K. E. Aubert

Une théorie générale des idéaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. nº 8, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

9 janvier 1956

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/1956
-:-:-:-

Exposé n° 8

UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES IDÉAUX.

par K.E. AUBERT.

Introduction.

Si l'on entend par la théorie des idéaux non seulement la théorie des idéaux dans un anneau, mais plus généralement l'ensemble des résultats concernant les diverses notions d'idéal dispersées un peu partout dans l'algèbre abstraite, on peut dire que la théorie des idéaux manque encore de fondements satisfaisants, comparables par exemple à ceux de la topologie générale.

Le but de cet exposé est de présenter d'après une idée qui remonte à Prüfer [1] une axiomatique qui peut servir comme base pour une telle théorie générale des idéaux. D'après les premiers résultats et les diverses applications qui nous en donnerons, il nous semble justifié de dire que la théorie en question, tout au moins pour les parties les plus classiques de la théorie des idéaux, satisfait aux deux conditions principales d'une bonne généralisation :

1°) Elle est assez générale pour englober toutes les notions d'idéal importantes envisagées jusqu'ici dans la littérature,

2°) Elle est assez puissante pour obtenir au moins une bonne partie des résultats les plus fondamentaux démontrés dans les théories particulières.

En outre la théorie que nous allons exposer possède un trait remarquable, à savoir la possibilité de démontrer des résultats réciproques, montrant non seulement la suffisance, mais aussi la nécessité de ces axiomes pour des résultats fondamentaux. A notre connaissance, de tels résultats réciproques sont très rares ou même tout à fait absents dans les théories particulières.

Avant d'aborder la théorie générale, il sera peut être bon de faire un bref rappel de quelques unes des plus importantes notions d'idéal qui entrent comme cas particuliers dans la définition générale donnée ci-dessous. Ces notions particulières sont d'ailleurs celles qui conduisent à cette définition. D'abord il y a le frère ainé de toutes les notions d'idéal à savoir l'idéal ordinaire dans un anneau. Aux environs de 1930, d'autres notions d'idéal étaient introduites dans les anneaux. Les v-idéaux de van der Waerden [2] introduits indépendamment par Arnold [3] dans les demi-groupes. Puis les r-idéaux de Prüfer [1] généralisés ensuite aux demi-groupes par Lorenzen [4]. Ces notions si précieuses pour la théorie de la divisibilité avaient toutes une origine arithmétique. Au contraire, les différentes notions d'idéal introduites dans les treillis et les ensembles partiellement ordonnés par Tarski, Stone, Mac Neille, H. Cartan et d'autres, avaient des origines très variées comme par exemple la théorie des représentations des algèbres de Boole, la complétion des ensembles partiellement ordonnés, la topologie générale etc. Pour terminer, mentionnons aussi des notions d'idéal qui se rapprochent de la notion d'un idéal dans un anneau mais qui possèdent des propriétés de fermetures supplémentaires. De tels exemples sont fournis par les idéaux fermés dans un anneau topologique et les idéaux différentiels parfaits dans les anneaux différentiels.

Il existe déjà quelques travaux d'unification, notamment à l'aide de la notion de treillis multiplicatifs où l'on a en vue surtout les anneaux et les demi-groupes. (Ward, Dilworth, Lesieur et d'autres. Voir [5] pour une bibliographie). Beaucoup de résultats se laissent généraliser aux treillis multiplicatifs, mais l'inconvénient incontestable de ne plus être capable d'opérer avec les éléments du système algébrique initial se manifeste si fréquemment qu'on ne peut pas qualifier cette méthode comme satisfaisante pour les buts que nous avons en vue. Déjà dans le cas du théorème de Krull-Stone (Voir paragraphe 3) les traductions latticielles que nous connaissons (Krishnan [6] et Aubert [7]) sont moins satisfaisantes et beaucoup plus compliquées que la généralisation que nous en donnerons ci-dessous.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, nous partons d'une idée de Prüfer approfondie plus tard par Krull et Lorenzen. Mais le but de ces auteurs, à savoir l'étude de l'arithmétique des domaines d'intégrité et des groupes ordonnés était tout autre que le notre. En généralisant et exploitant systématiquement l'idée de Prüfer dans la forme donnée par Lorenzen, nous obtenons une théorie générale qui dépasse beaucoup le cadre purement arithmétique envisagé jusqu'ici.

