < \beta$.

Une application $\Phi : M \to N$ d'ensembles filtrants est une application qui préserve l'ordre c'est-à-dire $\alpha < \beta \Rightarrow \Phi\alpha < \Phi\beta$.

1-1. Systèmes inductifs et projectifs. Un système inductif de modules (sur un même anneau K) est une famille de modules $\{X^\alpha\}$ indexée par un ensemble M filtrant telle que

1°) pour tout couple $\alpha < \beta$ dans M, il existe un homomorphisme

$$\pi_\alpha^\beta : X^\alpha \longrightarrow X^\beta$$

2°) π_α^α = application identique de X^α

3°) si $\alpha < \beta < \gamma$, $\pi_\alpha^\gamma = \pi_\beta^\gamma \pi_\alpha^\beta$.

Un système projectif de modules (sur K) est une famille de modules $\{X_\alpha\}$ indexée par un ensemble M filtrant telle que

1°) pour tout couple $\alpha < \beta$ dans M, il existe un homomorphisme

$$\pi_\alpha^\beta : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$$

2°) π_α^α = application identique de X_α .

3°) si $\alpha < \beta < \gamma$ $\qquad \pi_\alpha^\gamma = \pi_\alpha^\beta \, \pi_\beta^\gamma$

Dans les deux cas les π_α^β sont appelés projection. On désignera ces systèmes par le symbole $\{X , \pi\}$.

1-2. Applications. Une application $\Phi : \{X , \pi\} \longrightarrow \{X' , \pi'\}$ de deux systèmes inductifs indexés respectivement par M et M' consiste en la donnée

1°) d'une application $\Phi : M \longrightarrow M'$

2°) pour tout $\alpha \in M$, d'un homomorphisme

$\Phi^\alpha : X^\alpha \longrightarrow X'^{\Phi(\alpha)}$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X^\alpha & \xrightarrow{\pi_\alpha^\beta} & X^\beta \\ {\scriptstyle \Phi^\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^\beta} \\ X'^{\Phi(\alpha)} & \xrightarrow{\pi_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)}} & X'^{\Phi(\beta)} \end{array}$$

soit commutatif pour $\alpha < \beta$.

de même une application $\Phi : \{X , \pi\} \longrightarrow \{X' , \pi'\}$ de deux systèmes projectifs indexés par M et M' consiste en la donnée

1°) d'une application $\Phi : M' \longrightarrow M$

2°) pour tout $\alpha' \in M'$ d'un homomorphisme

$\Phi_{\alpha'} : X_{\Phi(\alpha')} \longrightarrow X'_{\alpha'}$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{\Phi(\alpha')} & \xleftarrow{\pi_{\Phi(\alpha')}^{\Phi(\beta')}} & X_{\Phi(\beta')} \\ {\scriptstyle \Phi_{\alpha'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{\beta'}} \\ X_{\alpha'} & \xleftarrow{\pi'^{\beta'}_{\alpha'}} & X_{\beta'} \end{array}$$

soit commutatif pour $\alpha' < \beta'$

Si $\Phi : \{X , \pi\} \longrightarrow \{X' , \pi'\}$ et $\Phi' : \{X' , \pi'\} \longrightarrow \{X'' , \pi''\}$ sont deux applications de systèmes inductifs (resp. projectifs), on définit

$\Phi'\Phi : \{X , \pi\} \longrightarrow \{X'' , \pi''\}$ par $\Phi'\Phi$ et $\Phi'^{\Phi(\alpha)} \, \Phi^\alpha$ $\quad \alpha \in M$

(resp. $\Phi\Phi'$ et $\Phi'_{\alpha''} \Phi_{\Phi(\alpha'')}$ $\quad \alpha'' \in M''$)

1-3. Sous-systèmes. Soient $M' \subset M$ et $\{X , \pi\}$ un système inductif (resp. projectif) indexé par M . Les ensembles de X et les homomorphismes de π

qui correspondent aux éléments de M' forment un système inductif (resp. projectif) indexé par M' soit $\{X' , \pi'\}$ appelé sous système de $\{X , \pi\}$.

