Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

J. Guérindon

Sur les unions sous-directes de structures

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. n° 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/56
-:-:-:-

21 novembre 1955

Exposé n° 3

SUR LES UNIONS SOUS-DIRECTES DE STRUCTURES,

par J. GUÉRINDON.

-:-:-:-:-

La notion d'union sous-directe, plus générale que celle d'union directe permet de formuler simplement un grand nombre de résultats sur les groupes, les anneaux ou les algèbres.

Elle est valable pour des structures très générales pour lesquelles on a un théorème de Birkhoff (Subdirect unions in universal algebra, Bull. Am. math. Soc., vol. 50 (1944) p. 764-768) exposé en 1 . On donnera ensuite d'après L. Fuchs (On subdirect unions, Acta Math., 1952, p. 103) une détermination de ces unions sous-directes par une classe étendue de structures usuelles (section II) et on verra une application aux groupes cycliques (section III).

L'application aux anneaux sera faite d'après Mac Coy (Subdirect sums of rings, Bull. Am. math. Soc., 1947, p. 858) et W. Krüll (Subdirekte Summen darstellungen von Integritatbereichen, Math Zeit., 52, 1950, p. 810) en (5). Les sommes directes spéciales, utiles pour l'étude des anneaux de matrices, sont définies en (5) d'après Mac Coy et Köthe.

Signalons enfin que l'on peut caractériser un certain nombre de "radicaux" usuels dans les anneaux au moyen de cette notion, comme on le verra en un exposé ultérieur.

1.- Les structures algébriques que nous considèrerons seront des ensembles munis d'opérations internes satisfaisant à certaines lois mutuelles et possédant éventuellement un domaine d'opérateurs. Les lois internes seront binaires dans la seconde partie et plus généralement n-aires (avec n fini) dans la première, consacrée au théorème de Birkhoff. Les notions de sous-algèbre et d'homomorphisme d'algèbre seront relatives à toutes les lois internes et à toutes les lois externes. Ceci permet d'identifier les images homomorphes A_i d'une algèbre fixée A et les congruences θ_i en A , c'est-à-dire les relations d'équivalences régulières pour toutes les lois (internes et externes) de A .

On désignera par $L(A)$ le treillis (avec élément nul et élément universel) des congruences θ_i en A : $L(A)$ est le <u>treillis de structure</u> de A . Une congruence sera dite <u>propre</u> si elle ne se réduit pas à l'égalité.

Etant donnée une famille non vide $A_i (i \in I)$ d'algèbres ayant mêmes lois, on appellera union directe[1] des A_i l'ensemble A^* des I-uples $\{a_i\}_{i \in I}$ ($a_i \in A_i$ pour tout i) muni du même ensemble de lois internes et externes agissant chacune composant par composant, l'égalité étant définie par celle des composants de même indice.

La définition précédente n'a de sens que si l'on définit l'identité des lois de deux A_i . On dira alors qu'elles sont de même type. Cette difficulté n'a pas lieu lorsque les A_i sont en des correspondances isomorphiques déterminées avec des sous-algèbres d'une algèbre fixée A .

Lorsqu'en plus on a $A = A^*$ et $A_i \subseteq A$ pour tout i , A est alors union directe de ses sous-algèbres A_i .

<u>Définition</u>: Une sous-algèbre B de l'union directe A des algèbres A_i est appelée <u>union-sous-directe</u> des A_i si pour tout i l'homomorphisme d'algèbre associant à tout $b \in B$ sa i-ième composante b_i est une application de B <u>sur</u> A_i .

Cette notion est due à Remak (1930) et est définie par Birkhoff (Lattice Theory, Chapitre VI) pour un nombre fini d'algèbres. <u>Les unions-sous-directes sont des algèbres quelconques</u> (à l'inverse des unions directes propres). Soit en effet B' une sous-algèbre quelconque d'une union directe d'algèbres quelconques A'_i . Soit A_i l'ensemble des éléments de A'_i intervenant en B' comme i-ième composante. A_i est une sous-algèbre de A'_i, car A_i est stable pour les lois internes et les lois externes, B' étant une sous-algèbre. Alors B' est union directe des A_i .

