Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

M. Ishaq

Sur les spectres des matrices

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. n° 14, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A9_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/56
-:-:-:-

20 février 1956

Exposé n° 14

SUR LES SPECTRES DES MATRICES

par M. ISHAQ.

-:-:-:-

1.- Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée à éléments réels ou complexes et soit I la matrice unité. La matrice $A - \lambda I$ est dite matrice caractéristique de A ; le déterminant $\| A - \lambda I \|$ de la matrice caractéristique est dit déterminant caractéristique de A ; l'équation $\| A - \lambda I \| = 0$ est dite équation caractéristique et les racines de cette équation sont dites valeurs caractéristiques ou valeurs propres de A (les Allemands disent Eigenwert). Cette équation a acquis une importance fondamentale dans l'analyse algébrique moderne et a reçu pas mal d'attention ces dernières années.

Si A est une matrice d'un type particulier, on sait définitivement la nature de son spectre. Par exemple, si A est une matrice hermitique, ses valeurs caractéristiques sont toutes réelles ; si A est une matrice skew-hermitique réelle, ses valeurs carácteristiques sont toutes imaginaires pures ou nulles ; si A est une matrice orthogonale (ou unitaire réelle), ses valeurs caractéristiques ont des modules égaux à 1 . Mais, lorsque A n'a pas un type spécial, nous ne pouvons rien affirmer, en général, en ce qui concerne la nature de son spectre.

En 1900, Bendixson [1] démontre l'énoncé suivant :

Théorème 1. *Soit* $\alpha + i\beta$ *une valeur caractéristique de la matrice réelle* A *et soient* $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \dots \geqslant \rho_n$ *les valeurs caractéristiques (toutes réelles) de la matrice symétrique* $\frac{1}{2}(A + A')$. *On a alors* $\rho_1 \geqslant \alpha \geqslant \rho_n$. *Si, en plus,* $k = \max \left\{ (a_{ij} - a_{ji})/2 \right\}$, *on a*

$$(1) \qquad |\beta| \leqslant k \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

L'extension au cas où les éléments de A sont complexes a été donnée par Hirsch [2] en 1902. En 1904, Bromwich [3] donne la généralisation suivante :

<u>Théorème 2. Soit</u> $\alpha + i\beta$ <u>une valeur caractéristique de la matrice</u> A <u>à éléments réels ou complexes, et soient</u> $\rho_1 , \dots , \rho_n$ <u>les valeurs caractéristiques (toutes réelles) de</u> $\frac{1}{2}(A + A^*)$ <u>et</u> $i\mu_1 , \dots , i\mu_n$ <u>les valeurs caractéristiques de</u> $\frac{1}{2}(A - A^*)$; <u>dans ces conditions,</u> α <u>se trouve entre les maximum et minimum de</u> $\rho_1 , \dots , \rho_n$ <u>et</u> $|\beta| \leq \max \{|\mu_1| , \dots , |\mu_n|\}$.

Les théorèmes précités donnent dans certains cas de très bonnes limites pour les valeurs caractéristiques d'une matrice, tandis que, dans les autres cas, les limites ne sont pas assez nettes. Pour la matrice orthogonale, ces résultats énoncent tout simplement que le spectre se trouve dans le carré $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Pour une matrice réelle A , Pick [4] donne une démonstration du théorème de Bendixson avec l'extension de Bromwich et démontre, en plus, que la relation (1) peut être remplacée par

$$|\beta| = K \,|\operatorname{Ctn} \pi/(2n)|$$

ce qui donne , en général, une meilleure limite.

En 1927, Browne [5] démontre l'énoncé suivant :

<u>Théorème 3. Soit</u> λ <u>une valeur caractéristique de la matrice carrée</u> A <u>et soient</u> $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ <u>les valeurs caractéristiques (toutes</u> ≥ 0) <u>de</u> AA^* . <u>On a alors</u> $\rho_1 \geq \lambda\bar{\lambda} \geq \rho_n$.