Il va de soi qu'une théorie générale ne peut donner tous les résultats des théories particulières qui exigent des axiomes supplémentaires. Dans notre cas une lacune essentielle par exemple provient de la difficulté de définir des "homomorphismes canoniques" aboutissant à une définition de "quotient" correspondant à la notion d'anneau quotient dans la théorie des anneaux. Il nous semble assez improbable qu'on puisse arriver à une définition féconde dans le cas général. Déjà dans le cas particulier des demi-groupes on n'a pas pu introduire une définition de demi-groupe quotient qui rende les mêmes services que la notion d'anneau quotient dans la théorie des anneaux.

1.- Définition des x-systèmes dans les demi-groupes commutatifs.

Soit D un demi-groupe commutatif noté multiplicativement ; on dit que l'on a défini sur D un système de x-idéaux ou simplement un x-système si l'on a défini une application $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_x$ de l'ensemble des parties de D en lui-même , telle que

1) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_x$
2) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}_x \to \mathfrak{a}_x \subseteq \mathfrak{b}_x$
3) $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_x \subseteq \mathfrak{b}_x \cap (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_x$

La condition 3) équivaut à la conjonction des deux axiomes suivants

3' $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_x \subseteq \mathfrak{b}_x$
3" $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_x \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_x$

Ici le produit est le produit des complexes dans D . Si D n'est pas nécessairement commutatif 1 , 2 et 3 définiront un x-système à gauche. Pour raisons de simplicité nous nous bornerons dans la suite au cas où D est commutatif. Nous appelons x-opération le passage de $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_x$ est appelé le x-idéal engendré par $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ est appelé un x-idéal si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x$. Un x-système est dit de caractère fini si le x-idéal engendré par $\mathfrak{a}$ est égal à la réunion des x-idéaux engendrés par les parties finies de $\mathfrak{a}$. Nous nommons 3" l'axiome de continuité, appellation justifiée par la suite.

Toutes les notions d'idéal mentionnées dans l'introduction satisfont aux conditions 1, 2 et 3 . Les axiomes donnés ci-dessus généralisent les axiomes de Lorenzen [4] de la façon suivante : d'abord D est chez Lorenzen un demi-groupe avec loi de simplification et un élément neutre. Puis 3' est remplacé par la condition plus forte que le x-idéal (chez lui r-idéal) engendré par un seul élément doit être constitué par tous les multiples de cet élément. Finalement l'inclusion 3" est remplacée par l'égalité. Notre généralisation est essentielle pour l'application à beaucoup d'exemples qui n'entrent pas dans le cas de Lorenzen. Ainsi les idéaux différentiels parfaits d'un anneau différentiel et les idéaux fermés d'un anneau topologique ne satisfont pas aux renforcements des axiomes 3' et 3".

De même que la notion d'espace topologique admet plusieurs définitions différentes, par opération de cloture, par les ouverts, par les fermés etc, la notion de x-système admet aussi des définitions variées. Celle qui correspond à la définition d'un espace topologique par des fermés est ici une définition des x-systèmes par la donnée d'une famille de x-idéaux. Le résiduel de $\mathfrak{a}$ par rapport à $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ signifie comme toujours l'ensemble des éléments $c \in D$ tels que $c\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

Théorème 1.

Soit D un demi-groupe commutatif et soit X une famille de sous-ensembles de D , appelés x-idéaux, qui vérifient les deux propriétés suivantes :

I X est stable par rapport à toute intersection.

II Tout résiduel d'un x-idéal est un x-idéal et chaque x-idéal est permis dans D .

Il y a correspondance biunivoque entre les x-systèmes de D et les familles X vérifiant I et II .

On démontre ce théorème en utilisant la Proposition 1 ci-dessous et en remarquant que $D \in X$ par II.

En disant qu'une famille X est U-stable si la réunion d'une sous-famille de X , totalement ordonnée par l'inclusion appartient encore à X , nous pouvons donner une caractérisation analogue des x-systèmes de caractère fini.

Théorème 2.

Il y a correspondance biunivoque entre les x-systèmes de caractère fini dans D et les familles U-stables X satisfaisant aux conditions I et II du théorème précédent.

