Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

R. Descombes

Sur un théorème de J. W. S. Cassels

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. nº 11, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/56
-:-:-:-

30 janvier 1956

Exposé n° 11

SUR UN THÉORÈME DE J.W.S. CASSELS,

par R. DESCOMBES

-:-:-:-

1.- Position du problème.

Considérons un cercle de longueur un . A partir d'une origine 0 sur ce cercle, marquons les extrémités des arcs dont les longueurs sont les multiples positifs successifs d'un nombre irrationnel ξ . Nous nous proposons d'étudier de quelle façon un point fixe Ω quelconque du cercle, d'abscisse curviligne η , est approché par les sommets successifs de la ligne polygonale régulière non fermée ainsi constituée. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien Ω est un sommet de la ligne polygonale, éventuellement prolongée du côté des multiples négatifs de ξ , c'est-à-dire $\eta \equiv q\xi$ (mod.1) (q entier) ; Ω est alors approché de la même façon que 0 et nous dirons qu'il s'agit d'un problème homogène. Ou bien cette circonstance ne se produit pas, et nous dirons qu'il s'agit d'un problème non homogène.

2.- Le cas homogène. Rappel des résultats.

Dans le cas du problème homogène, la symétrisation de la ligne polygonale par rapport au diamètre passant par 0 est sans importance. Les résultats suivants sont connus depuis Markoff (1879), les deux premiers étant dûs à Korkine et Zolotareff (1873) :

Si ξ est un nombre irrationnel quelconque, ε étant un nombre strictement positif arbitraire,

a) il existe une infinité de couples d'entiers (p , q) avec $q \neq 0$, tels que

$$|q(q\xi - p)| < \frac{1}{\sqrt{5}} + \varepsilon$$

la constante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ne pouvant être diminuée pour les nombres ξ d'un certain ensemble S_1 ;

b) si ξ n'appartient pas à S_1 , il existe une infinité de couples

$(p\ ,\ q)$ avec $q \neq 0$ tels que

$$|q(q\xi - p)| < \frac{1}{\sqrt{8}} + \varepsilon$$

la constante $\frac{1}{\sqrt{8}}$ ne pouvant être diminuée pour les nombres ξ d'un certain ensemble S_2 ;

c) plus généralement, si ξ n'appartient à aucun des ensembles $S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_{n-1}$, il existe une infinité de couples $(p\ ,\ q)$, avec $q \neq 0$ tels que

$$|q(q\xi - p)| < \frac{1}{\sqrt{9-4/m_n^2}} + \varepsilon$$

la constante $1/\sqrt{9-4m_n^2}$ ne pouvant être diminuée pour les nombres ξ d'un certain ensemble S_n , et le nombre m_n étant le n-ième "nombre de Markoff" ; ces nombres sont des entiers dont la liste, à partir de m_1 , commence ainsi

$$1\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 13\ ,\ 29\ ,\ 34\ ,\ 89\ ,\ 169\ ,\ 194\ ,\ 233\ ,\ 433\ ,\ \ldots$$

avec $m_n \longrightarrow +\infty$ avec n ;

d) si ξ n'appartient à aucun des ensembles $S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ S_n\ ,\ldots,$ il existe une infinité de couples $(p\ ,\ q)$ avec $q \neq 0$ tels que

$$|q(q\xi - p)| < \frac{1}{3} + \varepsilon$$

la constante $1/3$ ne pouvant être diminuée pour une infinité continue de nombres ξ .

En fait on peut montrer avec Hurwitz (1891) qu'on peut prendre partout $\varepsilon = 0$. De plus, chaque ensemble S_n est constitué des nombres <u>équivalents</u> à l'un quelconque d'entre eux, c'est-à-dire déduits de ce dernier par une transformation unimodulaire à coefficients entiers.

On peut encore énoncer ainsi les résultats précédents :

La fonction

$$c(\xi) = \overline{\lim_{p,q}}\ \frac{1}{|q(q\xi - p)|} \qquad (q \neq 0)$$

définie sur les irrationnels ξ , prend, entre sa plus petite valeur $\sqrt{5}$ et sa plus petite valeur d'accumulation 3 , une infinité de valeurs isolées égales à

$$\sqrt{9 - \frac{4}{m_n^2}}$$

3.- Le cas non homogène. Résultats.