2.- Lorsque A est une matrice carrée à éléments réels ou complexes, Autonne [6] a démontré qu'il existe deux matrices unitaires (orthogonales, si A est réel) P et Q telles que

$$A = P^* N Q \tag{2}$$

où N possède des éléments positifs (ou nuls) dans la diagonale principale et zéro ailleurs. En envisageant le produit

$$AA^* = P^* N Q Q^* N P = P^* N^2 P \ ,$$

il est évident que les éléments de N figurant dans la diagonale principale de N sont les racines carrées positives (ou nulles) $\sqrt{\rho_1} , \dots , \sqrt{\rho_n}$ des valeurs caractéristiques de AA^*.

L'équation (2) donne

$$N = P A Q^*$$

d'où $$n_{ij} = \sum_{r,s}^{n} p_{ir} \, a_{rs} \, \bar{q}_{js}$$

c'est-à-dire les éléments de N sont de la forme $\sum_{i,j}^{n} a_{ij} \, x_i \, y_j$, où $(x_1 , \dots , x_n)$ et $(y_1 , \dots , y_n)$ sont les ensembles des nombres tels que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{y}_i = 1 ,$$

grâce au caractère unitaire des matrices P et Q .

Soit λ une valeur caractéristique de A . Il existe un ensemble des nombres $(x_1 , \dots , x_n)$, non tous nuls, et que nous pouvons supposer divisé par un facteur non nul convenablement choisi tel que $\sum x_i \bar{x}_i = 1$ et

(3) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \qquad (i = 1 , \dots , n)$$

Autrement dit, λ est une valeur caractéristique de A si et seulement s'il existe un vecteur x tel que $xx^* = 1$ et

(3a) $$A x^* = \lambda x^*$$

En prenant la conjuguée transposée de deux membres ci-dessus, on a

(4) $$x A^* = \bar{\lambda} x .$$

L'ensemble de tous les nombres complexes $xA z^*$ où $zz^* = 1$ s'appelle <u>le corps de valeurs</u> [7] de la matrice A . Il s'ensuit que le spectre de A appartient au corps de valeurs de A .

Soient x et y deux vecteurs tels que $xx^* = 1 = yy^*$ et soient X et Y les matrices unitaires ayant respectivement x et y comme premier vecteur ligne. On a alors

$$x X^* = y Y^* .$$

Or $$y = xX^* Y = x U$$

où U est une matrice unitaire. En outre, si $x x^* = 1$ et $y = x U$, U étant une matrice unitaire, on a

$$yy^* = x U U^* x^* = xx^* = 1 .$$

Il s'ensuit donc que A et UAU^* admettent <u>le même corps de valeurs et le même spectre pour toute matrice unitaire</u> U . On peut démontrer [8] que <u>le corps de valeurs de</u> A <u>est identique avec l'ensemble de tous les éléments diagonaux</u>

de la matrice UAU^* où $UU^* = I$. Si A est une matrice hermitique, il existe une matrice unitaire U telle que $UAU^* = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right\}$, où $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ sont les valeurs caractéristiques (toutes réelles) de A . Il s'ensuit immédiatement que le corps de valeurs d'une matrice hermitique est le plus petit segment de l'axe réel contenant le spectre de A .

(3a) et (4) donnent

$$\lambda = x A x^* \tag{5}$$

$$\bar{\lambda} = x A^* x^* \tag{6}$$

$$\bar{\lambda}\lambda = x A^* A x^* \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}) = x \left(\frac{A + A^*}{2}\right) x^* \tag{8}$$

$$\frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda}) = x \left(\frac{A - A^*}{2i}\right) x^* \quad . \tag{9}$$

Des relations (5) , (6) et (7) , nous obtenons deux théorèmes bien connus :

(i) Soit $A = A^*$, on a alors $\lambda = \bar{\lambda}$. Donc les valeurs caractéristiques d'une matrice hermitique sont réelles.

(ii) Soit $A^* A = I$, on a alors $\bar{\lambda}\lambda = 1$. Donc les valeurs caractéristiques d'une matrice unitaire ont des modules égaux à 1 .