L'application identique $\Phi : M' \longrightarrow M$ et les applications identiques

$$\Phi^{\alpha} : X'^{\alpha} \longrightarrow X^{\alpha} \quad \alpha \in M' \quad (\Phi_{\alpha} : X_{\alpha} \longrightarrow X'_{\alpha} \quad \alpha \in M')$$

définissent une application

$$\Phi : \{X' , \pi'\} \to \{X , \pi\} \quad (\Phi : \{X , \pi\} \to \{X' , \pi'\})$$

appelée injection.

2.- Limite inductive.

Soit $\{X , \pi\}$ un système inductif de K-modules indexés par M ; désignons par $\sum X$ la somme directe des X^{α} , et identifions X^{α} avec son image dans $\sum X$ par l'application canonique de X^{α} dans $\sum X$. Soit R l'ensemble des relations suivantes : pour tout $\alpha < \beta$ dans M et tout $x^{\alpha} \in X^{\alpha}$: $\pi_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha} - x^{\alpha} \in R$.

(on identifie les éléments de X^{α} et X^{β} tels que $x^{\beta} = \pi_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha}$) .

La limite inductive du système $\{X , \pi\}$ est le quotient

$$X^{\infty} = (\sum X)/R$$

l'application canonique $\sum X \longrightarrow X^{\infty}$ induit des homomorphismes $\pi_{\alpha} : X^{\alpha} \longrightarrow X^{\infty}$ appelés projections.

2-1. Propriétés de la limite inductive.

a si $x \in X^{\infty}$ il existe $\alpha \in M$ et $x^{\alpha} \in X^{\alpha}$ tels que $\pi_{\alpha} x^{\alpha} = x$

b $\pi_{\alpha} x^{\alpha} = \pi_{\beta} x^{\beta}$ si et seulement si il existe $\gamma > \alpha$ et $\gamma > \beta$ tel que $\pi_{\alpha}^{\gamma} x^{\alpha} = \pi_{\beta}^{\gamma} x^{\beta}$

c si les π_{α}^{β} sont tous des isomorphismes, il en est de même des π_{α}

d Soit $\Phi : \{X , \pi\} \longrightarrow \{X' , \pi'\}$. Φ induit une application $\Phi^{\infty} : X^{\infty} \longrightarrow X'^{\infty}$ telle que $\Phi^{\infty} \pi_{\alpha} = \pi'_{\Phi(\alpha)} \Phi^{\alpha}$

e si M' est cofinal dans M , $\{X' , \pi'\}$ le sous système de $\{X , \pi\}$ défini par M' , l'injection $\Phi : \{X', \pi'\} \longrightarrow \{X , \pi\}$ induit $\Phi^{\infty} : X'^{\infty} \approx X^{\infty}$.

3.- Limite projective.

Soit $\{X, \pi\}$ un système projectif de K-modules indexés par M. La limite projective X_∞ de $\{X, \pi\}$ est le sous-module du produit direct πX_α des éléments $x = \{x_\alpha\}$ tels que pour tout $\alpha < \beta$ dans M,

$$\pi_\alpha^\beta \; x_\beta = x_\alpha \quad .$$

On définit $\pi_\beta : X_\infty \longrightarrow X_\beta$ par $\pi_\beta(x) = x_\beta$.

3-1. Propriétés de la limite projective.

a si $\alpha < \beta$, $\pi_\alpha = \pi_\alpha^\beta \, \pi_\beta$

b si quels que soient $\alpha < \beta$ π_α^β est un isomorphisme dans (resp sur) π_α est pour tout α un isomorphisme dans (resp. sur)

c Soit $\Phi : \{X, \pi\} \longrightarrow \{X', \pi'\}$. Φ induit $\Phi_\infty : X_\infty \longrightarrow X'_\infty$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{\Phi(\alpha)} & \xleftarrow{\pi} & X_\infty \\ \downarrow \Phi_\alpha & & \downarrow \Phi_\infty \\ X'_\alpha & \xleftarrow{\pi'} & X'_\infty \end{array}$$

soit commutatif.

d si M' est cofinal dans M , $\{X', \pi'\}$ le sous système de $\{X, \pi\}$ définit par M' , Φ l'injection $\{X, \pi\} \longrightarrow \{X', \pi'\}$,

$$\Phi_\infty : X_\infty \approx X'_\infty \quad .$$

4.- Suites exactes.