Soit par exemple un groupe G (abélien sans opérateurs pour simplifier) et G_i une famille non vide $(i \in I)$ de sous-groupes de G , d'intersection G' , alors G/G' est union sous-directe des groupes G/G_i . Cela résultera du lemme suivant qui donne une deuxième description de toutes les unions sous-directes ne faisant pas intervenir cette fois les composantes :

<u>Lemme 1</u> : <u>Il y a correspondance biunivoque entre les unions sous-directes représentant l'algèbre donnée</u> A <u>et les ensembles (non vides) de congruences en</u> A <u>dont l'intersection est nulle.</u>[2]

---

[1] C'est la notion de produit direct de structures au sens de Bourbaki mais pour des opérations pas nécessairement binaires. De plus n n'est pas nécessairement borné.

[2] C'est-à-dire coïncide avec l'égalité dans A .

En effet si A est une union sous-directe des A_i , soit θ_i la congruence $a \equiv a' \iff a_i = a'_i$. On a alors évidemment $\wedge \theta_i = 0$, d'après la définition de l'égalité dans une union directe.

Inversement soit $\{\theta_i\}_{i \in I}$ un ensemble non vide de congruences, a_i la classe de tout $a \in A$ modulo θ_i et A_i l'algèbre A/θ_i . Alors l'homomorphisme $a \to \{a_i\}_{i \in I}$ de A dans l'union directe A^* des A_i est un isomorphisme de A sur une sous-algèbre A' de A^* si et seulement si on a $\wedge \theta_i = 0$ ce que précisément nous supposons.

Alors A est union sous-directe des A_i , tout élément α_i de chaque A_i étant composant d'un a particulier.

Corollaire : Si A est union sous-directe des A_i , l'application $a \to \{a_i\}_{i \in I}$ est un isomorphisme.

Lemme 2 : Etant donnée une algèbre A il y a équivalence entre

a) A n'est pas somme sous-directe de plus d'une sous-algèbre.
b) l'intersection des congruences propres en A est propre.
c) les éléments non nuls de $L(A)$ contiennent tous un même point P fixe.

L'équivalence résulte de ce qui précède et conduit à la

Définition : Une algèbre A est sous-directement irréductible si elle satisfait aux conditions a) b) c) .

Lorsque $L(A)$ satisfait à la condition minimale pour l'inclusion cette condition équivaut à la condition suivante, plus faible dans le cas général :

Définition : Une algèbre est dite faiblement irréductible si l'intersection de deux congruences propres est propre.

Théorème 1 : Si $L(A)$ satisfait à la condition maximale pour l'inclusion, A est isomorphe à l'union sous-directe d'un nombre fini d'algèbres faiblement irréductibles.

La démonstration est la généralisation du raisonnement d'E. Noether sur la décomposition d'un idéal comme intersection d'un nombre fini d'idéaux irréductibles.

On n'a pas supposé dans ce qui précède que les opérations soient n-aires avec n fini. On le supposera au contraire dans le théorème suivant de Birkhoff, qui ne fait intervenir aucune condition de chaine sur $L(A)$:

Théorème 2 : Une algèbre A dont chaque opération interne porte sur un nombre fini d'éléments est isomorphe avec une union sous-directe finie ou non d'algèbres sous-directement irréductibles.

Soient $a \neq b$ $(a, b \in A)$ et soit $S(a, b)$ l'ensemble des congruences θ telles que $a \not\equiv b \pmod{\theta}$. On a $0 \in S(a, b)$ qui n'est donc pas vide. Soient T un sous-ensemble non vide de $S(a, b)$ totalement ordonné pour l'inclusion des congruences. L'union t de T en $L(A)$, définie par

$$x \equiv y \pmod{t} \iff x \equiv y \mod \theta \quad \text{pour quelque } \theta \in T ,$$

existe, car t est une congruence (évident pour un opérateur externe et conséquence des hypothèses de finitude et d'ordre total pour une opération interne). On a de plus $a \not\equiv b \mod t$ donc $t \in S(a, b)$ qui est donc inductif. Le théorème de Zorn s'applique.

Soit $\theta_{a,b}$ un élément maximal de $S_{a,b}$ et $H_{a,b}$ le quotient $A/\theta_{a,b}$. Les congruences propres $\bar{\theta}_i$ de $H_{a,b}$ correspondent biunivoquement aux congruences θ'_i de $L(A)$ strictement supérieures à $\theta_{a,b}$. L'intersection $\bar{\bar{\theta}} = \bigcap_i \bar{\theta}_i$ n'est pas nulle car on a $a \not\equiv b \mod \theta_{a,b}$ en A et d'après la maximalité $a \equiv b \mod \theta'_i$ pour tout i. Donc $\theta^* = \bigcap_i \theta'_i$ n'est pas l'égalité et $H_{a,b}$ est sous-directement irréductible d'après le lemme 2 .