La relation (7) donne le théorème 3.

En 1930, Browne [9] a obtenu une limite pour les valeurs caractéristiques de la matrice A en termes de sommes des modules des éléments des lignes et colonnes de A . Ecrivons

$$R_i = \sum_j |a_{ij}| \quad , \quad T_j = \sum_i |a_{ij}| \quad , \quad 2\, S_i = R_i + T_i \quad ,$$

$$R'_i = \sum_{\substack{j \\ (i \neq j)}} |a_{ij}| \quad , \quad T'_j = \sum_{\substack{i \\ (i \neq j)}} |a_{ij}| \tag{10}$$

et soient

$$R = \max_{i=1,\ldots,n} (R_i) \; , \qquad T = \max_{j=1,\ldots,n} (T_j) \; , \qquad S = \max_{i=1,\ldots,n} (S_i) \; .$$

Browne a démontré que $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}(R + T)$. Parker [10] a amélioré ce résultat en démontrant que

$$|\lambda| \leqslant S \leqslant \frac{1}{2}(R + T) .$$

Une autre amélioration du théorème de Browne est due à Farnell [11] qui démontre que

$$|\lambda| \leqslant (R\ T)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(R + T).$$

Barankin [12] améliore encore ce résultat en démontrant que $|\lambda| \leqslant \max\ (R_i\ T_i)^{\frac{1}{2}}$. On notera que les deux premiers de ces résultats (ceux de Browne et Parker) sont tout simplement les limites pour le corps de valeurs de A . Supposons que $\mu = x\ A\ x^*$ appartienne au corps de valeurs de A . En écrivant $x = (x_1 , \ldots , x_n)$, on a

$$\mu = \sum_{i,j} a_{ij}\ x_i\ \bar{x}_j$$

si $|x_i| = \xi_i$, il s'ensuit que

$$|\mu| \leqslant \sum_{i,j} |a_{ij}|\ \xi_i\ \xi_j \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,j} |a_{ij}|\ (\xi_i^2 + \xi_j^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_i R_i\ \xi_i^2 + \sum_j T_j\ \xi_j^2\right\} = \sum_i S_i\ \xi_i^2 \leqslant S \sum_i \xi_i^2 = S.$$

Soit $\xi_k = \max\ (\xi_i)$; d'après (3) , on a

$$\lambda x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k_j}\ x_j .$$

Or $$|\lambda x_k| = |\lambda|\ \xi_k \leqslant \sum_j |a_{k_j}|\ \xi_j \leqslant R_k\ \xi_k$$

d'où $$|\lambda| \leqslant R_k .$$

On obtient d'une manière semblable que

$$|\lambda| \leqslant T_m \qquad \text{pour disons } j = m .$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

<u>Théorème 4</u>. <u>Soit</u> λ <u>une valeur caractéristique de la matrice</u> A <u>et définissons</u> R <u>et</u> T <u>par les relations (10). On a alors</u> $|\lambda| \leqslant \min\ (R , T)$.

Ce théorème a été démontré par Frobenius [13] pour le cas où tous les éléments a_{ij} sont positifs. Parker [14] a démontré ce résultat pour a_{ij} réels ou complexes. Il a été par la suite établi par Barankin [12] et plus tard encore par A. Brauer [15] . Dans le même mémoire [15], on trouve le théorème suivant qui donne une meilleure limite :

Théorème 5. Soit M_r le maximum de sommes des modules des éléments dans chaque ligne de la matrice A^{2^r} . Toute valeur caractéristique de A satisfait à l'inégalité

$$|\lambda| \leqslant (M_r)^{\frac{1}{2^r}}$$

Nous allons voir maintenant que l'on peut définir dans le plan complexe un ensemble de domaines circulaires à l'intérieur desquels se trouvent le spectre de A .