Démonstration par le théorème de Zorn.

2.- Opérations sur les x-idéaux. Conditions équivalentes à l'axiome 3" de continuité.

Remarquons d'abord que l'axiome 3" ne change pas si l'on remplace $\mathfrak{a}$ par un sous-ensemble réduit à un seul élément.

Proposition 1.

L'axiome de continuité est équivalent à la condition que chaque résiduel $\mathfrak{a}_x : \mathfrak{b}$ (ou encore chaque résiduel $\mathfrak{a}_x : b$) d'un x-idéal est un x-idéal.

Démonstration :

Supposons $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_x \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_x$ vérifié et posons $\mathfrak{a}_x : \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Alors $\mathfrak{c}_x \mathfrak{b} \subseteq (\mathfrak{c}\mathfrak{b})_x \subseteq \mathfrak{a}_x$ donc $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_x$. Inversement soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-ensembles arbitraires de D et supposons que $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_x : \mathfrak{a}$ est un x-idéal $\mathfrak{c}_x$. Visiblement $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}_x$ donc aussi $\mathfrak{b}_x \subseteq \mathfrak{c}_x$ qui donne $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_x \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_x$.

Remarque.

Le fait que $\mathfrak{a}_x : b$ est un x-idéal signifie que l'image réciproque $f_b^{-1}(\mathfrak{a}_x)$ de $\mathfrak{a}_x$ par la translation $f_b : y \to yb$ est un x-idéal, ce qui exprime que toutes ces translations sont continues par rapport à l'opération de cloture $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_x$, ce qui justifie notre terminologie.

L'intersection d'une famille de x-idéaux est encore un x-idéal, tandis que l'union (au sens de la théorie des ensembles) et le produit (au sens de la multiplication des complexes dans D) ne sont pas en général des x-idéaux. Par la *x-union* d'une famille $\{\mathfrak{a}_x^{(i)}\}$ de x-idéaux (ou plus généralement d'une famille de sous-ensembles) de D , nous entendons le x-idéal engendré par la réunion des $\mathfrak{a}_x^{(i)}$. Cette opération est notée U_x . De même le *x-produit* de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est défini comme le x-idéal engendré par le complexe produit $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$. Cette opération est appelée *x-multiplication* et notée 0_x ou simplement $\circ$, car nous n'allons jamais considérer plusieurs x-systèmes à la fois.

Théorème 3.

En supposant que $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_x$ est une opération de fermeture, les conditions suivantes sont équivalentes.

A. *L'axiome de continuité :* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_x \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_x$

B. $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_x = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} \ (= \mathfrak{a}_x \circ \mathfrak{b}_x)$

C. *La distributivité de la x-multiplication par rapport à la x-union dans $\mathfrak{P}(D)$.*

D. $\mathfrak{a}_x : \mathfrak{b}_x = \mathfrak{a}_x : \mathfrak{b}$

E. *La loi de distributivité duale :* $\mathfrak{a}_x : \bigcup_{i \in I} {}_x\, \mathfrak{b}^{(i)} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_x : \mathfrak{b}^{(i)}$

Montrons par exemple l'équivalence de A et C . En supposant l'axiome de continuité

$$\mathfrak{a} \circ \bigcup_{i \in I} {}_x \mathfrak{b}^{(i)} = (\mathfrak{a}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{b}^{(i)})_x)_x \subseteq (\mathfrak{a} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{b}^{(i)})_x = (\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{(i)})_x \subseteq \bigcup_{i \in I} {}_x \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}^{(i)}$$

Inversement prenant $\mathfrak{b}^{(i)} = \mathfrak{b}$ pour tout i dans

$$\mathfrak{a} \circ \bigcup_{i \in I} {}_x \mathfrak{b}^{(i)} = \bigcup_{i \in I} {}_x \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}^{(i)}$$

nous aurons

$$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}_x = (\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b})_x = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_x$$

donc

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_x \subseteq (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_x$$

Puisque les lois de distributivité C et E semblent indispensables dans beaucoup de considérations de la théorie des idéaux ce théorème montre déjà qu'on ne peut pas affaiblir l'axiome de continuité.

3.- Le théorème de Krull-Stone et sa réciproque pour les x-systèmes de caractère fini.