Supposons donnée, pour tout $\alpha \in M$ une suite de modules et d'homomorphismes

$$S_\alpha \quad : \qquad \cdots \longrightarrow X_{\alpha,q} \xrightarrow{\Phi_{\alpha,q}} X_{\alpha,q+1} \xrightarrow{\Phi_{\alpha,q+1}} X_{\alpha,q+2} \longrightarrow \quad \cdots$$

et pour tout $\alpha < \beta$ un homomorphisme $\pi_\alpha^\beta : S_\alpha \longrightarrow S_\beta$ c'est-à-dire une collection d'homomorphismes $\pi_\alpha^\beta(q) : X_{\alpha,q} \longrightarrow X_{\beta,q}$

telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow X_{\alpha,q} & \longrightarrow & X_{\alpha,q+1} & \longrightarrow & X_{\alpha,q+2} & \longrightarrow \\ \downarrow \pi_\alpha^\beta(q) & & \downarrow \pi_\alpha^\beta(q+1) & & \downarrow \pi_\alpha^\beta\;(q+2) & \\ \longrightarrow X_{\beta,q} & \longrightarrow & X_{\beta,q+1} & \longrightarrow & X_{\beta,q+2} & \longrightarrow \end{array}$$

soit commutatif.

Dans ces conditions, pour q fixé, le système $\{X_{\alpha,q}\}$ muni des $\pi_{\alpha}^{\beta}(q)$ est un système inductif dont la limite inductive est désignée par $X_{\infty,q}$. Pour q fixé, les $\phi_{\alpha,q}$ définissent une application du système $\{X_{\alpha,q}, \pi_{\alpha}^{\beta}(q)\}$ dans le système $\{X_{\alpha,q+1}, \pi_{\alpha}^{\beta}(q+1)\}$ (en prenant l'application identique de M sur M) et les $\phi_{\alpha,q}$ induisent $\phi_{\infty,q} : X_{\infty,q} \longrightarrow X_{\infty,q+1}$.

On obtient ainsi une suite de modules et d'homomorphismes

$$S_{\infty} : \longrightarrow X_{\infty,q} \longrightarrow X_{\infty,q+1} \longrightarrow X_{\infty,q+2} \longrightarrow$$

appelée limite inductive des S_{α} .

On définit de même la limite projective d'un système de suites et d'homomorphismes

$$S^{\alpha} : \longleftarrow X^{\alpha,q} \longleftarrow X^{\alpha,q+1} \longleftarrow X^{\alpha,q+2} \longleftarrow$$

THÉORÈME 4-1. Si les S_{α} sont tous des suites exactes, leur limite inductive S_{∞} est exacte.

THÉORÈME 4-1'. Si les S^{α} sont tous des suites exactes, les $X^{\alpha,q}$ étant tous des espaces vectoriels de dimension finie, leur limite projective S^{∞} est exacte.

II.- DÉFINITIONS DES GROUPES DE ČECH.

5.- Soit X un espace topologique $U = \{U_{\alpha}\}$ un recouvrement de X par des ouverts U_{α} . On désigne par $\sum(U)$ l'ensemble des indices intervenant dans le recouvrement U , par $R(X)$ l'ensemble des recouvrements de X .

REMARQUE.- Il y a une difficulté logique à parler de l'ensemble des recouvrements de X . Cette difficulté est levée de la manière suivante. On considère dans $R(X)$ la sous classe $R'(X)$ des recouvrements qui sont indexés de manière naturelle par l'ensemble des ouverts du recouvrement et qui à deux indices distincts font correspondre deux ouverts distincts. $R'(X)$ est alors un ensemble car c'est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de X . D'autre part, si U est un recouvrement quelconque, il existe toujours un recouvrement de $R'(X)$ "aussi fin que U " dans un sens qui sera précisé au paragraphe 7 . On ne restreint donc pas les résultats du paragraphe 7 en considérant $R'(X)$ au lieu de $R(X)$.