D'après (3) , on a

$$(\lambda - a_{kk})x_k = \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j$$

et l'on en déduit

$$|\lambda - a_{kk}| \xi_k \leqslant \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \xi_j \leqslant \xi_k \sum |a_{kj}| = R'_k \xi_k$$

d'où

$$|\lambda - a_{kk}| \leqslant R'_k .$$

On démontre de la même façon que

$$|\lambda - a_{mm}| \leqslant T'_m .$$

On a donc le théorème suivant [15] :

Théorème 6. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice (carrée) quelconque et définissons R'_k et T'_m par les relations (10). Toute valeur caractéristique de A se trouve à l'intérieur au moins d'un des cercles $|z - a_{kk}| \leqslant R'_k$ et à l'intérieur au moins d'un des cercles $|z - a_{mm}| \leqslant T'_m$.

Les équations (3) s'écrivent

(11) $$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \qquad (i = 1 , 2 , \dots , n).$$

Si $\xi_k \geqslant \xi_\ell \geqslant \xi_j$, $j \neq k$, (11) donne

$$|\lambda - a_{kk}| \xi_k \leqslant R'_k \xi_\ell \qquad \text{et} \qquad |\lambda - a_{\ell\ell}| \xi_\ell \leqslant R'_\ell \xi_k .$$

Nous supposons maintenant que la valeur caractéristique $\lambda \neq a_{kk}$, de sorte que $\xi_\ell \neq 0$.

Puisque $|\lambda - a_{kk}| \cdot |\lambda - a_{\ell\ell}| \xi_k \xi_\ell \leqslant R'_k R'_\ell \xi_\ell \xi_k$, On a

$$|\lambda - a_{kk}| \cdot |\lambda - a_{\ell\ell}| \leq R'_k R'_\ell \quad .$$

De même, on a

$$|\lambda - a_{mm}| \cdot |\lambda - a_{qq}| \leq T'_m \; T'_q \quad ,$$

pour quelques m et q , d'où le théorème [16] :

<u>Théorème 7.</u> <u>Etant donné une matrice carrée</u> $A = (a_{ij})$ <u>d'ordre</u> n , <u>ses valeurs caractéristiques se trouvent à l'intérieur du domaine formé par les</u> $\frac{n}{2}(n - 1)$ <u>ovales de Cassini</u>

(12) $$|z - a_{kk}| \cdot |z - a_{\ell\ell}| \leq R'_k \; R'_\ell$$

<u>et aussi dans celui formé par les ovales</u>

$$|z - a_{kk}| \cdot |z - a_{\ell\ell}| \leq T'_k \; T'_\ell \quad .$$

Il est à remarquer que ce théorème donne une meilleure localisation des valeurs caractéristiques que celles obtenues par les considérations du théorème 6, car l'ovale (12) se trouve dans l'un des deux cercles

$$|z - a_{kk}| \leq R'_k \quad , \quad |z - a_{mm}| \leq T'_m \quad .$$

Notons que si $a_{kk} = a_{\ell\ell}$, l'ovale (12) dégénère en circonférence

$$|z - a_{kk}| \leq R'_k \; .$$

<u>Remarques</u>.

1°) Ce théorème permet de donner une limite supérieure des modules des valeurs caractéristiques d'une matrice d'ordre n , $A = (a_{ij})$, elle s'écrit [16]

$$M = \frac{1}{2} \max \left\{ |a_{kk}| + |a_{mm}| + \sqrt{(|a_{kk}| - |a_{mm}|)^2 + 4 R'_k T'_m} \right\}$$

$$(k , m = 1 , 2 , \ldots , n \; ; \; k \neq m)$$

2°) Avec l'hypothèse supplémentaire

$$|a_{kk} \, a_{mm}| > R'_k \; T'_m \qquad (k , m = 1 , 2 , \ldots , n \; ; \; k \neq m)$$

on peut également donner [16] une limite inférieure des modules des valeurs caractéristiques de A , elle s'écrit

$$m = \frac{1}{2} \min \left\{ |a_{kk}| + |a_{mm}| - \sqrt{(|a_{kk}| - |a_{mm}|)^2 + 4 R'_k \; T'_m} \right\} \quad .$$

3°) On peut appliquer aux matrices stochastiques le théorème 7 et améliorer ainsi un résultat de Fréchet [19 , 20] .