De très nombreux résultats des théories classiques des idéaux sont susceptibles de généralisation par les x-idéaux. Traitons seulement quelques exemples. Traitons d'abord le théorème que nous nommerons théorème de Krull-Stone ; particulièrement riche en applications : le radical d'un idéal est égal à l'intersection de tous les idéaux premiers qui le contiennent. Ce résultat a été démontré d'abord par Krull [8] dans le cas des anneaux puis utilisé par Stone dans sa théorie des représentations des algèbres de Boole et par Ritt-Randenbush dans la théorie des anneaux différentiels. On démontre en général le théorème de Krull-Stone par la méthode de Krull en utilisant des ensembles multiplicativement stables. Cette méthode conduit aussi facilement au théorème de Krull-Stone pour les x-systèmes de caractère fini. L'axiome de continuité entre en jeu une seule fois pour démontrer que la condition " $\mathfrak{p}_x$ n'est pas premier" peut être exprimée uniquement en faisant intervenir les x-idéaux contenant $\mathfrak{p}_x$. La condition que x est de caractère fini est utilisée en appliquant le théorèmesde Zorn. Donnons ici une autre démonstration qui a aussi l'avantage de fournir d'autres conclusions intéressantes.

Remarquons d'abord que pour le théorème de Krull-Stone dans les anneaux on peut se borner à considérer les idéaux semi-premiers, c'est-à-dire les idéaux $\mathfrak{a}_d$ qui sont identiques à leur radical $\mathfrak{a}_d = \operatorname{rad} \mathfrak{a}_d$, $\operatorname{rad} \mathfrak{a}_d$ étant défini comme l'ensemble de tous les éléments dont une certaine puissance est dans $\mathfrak{a}_d$. En appelant <u>semi-premier</u> un x-système où chaque x-idéal est semi-premier, la proposition suivante montre que dans le cas général on peut aussi se borner à considérer des x-systèmes semi-premiers.

<u>Proposition 2.</u>

<u>Si</u> x_0 <u>est une x-opération de caractère fini</u>, $\mathfrak{a} \dashrightarrow \operatorname{rad} \mathfrak{a}_{x_0}$ <u>définit une x-opération de caractère fini qui est moins fine que</u> x_0 .

Cette proposition se démontre en utilisant la

<u>Proposition 3.</u>

<u>Si</u> x <u>est de caractère fini, le radical d'un x-idéal est encore un x-idéal</u>.

<u>Démonstration</u> :

Soit $\mathfrak{a}_x$ un x-idéal et soit $\{b_1 \dots b_n\}$ un sous-ensemble fini de $\operatorname{rad} \mathfrak{a}_x$. Il suffit de montrer que $\{b_1 \dots b_n\}_x \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{a}_x$. Si $b_i^{\sigma_i} \in \mathfrak{a}_x$ pour $i = 1 , 2 , \dots n$, nous posons $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$ et

$$(\{b_1 \dots b_n\}_x)^{\sigma} \subseteq (\{b_1 \dots b_n\}^{\sigma})_x \subseteq \mathfrak{a}_x \quad .$$

La première inclusion résulte de l'axiome de continuité et la seconde du choix de σ .

<u>Proposition 4.</u>

<u>Le x-idéal</u> $\mathfrak{a}_x$ <u>est semi-premier si et seulement si</u> $a^2 \in \mathfrak{a}_x$ <u>entraine</u> $a \in \mathfrak{a}_x$.

La condition est évidemment suffisante. Inversement supposons que $a^n \in \mathfrak{a}_x$, $n \geqslant 1$, alors $a^{2^m} = a^{2^m - n} . a^n \in \mathfrak{a}_x$ pour $2^m > n$. En appliquant la condition $m - 1$ fois nous aurons $a \in \mathfrak{a}_x$.

<u>Proposition 5.</u>

<u>Le x-idéal</u> $\mathfrak{a}_x$ <u>est semi-premier si et seulement si</u> $\mathfrak{b}_x \circ \mathfrak{c}_x \subseteq \mathfrak{a}_x$ <u>entraine toujours</u> $\mathfrak{b}_x \cap \mathfrak{c}_x \subseteq \mathfrak{a}_x$.