Si $A \subset X$ et si $\sum_A(U)$ est un sous ensemble de $\sum(U)$ d'indices tels que $A \subset \bigcup U_\alpha$ pour les $\alpha \in \sum_A(U)$, on dit que le recouvrement U est un recouvrement de (X , A) indexé par $(\sum(U) , \sum_A(U))$. L'ensemble des recouvrements de (X , A) est noté $R(X , A)$. (Ne pas confondre $R(X)$ et $R(X , \emptyset)$; $R(X)$ s'identifie au sous-ensemble de $R(X , \emptyset)$ indexé par les $(\sum(U) , \emptyset))$.

6.- Soit U un recouvrement et $S(U)$ le complexe simplicial (Exposé 8, III paragraphe 8) formé par les simplexes dont les sommets sont des éléments de $\sum(U)$: un p-simplexe est un ensemble fini $\{\alpha_0 , \dots , \alpha_p\}$ où $\alpha_i \in \sum(U)$, $i = 0 , \dots , p$.

Soit s un simplexe de $S(U)$. On appelle support de s l'intersection des ensembles du recouvrement U qui correspondent aux sommets de s : si $s = \{\alpha_0 , \dots , \alpha_p\}$ le support de s est l'ouvert $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$. Le Nerf de U est le sous-complexe de $S(U)$ des simplexes de support non vide. On le désignera par X_U : un simplexe $s \in X_U$ est donc un ensemble $\{\alpha_0 , \dots , \alpha_p\}$, $\alpha_i \in \sum(U)$ tel que $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset$.

Si U est un recouvrement de $R(X , A)$ indexé par $(\sum(U) , \sum_A(U))$ on désignera par A_U le sous-ensemble de $S(U)$ des simplexes dont les sommets sont dans $\sum_A(U)$ et dont le support rencontre A : $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p} \cap A \neq \emptyset$, $\alpha_i \in \sum_A(U)$. Le couple (X_U , A_U) est le nerf de (X , A).

LEMME 6-1. X_U est un complexe simplicial.

Il faut démontrer que si s' est une face de $s \in X_U$, le support de s' n'est pas vide. Or, puisque les sommets de s' sont des sommets de s, chaque terme de l'intersection utilisée pour définir le support de s' est un terme de l'intersection utilisée pour définir le support de s. Donc support de s' $\supset$ support de s.

De même A_U est un complexe simplicial.

On peut donc définir à l'aide de X_U des chaînes simpliciales, des cochaînes à valeur dans un groupe additif G, et les groupes d'homologie et de cohomologie correspondants, $H_p(X_U)$, $H^p(X_U , G)$. (ainsi une p-cochaîne est une fonction $f(i_0 , \dots , i_p) \longrightarrow G$ définie pour tous les

$\{i_0, \ldots, i_p\}$ tels que $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p} \neq \emptyset$) . On peut faire de même avec A_U . Le groupe des chaînes de A_U se plonge dans le groupe des chaînes de X_U , et l'on a la suite exacte de groupes différentiels gradués :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow C(A_U) \longrightarrow C(X_U) \longrightarrow C(X_U)/C(A_U) \longrightarrow 0 \quad ,$$

les trois groupes ci-dessus étant des Z-modules libres. On désigne les groupes d'homologie et de cohomologie de $C(X_U)/C(A_U)$ par $H_p(X_U, A_U)$; $H^p(X_U, A_U ; G)$ (groupes d'homologie ou de cohomologie relative de X_U mod A_U) . Puisque (1) est une suite exacte de Z-modules libres, on a les suites exactes d'homologie et de cohomologie de l'exposé 8. Les groupes définis ci-dessous dépendent évidemment du recouvrement choisi. Les définitions et théorèmes qui suivent permettront de définir des groupes ne dépendant que de (X, A) .

7.- DÉFINITION 7-1.- Soient U et V deux recouvrements de (X, A) . On dit que V est plus fin que U $(U < V)$ si tout ensemble de V est contenu dans un ensemble de U et si tout ensemble de V indexé par un élément de $\Sigma_A(V)$ est contenu dans un ensemble de U indexé par $\Sigma_A(U)$. Si $U < V$ et $V < U$, U et V sont "aussi fin" l'un que l'autre.