La matrice $A = (a_{ij})$ s'appelle matrice stochastique lorsque tous les éléments sont non-négatifs et

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , n).$$

Lorsque tous les éléments sont positifs, A est dite matrice stochastique positive. Les propriétés de spectre des matrices stochastiques jouent un rôle important dans la théorie des processus stochastiques.

Selon un résultat bien connu, le spectre d'une matrice stochastique se trouve à l'intérieur ou sur la circonférence d'un cercle-unité. Le point $z = 1$ est toujours une valeur caractéristique. En particulier, le point $z = 1$ est une valeur caractéristique simple, lorsque A est une matrice décomposable[(1)] [21 , 22] . Aucun autre point sur la circonférence de cercle-unité ne peut être valeur caractéristique à moins que tous les éléments de la diagonale principale ne s'évanouissent.

Soit a_{kk} le plus petit élément de la diagonale principale. Fréchet [19 , 20] a démontré que le spectre d'une matrice stochastique setrouve à l'intérieur ou sur la circonférence de cercle

$$(13) \qquad |z - a_{kk}| \leqslant 1 - a_{kk} .$$

En outre, il établit qu'aucun autre point différent de 1 sur la circonférence de cercle-unité ne peut être valeur caractéristique à moins que deux éléments au moins de la diagonale principale ne s'évanouissent.

---

(1) On dit [21] qu'une matrice A est décomposable si l'on peut la mettre, par une permutation identique des lignes et des colonnes, sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

où P , Q , R , S sont des sous-matrices, P et S étant des matrices carrées et Q et R des matrices rectangulaires, et où l'une des matrices Q et R au moins est égale à zéro. La matrice A est indécomposable si nous ne pouvons pas la décomposer de la manière indiquée. Frobenius [22] emploie les mots "zerfallend" et "zerlegbar".

En utilisant le théorème 7 , on peut [19] améliorer le résultat de **Fréchet** sous la forme suivante :

Théorème 8. Soient a_{ii} et a_{jj} les plus petits éléments de la diagonale principale d'une matrice stochastique A à savoir $a_{ii} \leq a_{jj} \leq a_{kk}$. Son spectre se trouve à l'intérieur ou sur la frontière de l'ovale

$$|z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leq (1 - a_{ii})(1 - a_{jj}) . \tag{14}$$

On notera que si $a_{ii} \neq a_{jj}$, l'ovale (14) se trouve à l'intérieur du cercle (13). Les frontières des deux courbes ont le point $z = 1$ en commun. Donc (14) donne une meilleure localisation de spectre que (13).

4°) Dans son troisième mémoire [17] , Brauer démontre comment les théorèmes précités peuvent être appliqués aux polynomes matriciels de A afin d'obtenir les meilleures localisations de spectre. Il donne, en effet, le théorème :

Théorème 9. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice (carrée) d'ordre n , et $f_1(y)$, $f_2(y)$, ... , $f_n(y)$ les polynomes quelconques. Désignons les éléments du polynome matriciel $f_r(A)$ par $a_{ij}^{(f_r)}$ et posons

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| a_{ij}^{(f_r)} \right| = P_i^{(f_r)} \qquad (i , r = 1 , 2 , \ldots , n).$$

Toute valeur caractéristique λ de A satisfait au moins l'une des n inégalités

$$\left| f_s(\lambda) - a_{ss}^{(f_s)} \right| \leq P_s^{(f_s)} \qquad (s = 1 , 2 , \ldots , n)$$

et au moins l'une des $\frac{n}{2}(n - 1)$ inégalités

$$\left| f_s(\lambda) - a_{ss}^{(f_s)} \right| \cdot \left| f_t(\lambda) - a_{tt}^{(f_t)} \right| \leq P_s^{(f_s)} \, P_t^{(f_t)}$$

$$(s , t = 1 , 2 , \ldots , n ; s \neq t).$$

3.- Nous allons voir maintenant une application du théorème suivant à un problème d'algèbre.