Soit $\mathfrak{a}_x$ semi-premier et $\mathfrak{b}_x \circ \mathfrak{c}_x \subseteq \mathfrak{a}_x$. Si $a \in \mathfrak{b}_x \cap \mathfrak{c}_x$ alors $a^2 \in \mathfrak{b}_x \circ \mathfrak{c}_x \subseteq \mathfrak{a}_x$ qui donne $a \in \mathfrak{a}_x$ d'après la Proposition 4. Inversement si $a^2 \in \mathfrak{a}_x$ nous avons $(a)_x \circ (a)_x \subseteq \mathfrak{a}_x$ donc aussi $(a)_x = (a)_x \cap (a)_x \subseteq \mathfrak{a}_x$ qui entraine $a \in \mathfrak{a}_x$.

Proposition 6.

Si x est semi-premier nous avons l'identité

$$(\mathfrak{a} \cup \{b\})_x \cap (\mathfrak{a} \cup \{c\})_x = (\mathfrak{a} \cup \{bc\})_x$$

L'inclusion $\supseteq$ est évidente. Inversement $(\mathfrak{a} \cup \{bc\})_x$ étant semi-premier et $(\mathfrak{a} \cup \{b\})_x \circ (\mathfrak{a} \cup \{c\})_x \subseteq (\mathfrak{a} \cup \{bc\})_x$, nous avons d'après la proposition 5 aussi $(\mathfrak{a} \cup \{b\})_x \cap (\mathfrak{a} \cup \{c\})_x \subseteq (\mathfrak{a} \cup \{bc\})_x$.

Le x-idéal $\mathfrak{a}_x$ est dit irréductible si $\mathfrak{a}_x$ n'est pas égal à une intersection de deux x-idéaux contenant proprement $\mathfrak{a}_x$.

Proposition 7.

Dans un x-système semi-premier, un x-idéal irréductible est premier.

Si $\mathfrak{a}_x$ n'est pas premier, il existe deux éléments a , $b \notin \mathfrak{a}_x$ tels que $ab \in \mathfrak{a}_x$. Dans ce cas $\mathfrak{a}_x$ admet, d'après la proposition 6 , la décomposition propre suivante

$$\mathfrak{a}_x = (\mathfrak{a}, ab)_x = (\mathfrak{a}, a)_x \cap (\mathfrak{a}, b)_x$$

Proposition 8.

Si x est le caractère fini, chaque x-idéal est l'intersection de tous les x-idéaux irréductibles qui le contiennent.

Démonstration par le théorème de Zorn.

La combinaison des deux propositions 7 et 8 donne déjà essentiellement le théorème de Krull-Stone pour les x-systèmes de caractère fini. Comme il est inconcevable qu'on puisse étendre par exemple une grande partie de la théorie des idéaux dans un anneau à des systèmes généralisés qui ne satisfont pas au moins aux trois premières conditions 1 , 2 et 3' la réciproque du théorème de Krull-Stone va consister à démontrer que la conjonction de 1 , 2 et 3' et la validité du théorème de Krull-Stone entrainent l'axiome de continuité. Appelons x'-système un x-système généralisé satisfaisant à 1 , 2 et 3'. Supposons que x' est un x'-système semi-premier pour lequel le théorème de Krull-Stone vaut, c'est-à-dire que chaque x'-idéal peut s'écrire comme une intersection de x'-idéaux premiers

$$\mathfrak{a}_{x'} = \bigcap_{\mathfrak{a}_{x'} \subseteq \mathfrak{p}_{x'}} \mathfrak{p}_{x'}$$

Pour un élément $b \in D$ nous avons alors

$$\mathfrak{a}_{x'} : b = \Big(\bigcap_{\mathfrak{a}_{x'} \subseteq \mathfrak{p}_{x'}} \mathfrak{p}_{x'} \Big) : b = \bigcap_{\mathfrak{a}_{x'} \subseteq \mathfrak{p}_{x'}} \mathfrak{p}_{x'} : b$$

Par suite de 3' et du fait que $\mathfrak{p}_{x'}$ est premier, $\mathfrak{p}_{x'} : b$ est égal à D ou $\mathfrak{p}_{x'}$ suivant que $b \in \mathfrak{p}_{x'}$ ou $b \notin \mathfrak{p}_{x'}$. Puisque D et $\mathfrak{p}_{x'}$ sont des x'-idéaux et qu'une intersection de x'-idéaux est encore un x'-idéal, l'axiome de continuité s'en déduit par la Proposition 1. Nous avons donc démontré le

Théorème 4.