Dans le cas non homogène, la symétrisation de la ligne polygonale n'est plus indifférente, car elle équivaut au remplacement de η par $-\eta$. Si on l'accepte, on est conduit au théorème bien connu de Minkowski (1893).

Si ξ est un nombre irrationnel, et η un nombre réel quelconque tel que $\eta \not\equiv q\xi$ (mod.1), il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v \neq 0$ tels que

$$|v(v\xi - u - \eta)| < \frac{1}{4}$$

la constante $1/4$ ne pouvant être diminuée que par la suppression de couples (ξ, η) dont certains correspondent à une valeur strictement plus petite qu'elle. Autrement dit, $1/4$ n'est pas une valeur "isolée" comme c'était le cas pour $1/\sqrt{5}$ dans le problème homogène.

Abandonnons définitivement le cas non homogène "symétrique" pour revenir au problème non homogène correspondant à une ligne polygonale indéfinie dans un seul sens. Ce problème a été étudié en particulier par Khintchine (1935) puis par Poitou et moi-même (1952); le premier résultat "précis" a été obtenu par Cassels (1954). On peut à présent énoncer ce qui suit :

Théorème : Si ξ est un nombre irrationnel et η un nombre réel quelconque non de la forme $M\xi + N$ (M et N entiers), ε étant un nombre strictement positif arbitraire :

a) il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$ tels que

$$v|v\xi - u - \eta| < \frac{27}{28\sqrt{7}} + \varepsilon$$

la constante $\frac{27}{28\sqrt{7}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents, en un sens défini à la fin du théorème, à $\left(\frac{7-\sqrt{7}}{14}, \frac{1}{14}\right)$;

b) si le couple (ξ, η) est différent de ces couples particuliers, il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v|v\xi - u - \eta| < \frac{359}{45\sqrt{510}} + \varepsilon$$

la constante $\frac{359}{45\sqrt{510}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents à $\left(\frac{225-\sqrt{510}}{2340}, \frac{1}{90}\right)$;

c) si le couple (ξ, η) est différent des couples particuliers de

a) et de b) , il existe une infinité de couples (u , v) , avec $v > 0$, tels que

$$v|v\xi - u - \eta| < \frac{37}{10\sqrt{110}} + \varepsilon$$

la constante $\frac{37}{10\sqrt{110}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ , η) équivalents à $\left(\frac{15-\sqrt{110}}{10} , \frac{1}{10}\right)$;

d) si, n étant un entier ≥ 1 , le couple (ξ , η) est différent des couples précédents et si en outre, pour $n \geq 2$, (ξ , η) n'est équivalent à aucun des couples (ξ_k , η_k) avec $1 \leq k \leq n-1$, il existe une infinité de couples (u , v) avec $v > 0$ tels que

$$v|v\xi - u - \eta| < \frac{1}{\gamma_n} + \varepsilon$$

la constante $\frac{1}{\gamma_n}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ , η) équivalents à (ξ_n , η_n) ;

e) si le couple (ξ , η) est différent de tous les couples précédents, il existe une infinité de couples (u , v) avec $v > 0$ tels que

$$v|v\xi - u - \eta| < \frac{1}{\gamma} + \varepsilon$$

la constante $\frac{1}{\gamma}$ ne pouvant être diminuée pour une infinité continue de couples (ξ , η) . De plus, on a

$$\lim_n \gamma_n = \gamma \ .$$

Les ξ_n , η_n , γ_n ont des expressions assez compliquées, où la suite recurrente définie par $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_{n+1} = 542s_n - s_{n-1}$ joue un grand rôle. A titre d'exemple voici les valeurs de γ_1 , γ_2 et de la valeur d'accumulation γ des γ_n :

$$\gamma_1 = \frac{12192\sqrt{32385}}{772\ 841} \qquad \gamma_2 = \frac{16228\sqrt{(2340890)^2 - 1}}{13\ 379\ 443\ 561}$$

$$\gamma = \frac{366\ 795}{773\ 868 - 28547\sqrt{510}}$$

Ce théorème doit être complété par la définition suivante : les couples (ξ , η) et (ξ' , η') sont dits <u>équivalents</u> s'il existe six entiers A , B , C , D , E , F , avec $AD - BC = \pm 1$ et $C\xi + D > 0$, tels que

$$\xi' = \frac{A\xi + B}{C\xi + D} \qquad \eta' = \frac{(AD-BC)\eta}{C\xi + D} + \frac{E\xi + F}{C\xi + D} \quad .$$

On vérifie qu'il s'agit bien là d'une relation d'équivalence entre couples d'un nombre irrationnel et d'un nombre réel.