Si $U < V$ une fonction $p : (\Sigma(V), \Sigma_A(V)) \longrightarrow (\Sigma(U), \Sigma_A(U))$ (c'est-à-dire une fonction $\Sigma(V) \longrightarrow \Sigma(U)$, dont la restriction à $\Sigma_A(V)$ applique $\Sigma_A(V)$ dans $\Sigma_A(U)$) est appelée projection si $V_\alpha \subset U_{p(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Sigma(V)$.

Une projection s'étend de manière unique à une application $S(V) \rightarrow S(U)$ notée encore $p : p\{\alpha_0, \ldots, \alpha_q\} = \{p(\alpha_0), \ldots, p(\alpha_q)\}$ qui envoie une face d'un simplexe dans une face du simplexe image.

LEMME 7-2.- $R(X, A)$ muni de la relation $<$ est un ensemble préordonné.
Le lemme résulte immédiatement des propriétés de l'inclusion des ensembles.

LEMME 7-3.- $R(X, A)$ muni de la relation $<$ est filtrant.
Si $U, V \in R(X, A)$, posons $\Sigma(W) = \Sigma(U) \times \Sigma(V)$, $\Sigma_A(W) = \Sigma_A(U) \times \Sigma_A(V)$ un élément $\gamma \in \Sigma(W)$ est donc un couple (α, β) $\alpha \in \Sigma(U)$, $\beta \in \Sigma(V)$ posons $W_\gamma = U_\alpha \cap V_\beta$. On a bien $U < W$, $V < W$.

LEMME 7-4.- Pour tout U l'application identique $S(U) \longrightarrow S(U)$ est une projection. Si $p : S(V) \longrightarrow S(U)$ et $p' : S(W) \longrightarrow S(V)$ sont des projections, $p \circ p' : S(W) \longrightarrow S(U)$ est une projection.

En effet $U_\alpha \supset U_\alpha$; d'autre part $W_\gamma \subset V_{p'(\gamma)} \subset U_{p\circ p'(\gamma)}$

LEMME 7-5.- Si $U < V$ sont deux recouvrements de $R(X , A)$, $p : S(V) \longrightarrow S(U)$ applique (X_V , A_V) dans (X_U , A_U) . (Cette application sera encore désignée par p) .

Puisque $V_\alpha \subset U_{p(\alpha)}$, toute intersection d'ensembles V_α est contenue dans l'intersection des ensembles correspondants par p de U ; donc, pour tout simplexe s de $S(U)$, support de $s \subset$ support de $p(s)$. Si donc support de $s \neq \emptyset$ ou coupe A , il en est de même du support de $p(s)$.

LEMME 7-6.- L'application $p : (X_V , A_V) \longrightarrow (X_U , A_U)$ s'étend par linéarité à un homomorphisme (noté p) $C(X_V) \longrightarrow C(X_U)$, $C(A_V) \longrightarrow C(A_U)$ qui commute avec ∂ .

En effet $p \circ \partial (\alpha_0 , \dots , \alpha_q) = p(\sum (-1)^i \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_q) =$

$$= \sum (-1)^i p(\alpha_0) \dots \widehat{(p\alpha_i)} \dots p(\alpha_q) = \partial \circ p (\alpha_0 , \dots , \alpha_q) .$$

Par dualité on en déduit un homomorphisme (noté p) de $C^q(X_U) \rightarrow C^q(X_V)$ etc. qui commute avec d .

p induit donc des homomorphismes

$$p_* : H_q(X_V) \longrightarrow H_q(X_U) \quad ; \quad p_* : H_q(X_V , A_V) \longrightarrow H_q(X_U , A_U)$$

$$p^* : H^q(X_U , G) \rightarrow H^q(X_V , G) \quad ; \quad p^* : H^q(X_U , A_U ; G) \rightarrow H^q(X_V , A_V ; G)$$

ces homomorphismes sont indépendants de la projection $p : U < V$ choisie :