Soit x' un x'-système semi-premier de caractère fini dans D. La condition nécessaire et suffisante pour que le théorème de Krull-Stone soit valable pour x' est que x' vérifie l'axiome de continuité, c'est-à-dire que x' soit un vrai x-système dans D.

Mentionnons aussi une caractérisation purement latticielle des x'-systèmes semi-premiers qui satisfont à l'axiome de continuité. Pour cela montrons d'abord la

Proposition 9.

Pour un x'-système semi-premier, le x'-produit de deux x'-idéaux coïncide avec leur intersection.

Notons par $\circ$ la x'-multiplication et soient $\mathfrak{a}_{x'}$ et $\mathfrak{b}_{x'}$ deux x'-idéaux. Puisque la partie "seulement si" de la Proposition 5 ne dépend pas de l'axiome de continuité et que $\mathfrak{a}_{x'} \circ \mathfrak{b}_{x'}$ est semi-premier, il s'en suit que $\mathfrak{a}_{x'} \cap \mathfrak{b}_{x'} \subseteq \mathfrak{a}_{x'} \circ \mathfrak{b}_{x'}$. L'inclusion inverse étant évidente, nous avons $\mathfrak{a}_{x'} \cap \mathfrak{b}_{x'} = \mathfrak{a}_{x'} \circ \mathfrak{b}_{x'}$. (La Proposition 9 est également indépendante de la condition que x' soit de caractère fini).

Théorème 5.

Un x'-système semi-premier est un vrai x-système si et seulement si les x'-idéaux forment un treillis distributif par rapport à l'inclusion.

Ceci est une conséquence immédiate du théorème 3 et de la Proposition 9.

4.- x-idéaux primaires.

Comme nous l'avons déjà dit, il n'est pas question ici d'exposer ou même seulement de formuler tous les résultats des théories particulières qui sont susceptibles d'une généralisation aux x-idéaux. Quand il s'agit des x-idéaux primaires de caractère fini dans les demi-groupes commutatifs arbitraires nous nous bornons à remarquer que toute la théorie de Krull [8] se laisse généraliser. En ce qui concerne les demi-groupes commutatifs satisfaisant à la condition de chaîne ascendante pour les x-idéaux, la théorie classique des anneaux Noethériens se généralise à une exception près. Il est faux que chaque x-idéal irréductible soit primaire. En effet, il existe des contre-exemples fournis par le m-système d'un treillis multiplicatif, quasi-entier fini. Dans un tel treillis multiplicatif L un m-idéal est un idéal latticiel, le demi-groupe sous-jacent étant le demi-groupe multiplicatif de L . Une condition suffisante pour que tout x-idéal irréductible de D soit primaire est donnée par l'identité

$$\mathfrak{a}_x : b = \mathfrak{a}_x : (\mathfrak{a}_x , b)_x$$

qui est par exemple satisfaite pour les idéaux dans un anneau et les idéaux d'un demi-groupe.

Mentionnons enfin que les traductions laticielles de la théorie des anneaux Noethériens (voir par exemple [9] et [5]) et la théorie des anneaux de Dedekind [10] sont englobées dans la théorie des x-idéaux par le théorème de représentation suivant.

Théorème 6.

Chaque gerbier (resp. treillis multiplicatif) qui est quasi-entier et vérifie la condition de chaîne ascendante est isomorphe au gerbier (resp. treillis multiplicatif) de tous les x-idéaux d'un certain demi-groupe D , où x peut être choisi de caractère fini.

Pour la démonstration voir une Note [11] à paraître dans les Comptes Rendus.

5.- Applications.