L'intersection de tous les $\theta_{a,b}$ existe en $L(A)$ et coïncide avec l'égalité. Le théorème résulte alors du lemme 1, A est isomorphe à une union sous-directe A^* des $H_{a,b}$ précédents. L'élément le plus général de A^* s'obtient alors ~~en~~ associant des classes modulo les $\theta_{a,b}$ ayant un élément commun (et donc un seul).

2.- 1°) Dans le cas général le lemme 1 donne une construction des représentations de A comme somme sous-directe de A_i qui utilise une construction sur A lui-même, plus exactement sur $L(A)$: on cherche une intersection nulle en $L(A)$. Le problème posé par L. Fuchs est de trouver une condition ne faisant intervenir que les A_i eux-mêmes (3) .

La solution de Fuchs comprend le cas de deux composants et est complète pour les trois structures suivantes :

I groupes à opérateurs

II anneaux ou algèbres sur des corps arbitraires

III Algèbres de Boole.

2°) Le W-homomorphisme de Wedderburn.

On va généraliser une notion introduite par Wedderburn dans le cas des groupes au cas des structures quelconques de même type c'est-à-dire ayant

---

(3) Ce problème est du type du problème de Schreier : Construire un groupe G ayant un sous-groupe normal N donné, le quotient étant un groupe donné.

les mêmes lois internes et externes satisfaisant aux mêmes relations. La correspondance entre les lois des deux structures de même type sera supposée fixée.

Définition : Si deux structures A et B de même type peuvent être appliquées par un homomorphisme (respectant les opérateurs externes) sur une même structure F du même type, on dira que A et B sont W-homomorphiques relativement à F , et on écrira

$$A \overset{F}{\frown} B \ .$$

Par exemple $A \overset{B}{\frown} B$ équivaut à l'homomorphisme $A \succsim B$.

Cette notion va conduire à une classe étendue d'unions sous-directes qui sera la plus générale dans les trois cas I , II , III précédents. On a le :

Théorème 3 : Soient A et B deux structures du même type et W isomorphes par rapport à F . L'ensemble C des couples (a , b), a et b étant des éléments appliquées sur le même élément de F ; est une union sous-directe de A et B .

On vérifie aisément que l'égalité peut être définie par égalité des composants, que tout élément de A ou B est utilisé et que C peut être muni d'une structure du même type que A et B . L'opération inverse peut faire partie de l'ensemble des opérations externes, tout ceci comprend donc le cas des groupes. Lorsque F est la structure réduite à un élément nul (neutre pour toute opération) on est conduit à la somme directe $A \dot{+} B$. Lorsque F est isomorphe à B par exemple on trouve une structure isomorphe à A .

Théorème 4 : Soit G une union sous-directe de structures A et B de type I , II ou III (ou plus généralement satisfaisant au lemme 3). Il existe alors une structure F du même type, telle que $A \overset{F}{\frown} B$ et que G soit l'ensemble des couples (a , b) , $a \in A$, $b \in B$ ayant les mêmes images dans les homomorphismes $A \succsim F$, $B \succsim F$.

Soit les congruendes suivantes en A et B : a , $a' \in A$,
$a \equiv a' \pmod{\alpha} \Longleftrightarrow \exists\, b \in B$ avec $(a , b) \in G$, $(a' , b) \in G$, β étant définie de manière analogue. α et β sont symétriques et aussi réflexives d'après la définition d'une somme sous-directe. La transitivité résulte du :

Lemme 3 : Des éléments congrus modulo α en A sont couplés par G avec les mêmes éléments (même énoncé avec β). Il faut montrer dans les cas I , II et III (et supposer dans le cas général) que $(a , b) \in G$, $a' \equiv a \ (\alpha)$ entraine $(a', b) \in G$.

Pour les groupes généraux dont l'opération interne est notée multiplicativement on a, notant par b' un élément associé à a et a' par α :

$(a', b) = (a, b) . (a, b')^{-1} . (a', b') \in G$, ce qui comprend le cas I et le cas II (la loi . y est l'addition).