C'est la partie a) du théorème qui est due à Cassels. L'aide de G. Poitou m'a été précieuse pour la démonstration des autres parties.

Comme dans le cas homogène, avec lequel le problème en question présente donc une grande analogie, on peut énoncer les résultats précédents ainsi :

La fonction

$$c(\xi, \eta) = \overline{\lim_{u,v}} \frac{1}{v|v\xi - u - \eta|} \qquad (v > 0)$$

définie sur les couples (ξ, η) où ξ est irrationnel et η réel non de la forme $M\xi + N$ (M et N entiers), prend, entre sa plus petite valeur $\frac{28\sqrt{7}}{27}$ et sa plus petite valeur d'accumulation γ, une infinité de valeurs isolées

$$\frac{28\sqrt{7}}{27} \, , \quad \frac{45\sqrt{510}}{359} \, , \quad \frac{10\sqrt{110}}{37} \, , \quad \gamma_1 \, , \quad \gamma_2 \, , \ldots , \gamma_n \, , \ldots$$

Comparons ces valeurs de $c(\xi, \eta)$ aux premières valeurs de $c(\xi)$:

$c(\xi) =$	$c(\xi, \eta) =$
$\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$	
	$\frac{28\sqrt{7}}{27} = 2{,}743\ldots$
$\sqrt{8} = 2{,}8284\ldots$	
	$\frac{45\sqrt{510}}{359} = 2{,}8307\ldots$
	$\frac{10\sqrt{110}}{37} = 2{,}8346\ldots$
	$\gamma_1 = 2{,}83894\ldots$
	$\gamma_2 = 2{,}8392782\ldots$
	....
	$\gamma = 2{,}8392788\ldots$
$\frac{\sqrt{221}}{5} = 2{,}973\ldots$	

4.- Le cas homogène. Rappel de la méthode et des résultats formels.

Les méthodes qui conduisent à ces résultats ont déjà été exposées à ce Séminaire (cf. exposé n° 1 de l'année 1954/55, dont nous suivrons à quelques détails près les notations). Elles poursuivent l'analogie des résultats entre le cas homogène et le cas non homogène pourvu qu'on se borne aux lignes polygonales régulières indéfinies dans un seul sens.

Le cas homogène est abordé par la méthode des fractions continues qui permet de choisir parmi tous les couples d'entiers (p , q) lorsque ξ est fixé, une suite de couples (p_n , q_n) "de meilleure approximation" qui constituent les réduites p_n/q_n de ξ et tels que

$$c(\xi) = \overline{\lim_n}\ 1/|q_n(q_n\xi - p_n)|$$

Ces couples satisfont à des relations de récurrence telles qu'en posant

$$x_n = -\frac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}} \quad , \quad y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$$

$c(\xi)$ est entièrement déterminé par la donnée, à partir d'un certain rang, de la suite des entiers a_n , à l'aide des formules :

$$c(\xi) = \overline{\lim}\ (x_n - y_n) \tag{4.1}$$

$$x_0 = \xi \qquad\qquad y_1 = 0 \tag{4.2}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n} \qquad y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n} \qquad a_n = [x_n] \text{(partie entière de } x_n) \tag{4.3}$$

La suite des entiers $a_0 , a_1 , \dots , a_n , \dots$, strictement positifs sauf peut-être le premier, est le développement de ξ en fraction continue.

L'équivalence de deux nombres ξ et ξ' est caractérisée par l'identité de leurs développements à partir d'un certain rang ; en particulier ξ et x_n sont donc équivalents. Les nombres ξ quadratiques sont caractérisés par la périodicité de leur développement, à partir d'un certain rang. Enfin, une suite arbitraire infinie d'entiers strictement positifs est toujours le développement d'un nombre ξ irrationnel convenable.

5.- Le cas non homogène. Méthode et résultats formels.