La théorie des x-idéaux s'applique à tous les cas particuliers mentionnés dans l'introduction et à bien d'autres. La vérification des conditions 1 , 2 et 3' est immédiate. Voir que l'axiome de continuité est vérifié est en général aussi très simple. Par exemple dans le cas des anneaux et des treillis distributifs, cet axiome résulte des lois de distributivité. Dans le cas des idéaux fermés d'un anneau topologique, il faut en plus utiliser la continuité de la multiplication. Un cas où la vérification de l'axiome de continuité est moins simple est celui des idéaux différentiels parfaits. On peut par exemple le démontrer en utilisant un lemme de Kolchin (voir [12] p. 118). Pour les idéaux différentiels les plus généraux, l'axiome de continuité n'est pas satisfait, ce qui donne la véritable raison pour laquelle on se borne en général à considérer les idéaux différentiels parfaits. Pour une énumération de quelques unes des applications du théorème 4 voir [13] .

A titre d'exemple, nous allons examiner d'un peu plus près ce que les résultats généraux précédents donnent dans le cas des treillis. Un idéal dans un treillis L (c'est-à-dire un sous-ensemble I de L tel que a , $b \in I$ entraine $a \cup b \in I$ et que $a \in I$, $c \in L$ entraine $a \cap c \in I$) est appelé <u>ℓ'-idéal</u> de L . Les ℓ'-idéaux de L définissent le ℓ'-système dans L considéré comme demi-groupe par rapport à l'intersection.

<u>Théorème 7.</u>

<u>Pour un treillis</u> L <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

A. L <u>est distributif</u>.

B. <u>Les ℓ'-idéaux de</u> L <u>forment un treillis distributif par rapport à l'inclusion</u>.

C. <u>Les ℓ'-idéaux de</u> L <u>forment un x-système dans</u> L .

D. <u>Le théorème de Krull-Stone est valable dans</u> L .

E. <u>Chaque ℓ'-idéal irréductible de</u> L <u>est premier</u>.

<u>Démonstration</u> :

Equivalence de A et B : puisque le ℓ'-système est un x-système (semi-premier) dans le cas où L est distributif et que le treillis L identifié avec l'ensemble des ℓ'-idéaux principaux de L est un sous-treillis des ℓ'-idéaux de L , il suffit d'appliquer le théorème 5 qui aussi montre l'équivalence de B et C . Le théorème 4 appliqué au ℓ'-système donne l'équivalence de C et D . Finalement l'équivalence de D et E est montrée par les Propositions 7 et 8 et le théorème 4 .

Ces caractérisations des treillis distributifs sont connues à l'exception de C . (La caractérisation D a été démontré par Hashimoto [14]). Elles apparaissent immédiatement comme conséquences de la théorie générale des x-idéaux qui semble ainsi être le cadre naturel de ces résultats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. PRUFER : Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern, J. reine u. angew. Math., 168 (1932) p. 1-36.

[2] B.L. VAN DER WAERDEN : Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz-abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen, 101 (1929) p. 293-308.

[3] J. ARNOLD : Ideale in kommutativen Halbgruppen, Rec. Math. Soc. math. Moscou, 36 (1929) p. 401-407.

[4] P. LORENZEN : Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie, Math. Zeitschr., 45 (1939) p. 533-553.

[5] L. LESIEUR : Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne, Bull. Soc. math., de France, 83 (1955) p. 161-193.

[6] V.S. KRISHNAN : Les algèbres partiellement ordonnées et leurs extension, Bull. Soc. math. de France, t. 79 (1951) p. 85-106.

[7] K.E. AUBERT : Sur une généralisation de la théorie des idéaux dans un anneau commutatif sans condition de chaîne, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236 (1953) p. 31-33.

[8] W. KRULL : Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Annalen, 101 (1929) p. 729-744.

[9] M. WARD et R.P. DILWORTH : Residuated lattices, Trans. Amer. math. Soc., 45 (1939) p. 335-354.

[10] M.L. DUBREIL-JACOTIN et P. DUBREIL : Divers types d'anneaux intervenant en Géométrie algébrique, Colloque de Géométrie algébrique, CBRM, Liège, 1949.

[11] K.E. AUBERT : Un théorème de représentation dans la théorie des idéaux, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 242 (1956)

[12] E.R. KOLCHIN : On the basis theorem for differential systems, Trans. Amer. math. Soc., Vol. 52 (1942) p. 115-127.

[13] K.E. AUBERT : Généralisation de la théorie des r-idéaux de Prüfer-Lorenzen, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 238 (1954) p. 2214-2216.

[14] J. HASHIMOTO : Ideal theory for lattices, Math. Japonica, Vol. 2 (1950-52) p. 149-186.