Théorème 10. Etant donné la matrice carrée d'ordre n , $A = (a_{ij})$; si pour un entier m donné $(1 \leq m \leq n)$, on a

$$|a_{mm} - a_{\lambda\lambda}| > R'_m + T'_m \qquad (\lambda = 1 , 2 , \ldots , n) , \tag{15}$$

<u>pour tout</u> λ <u>différent de</u> m , <u>le cercle</u>

(16) $$|z - a_{mm}| \leqslant R'_m$$

<u>contient une, et une seule, valeur caractéristique de</u> A [15] .

En premier lieu, remarquons que la condition (15) implique que la circonférence (16) n'a aucun point commun avec les circonférences

(17) $$|z - a_{\lambda\lambda}| \leq R'_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n ; \lambda \neq m).$$

Ceci posé, considérons la matrice B , d'éléments b_{ij} définie comme suit :

$$b_{k\lambda} = a_{k\lambda} \ (k \neq m) , \quad b_{mm} = a_{mm} , \quad b_{m\lambda} = 0 \qquad (\lambda \neq m) .$$

Il est clair que a_{mm} est une valeur caractéristique de B ; représentons-la par ξ_1 et soient $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ les autres valeurs caractéristiques qui sont aussi celles du mineur principal B_{mm} de B . Les éléments de la diagonale principale de B_{mm} sont $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{m-1,m-1}$, $a_{m+1,m+1}, \ldots, a_{nn}$; d'autre part, les sommes des modules des éléments non diagonaux de chaque ligne de B_{mm} sont au plus égales à $R'_1, \ldots, R'_{m-1}, R'_{m+1}, \ldots, R'_n$, donc

$$\sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda\neq m,k}}^{n} |b_{k\lambda}| \leqslant \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda\neq k}}^{n} |a_{k\lambda}| = R'_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n) ,$$

et il en résulte que $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ se trouvent dans le domaine délimité par les circonférences d'équations (17) . Introduisons alors un paramètre réel t compris entre zéro et un et posons

$$b_{k\lambda}(t) = b_{k\lambda} \ (k \neq m) , \qquad b_{mm}(t) = b_{mm} ,$$
$$b_{m\lambda}(t) = t\, a_{m\lambda} \qquad (\lambda \neq m) ,$$

puis faisons varier t de façon continue de zéro à un. Les éléments de la matrice B , ainsi que les coefficients de son équation caractéristique, varie d'une manière continue, chacune de ces dernières se déplaçant sur une courbe continue allant d'un point ξ_ν à un point $\lambda_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ représentant une valeur caractéristique de la matrice A .

Tous les points de ces courbes doivent se trouver dans l'un des cercles (16) et (17) , puisque la somme des modules des éléments non-diagonaux de la m-ième ligne reste inférieure à R'_m et que les sommes des modules des éléments non diagonaux des autres lignes demeurent inchangées.

Il s'ensuit que chacune des courbes joignent ζ_ν à λ_ν $(\nu \geqslant 2)$ doit rester extérieure à la circonférence d'équation (16) , alors que la courbe joignant ζ_1 à λ_1 demeure dans cette circonférence.

Ainsi la circonférence d'équation (16) ne contient qu'une, et une seule, valeur caractéristique de A .

Corollaire 1. Si l'élément a_{mm} et les coefficients de l'équation caractéristique de A sont des nombres réels et si (15) est satisfaite, la valeur caractéristique située dans la circonférence (16) est réelle.

Corollaire 2. Si tous les éléments de la diagonale principale de A , ainsi que les coefficients de son équation caractéristique sont réels et si pour chaque k et λ , on a

$$|a_{kk} - a_{\lambda\lambda}| > R'_k + R'_\lambda \quad ,$$

toutes les valeurs caractéristiques de A sont réelles et distinctes.

Application à un problème d'algèbre.