Pour le problème non homogène, Cassels utilise une suite de quadruplets d'entiers $(u_n , v_n , u'_n , v'_n)$. En fait, cette suite possède des propriétés formelles analogues aux précédentes. C'est ainsi que ces quadruplets sont de "meilleure approximation", c'est-à-dire que

$$c(\xi , \eta) = \overline{\lim} \max \left\{ 1/(v_n |v_n \xi - u_n - \eta|) \ , \ 1/(v'_n |v'_n \xi - u'_n - \eta |) \right\}$$

En utilisant les réduites du développement de ξ en fraction continue, et en posant

$$z_{n+1} = \frac{v_n \xi - u_n - \eta}{q_n \xi - p_n} \qquad \text{et} \qquad t_{n+1} = \frac{v_n}{q_n}$$

on a, pour remplacer (4.1), (4.2) et (4.3) :

(5.1) $$c(\xi , \eta) = \overline{\lim} \max \left\{ \frac{x_n - y_n}{z_n \ t_n} \ , \ \frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)} \right\}$$

(5.2) $$x_0 = \xi \quad , \quad z_0 = \eta \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad t_1 = 1$$

avec

(5.3) $$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n} \qquad y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n} \qquad a_n = [x_n]$$

et

(5.4) $$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n \qquad b_n = [x_n - z_n]$$

ou

(5.5) $$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 - z_n \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = 1 - t_n \qquad b_n \text{ non défini ,}$$

les formules (5.4) et (5.5) étant soumises à un mode d'emploi qu'il est inutile d'expliciter ici, mais qui permet, pour chaque valeur de n, de décider sans ambiguïté l'emploi de l'un ou de l'autre groupe de formules. On obtient ainsi une suite constituée de couples d'entiers (a_n , b_n) ou d'entiers a_n non associés à un b_n, qui est le <u>développement</u> du couple (ξ , η). L'équivalence de deux couples (ξ , η) et (ξ' , η') est caractérisée par l'identité de leurs développements à partir d'un certain rang ; en particulier, (ξ , η) et (x_n , z_n) sont donc équivalents. Les couples (ξ , η) où ξ est quadratique et η de la forme $\mu \xi + \nu$ (μ et ν rationnels non tous deux entiers) sont caractérisés par la périodicité de leur développement.

De plus, l'hypothèse $c(\xi , \eta) < 3$ entraîne que les formules (5.4) interviennent seules, à l'exclusion des formules (5.5), à partir d'un certain rang. $c(\xi , \eta)$ est alors entièrement déterminé par la donnée, à partir d'un certain rang, des couples d'entiers (a_n , b_n). D'ailleurs, on peut se donner arbitrairement une suite de couples d'entiers (a_n , b_n) vérifiant les inégalités $0 \leqslant b_n < a_n$, avec $\underset{n}{\underline{\lim}} (a_n - b_n) \geq 2$ (le cas $\lim (a_n - b_n) = 1$ entraînerait

$\eta = M\xi + N$, M et N entiers) ; on obtient ainsi toujours le développement d'un couple (ξ, η) convenable, sans que, d'ailleurs, on ait nécessairement $c(\xi, \eta) < 3$.

6.- Développements concernés par le théorème.

Dans l'étude des petites valeurs de $c(\xi, \eta)$, les séquences de couples (a_n , b_n) suivantes

$$A : \begin{cases} a_n = 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ b_n = 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{cases} \qquad B : \begin{cases} a_n = 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ b_n = 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} a_n = 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ b_n = 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{cases}$$

jouent un rôle essentiel. De façon précise, on montre, au prix de calculs trop longs pour être indiqués ici, que si $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7} < 3$ le développement de (ξ, η) est exclusivement constitué, à partir d'un certain rang, par des combinaisons des séquences A , B et C .

En étudiant ces combinaisons, on trouve l'infinité de valeurs isolées de $c(\xi, \eta)$ signalées dans le théorème, et qui correspondent, dans l'ordre, aux couples (ξ, η) dont les développements admettent, à partir d'un certain rang, les périodes respectives

A , BC , B , ABC , ... , ABC ... BC (n fois BC) , ...

La valeur d'accumulation γ correspond aux couples dont le développement a, à partir d'un certain rang, la structure suivante

$$A\underbrace{BC\ldots\ldots BC}_{r_1 \text{ fois BC}}A\underbrace{BC\ldots\ldots BC}_{r_2 \text{ fois BC}}A\ldots\ldots A\underbrace{BC\ldots\ldots BC}_{r_k \text{ fois BC}}A\ldots$$

où $r_k \longrightarrow +\infty$ avec l'entier k .