THÉORÈME 7-7.- Soient $U < V$ deux recouvrements de (X , A) et deux projections $p , p' : (X_V , A_V) \longrightarrow (X_U , A_U)$. Les homomorphismes p_* et p'_* coïncident de même que p^* et p'^*

DÉMONSTRATION.- Nous allons exhiber un opérateur d'homotopie k :

$C_q(X_V) \longrightarrow C_{q+1}(X_U)$, $C_q(A_V) \longrightarrow C_{q+1}(A_U)$ tel que $\partial k + k\partial = p' - p$.

a) Soit $s \in X_V$ et α un sommet quelconque de s . Puisque $V_\alpha \subset U_{p(\alpha)}$ et $V_\alpha \subset U_{p'(\alpha)}$, $V_\alpha \subset U_{p(\alpha)} \cap U_{p'(\alpha)}$. Le simplexe engendré par les indices $p(\alpha)$ et $p'(\alpha)$ $(\alpha \in s)$ soit s' est donc de support non nul, il appartient donc à X_U ; $p(s)$ et $p'(s)$ sont des faces de s'. Si $s \in A_V$, on montre de même que $s' \in A_U$.

b) Soit $k(\alpha_0 \ldots \alpha_q) = \sum_{h=0}^{h=q} (-1)^h \, p(\alpha_0) \ldots p(\alpha_h) p'(\alpha_h) \ldots p'(\alpha_q)$

les $(q+1)$-chaînes élémentaires figurant sous le signe $\sum$ appartiennent bien à $C_{q+1}(X_U)$ puisque $p(\alpha_0) \ldots p(\alpha_h)\, p'(\alpha_h) \ldots p'(\alpha_q)$ sont des sommets de s', si $\alpha_0 \ldots \alpha_q$ sont des sommets de s.

Si $\alpha_0, \ldots, \alpha_q$ sont des sommets d'un simplexes de A_V, $s' \in A_U$ et le deuxième membre est une $(q+1)$-chaîne de A_U.

On vérifie facilement que $\partial k + k\partial = p' - p$; par dualité $p' - p = kd + dk$ et le théorème est démontré.

Soit $\pi_U^V : H_p(X_V, A_V) \longrightarrow H_p(X_U, A_U)$ (resp $\pi_V^U : H^p(X_U, A_U) \longrightarrow$ $\longrightarrow H^p(X_V, A_V))$ l'unique application induite par $U < V$.

<u>LEMME 7-8.- En homologie</u> $\pi_U^V \pi_V^W = \pi_U^W$, <u>en cohomologie</u> $\pi_W^V \pi_V^U = \pi_W^U$.
En effet, si $U < V < W$, la projection $(X_W, A_W) \longrightarrow (X_U, A_U)$ peut être choisie comme étant la composition des projections

$$(X_W, A_W) \xrightarrow{p} (X_V, A_V) \xrightarrow{p'} (X_U, A_U) \qquad \text{(lemme 7-4)}$$

et l'on a (cf. Exposé 8) $(p' \circ p)_* = p'_* \circ p_*$, $(p' \circ p)^* = p^* \circ p'^*$.
Le théorème 7-7 donne alors le résultat.

Nous pouvons finalement résumer ce paragraphe dans le théorème suivant :

<u>THÉORÈME 7-9.- Pour</u> q <u>fixé, la collection</u> $\left\{H_q(X_U, A_U), \pi_V^U\right\}$ <u>indexée par l'ensemble</u> $R(X, A)$ <u>filtrant pour la relation</u> $<$, <u>est un système projectif. La collection</u> $\left\{H^q(X_U, A_U ; G), \pi_U^V\right\}$ <u>indexée par le même ensemble est un système inductif.</u>

<u>DÉFINITION 7-10.-</u> La limite projective du système $\left\{H_q(X_U, A_U), \pi_V^U\right\}$ est par définition le q-ième groupe d'homologie de (X, A) on la note $H_q(X, A)$. La limite inductive du système $\left\{H^q(X_U, A_U ; G)\ \pi_U^V\right\}$ est le q-ième groupe de cohomologie de (X, A), on la note $H^q(X, A ; G)$.

Les principales propriétés de ces groupes seront données dans l'exposé suivant.