On sait qu'étant donné un polynome de degré n

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_n \neq 0)$$

dont tous les coefficients sont des entiers réels, ce polynome est irréductible sur le corps des nombres rationnels quand les modules de (n - 1) de ses zéros sont inférieurs à l'unité. [25]

Nous trouverons donc des conditions d'irréductibilité du polynome caractéristique d'une matrice régulière $A = (a_{ij})$ d'ordre n , à éléments réels entiers, en exprimant que (n - 1) de ses valeurs caractéristiques se trouvent dans le cercle-unité.

Les valeurs caractéristiques de A sont solutions de l'équation

$$\| A - \lambda I \| = 0$$

et dans le plan complexe, elles se trouvent à l'intérieur du domaine limité par les n circonférences

(18) $$|z - a_{ii}| \leqslant R'_i \ .$$

D'après le théorème 10, le polynome caractéristique de la matrice A sera irréductible si (n - 1) des circonférences d'équations (18) sont situées tout entières à l'intérieur du cercle-unité et si le n-ième est extérieur à ce cercle (et ne le contient pas).

On remarque [23] qu'étant donné la matrice $A = (a_{ij})$, il est loisible de lui associer une matrice carrée également régulière $C = (c_{ij})$ d'ordre n à éléments réels, pour former la matrice

$$B = (b_{ij}) = C^{-1} AC \qquad (i , j = 1 , 2 , \dots , n),$$

qui possède le même polynome caractéristique que A et dont le spectre se trouve à l'intérieur du domaine limité par les n circonférences

$$|z - b_{ii}| \leq \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} |b_{ij}| \qquad (i , j = 1 , 2 , \dots , n) .$$

En appliquant à B le théorème 10, on peut alors énoncer la proposition suivante [26] :

Le polynome caractéristique de la matrice carrée régulière d'ordre n , $A = (a_{ij})$, à éléments entiers est irréductible sur le corps des nombres rationnels, s'il est possible de déterminer une matrice régulière $C = (c_{ij})$ d'ordre n , à éléments réels, telle que le spectre de $B = C^{-1} AC$ se trouve à l'intérieur du domaine limité par les $n-1$ circonférences situées tout entières dans le cercle-unité, la n-ième étant à l'extérieur de cette circonférence et ne la contenant pas.

Ainsi des conditions suffisantes d'irréductibilité du polynome caractéristique de A s'écrivent

$$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1 \qquad (i , j = 1 , 2 , \dots , n ; i \neq m)$$

$$|b_{mm}| > 1 + \sum_{\substack{j \\ j \neq m}} |b_{mj}| \qquad (j = 1 , 2 , \dots , n) .$$

4.- Dans divers problèmes de Mécanique quantique et de la théorie des petits mouvements, on est amené à considérer des équations de la forme

$$(19) \qquad \| a_{jk}^{(0)} z^{m} + a_{jk}^{(1)} z^{m-1} + \dots + a_{jk}^{(m)} \| = 0 \quad (j , k = 1 , 2 , \dots , n),$$

le déterminant étant d'ordre n et ses éléments constitués par des polynomes en z de degré m .

Les conditions suffisantes pour que l'équation (19) ait ses racines à l'intérieur du cercle-unité sont [24]

$$\left|a_{jj}^{(0)}\right| > \sum_{k\neq j} \left|a_{jk}^{(0)}\right| + \sum_{k} \left|a_{jk}^{(1)}\right| + \dots + \sum_{k} \left|a_{jk}^{(m)}\right| \quad (j , k = 1, 2, \dots, n).$$

On en déduirait immédiatement des conditions suffisantes pour que les racines de l'équation (19) soient inférieures, en module, à un nombre donné M positif.

De même, les conditions suffisantes pour que l'équation (19) ait ses racines à l'extérieur du cercle-unité sont

$$\left|a_{jj}^{(m)}\right| > \sum_{j\neq k} \left|a_{jk}^{(m)}\right| + \sum_{k} \left|a_{jk}^{(m-1)}\right| + \dots + \sum_{k} \left|a_{jk}^{(0)}\right| \quad (j,k = 1, 2, \dots, n)$$

et l'on peut en déduire immédiatement les conditions suffisantes pour que les racines de l'équation (19) soient supérieures, en module , à un nombre donné $m > 0$.

Les quantités m et M étant données $(0 < m < M)$ on pourra caractériser les équations (19) dont les racines sont en module comprises entre m et M .

5.- On peut aussi appliquer aux matrices d'Hadamard les théorèmes précités et obtenir ainsi les résultats sur les valeurs caractéristiques.

On appelle matrice d'Hadamard, ou matrice H , une matrice carrée d'ordre n dans laquelle tous les éléments sont ± 1 et dont le déterminant a la valeur $n^{n/2}$.

Si A est une matrice H d'ordre n , on sait [27] que

$$AA' = n\, I_n$$

où A' est la matrice transposée de A et I_n est la matrice unité d'ordre n.

Ishaq [28] a démontré les théorèmes suivants :

<u>Théorème 11</u>. Les valeurs caractéristiques d'une matrice H ont des modules égaux.

<u>Théorème 12</u>. Si λ est une valeur caractéristique de la matrice H d'ordre n , il en est de même de n/λ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] - I. BENDIXSON : Acta Math., t. 25 (1902) p. 359-365.

[2] - A. HIRSCH : Acta Math., t. 25 (1902) p. 367-370.

[3] - T.J.I'A. BROMWICK : Acta Math., t. 30 (1906) p. 295-304.

[4] - G. PICK : Zeitschrift für angew. Math. und Mechanik, t. 2 (1922) p. 353-357.

[5] - E.T. BROWNE : Bull. Amer. math. Soc., t. 4 (1928) p. 363-366.

[6] - L. AUTONNE : Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris, t. 156 (1913) p. 858-860.

[7] - O. TOEPLITZ : Math. Zeit., t. 2 (1918) p. 187-197.

[8] - W.V. PARKER : Duke math. J., t. 15 (1948) p. 439-442.

[9] - E.T. BROWNE : Bull. Amer. math. Soc., t. 36 (1930) p. 705-710.

[10] - W.V. PARKER : Duke Math. J., t. 3 (1937) p. 484-487.

[11] - A.B. FARNELL : Bull. Amer. math. Soc., t. 50 (1944) p. 789-794.

[12] - E.W. BARANKIN : Bull. Amer. math. Soc., t. 51 (1945) p. 767-770.

[13] - G. FROBENIUS : Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, (1908) p. 471-476.

[14] - W.V. PARKER : Duke math. J., t. 10 (1943) p. 479-482.

[15] - A. BRAUER : Duke math. J., t. 13 (1946) p. 387-395.

[16] - " " : " " " , t. 14 (1947) p. 21-26.

[17] - " " : " " " , t. 15 (1948) p. 871-877.

[18] - " " : " " " , t. 19 (1952) p. 75-91.

[19] - M. FRÉCHET : Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes aux différences finies du premier ordre à coefficients constants, Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk (Brno), n° 178 (1933) p. 1-24.

[20] - M. FRÉCHET : Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités, seconde partie, Paris, 1937.

[21] - V. ROMANOVSKY : Acta Math., t. 66 (1936) p. 147-251.

[22] - G. FROBENIUS : Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (1912) p. 456-477.

[23] - M. PARODI : C.R. Acad. Sc. Paris, t. 223 (1946) p. 236.

[24] - " " : Bull. Sci. math., t. 74 (1950) p. 121.

[25] - O. PERRON : J. für die reine und angewandte Math. (Journal de Crelle), t. 132 (1907) p. 288-307.

[26] - M. PARODI : Annales Soc. Scient. Bruxelles, t. 15 (1951) p. 15-24.

[27] - J. HADAMARD : Bull. Sci. math., t. 17 (1893) p. 240-246.

[28] - M. ISHAQ : Ganita, t. 1, n° 2 (1950) p. 13-15.