Pour un treillis distributif relativement complémenté avec élément nul 0 et élément universel 1 , désignons par $\bar{x}$ le complément (relativement à 0 et 1) de tout x . Alors on a :

$[(a, b) \cap (\overline{a, b'})] \cup (a', b') = ((a \cap \bar{a}) \cup a', (b \cap \bar{b}') \cup b') = (a', b \cup b')$ donc $(a', b \cup b') \in G$. Par dualité $(a', b \cap b') \in G$ et (a', b) est le complément en G de (a', b') relativement aux éléments $(a', b \cap b')$ et $(a', b \cup b')$.

La relation α (resp. β) est donc transitive. Elle est évidemment régulière pour les lois internes et externes de A et définit donc un homomorphisme $a \to [a]$ de A sur une sous-structure stable A_α (resp. $b \to [b]$, de B avec B_β). Le lemme permet d'identifier $[a]$ et $[b]$ par la condition :

$$[a] \leftrightarrow [b] \Longleftrightarrow (a, b) \in G .$$

En désignant par F l'ensemble des éléments ainsi identifiés muni d'une structure induite indifféramment de celle de A ou B on est conduit au théorème 4 .

On remarque que dans les trois cas I , II et III les homomorphismes sont toujours déterminés par la classe de l'élément zéro (A_0 , B_0 pour A et B). Alors $F \simeq A/A_0$ et $F \simeq B/B_0$. Alors on peut choisir A_0 et B_0 sous-structures stables quelconques de A et B telles que pour un isomorphisme fixé on ait $A/A_0 \simeq B/B_0$. Une somme sous-directe sera l'ensemble des couples (a, b) pour lesquels a et b ont des résidus en correspondance dans cet isomorphisme.

<u>Théorème 5</u> : on a $G/(A_0 \dotplus B_0) \simeq A/A_0$ et $G/(A_0 \dotplus B_0) \simeq B/B_0$, G étant une somme sous-directe des structures du type I , II ou III , les noyaux étant A_0 et B_0 , $A_0 \dotplus B_0$ leur somme directe.

On démontrera seulement le premier isomorphisme et d'abord on remarque que $A_0 \dotplus B_0 \subsetneq G$ car $a_0 \in A_0$, $b_0 \in B_0$ sont envoyés sur zéro en A/A_0 et B/B_0 et donc $(a_0, b_0) \in G$ et on a même $a_0 \in A_0$, $(a_0, b'_0) \in G \Rightarrow b'_0 \in B_0$. Alors l'application $(a, b) \to [a] \in A/A_0$ est un homomorphisme de G <u>sur</u> A/A_0 dont le noyau sera l'ensemble des (a, b) tels que $[a] \in A_0$ c'est-à-dire $A_0 \dotplus B_0$ d'après la ~~remarque~~ précédente.

Enfin dans le cas général on peut avoir des sommes sous-directes de l'espèce précédente dont les noyaux soient les mêmes mais non isomorphes entre elles (Fuchs, loc. cit. paragraphe 9).

3.- Sommes de groupes cycliques.

On connait le théorème de Baer[4] sur les groupes sans torsion : Un groupe abélien sans torsion de rang fini n est somme sous-directe de n groupes abéliens sans torsion de rang un, chacun étant isomorphe à un sous-groupe des rationnels. L. Fuchs donne, comme conséquence du théorème 4, les sommes sous-directes de deux groupes, tous deux p-groupes cycliques ou tous deux de type (p^{∞}) par les deux théorèmes :

Théorème 6 : Une somme sous-directe de groupes cycliques A d'ordre p^m, B d'ordre p^n $(m \geqslant n)$ est isomorphe à la somme directe $A \dot{+} B_0$, B_0 étant un sous-groupe de B.

On remarque que deux groupes cycliques additifs d'ordre p^m et q^m (p et q nombres premiers différents) ne sont W-homomorphes qu'au sous-groupe zéro et n'ont pas de somme sous-directe non triviale. Lorsque $p = q$, les noyaux A_0 et B_0 serait d'ordre $m-k$ et $n-k$ $(0 \leq k \leq n)$. Soit a' un générateur de A et b' un élément associé en B à a' dans la somme sous-directe cherchée Γ. Alors $\alpha = (a', b')$ engendre en Γ un sous-groupe cyclique $\Gamma' \simeq A$. Les éléments de Γ de première composante nulle forment un sous-groupe Γ'' de Γ.

On a $\Gamma' \cap \Gamma'' = \{0, 0\}$ car si $(ra', rb') \in \Gamma' \cap \Gamma''$ on a $ra' = 0$ $r \not\equiv 0 \pmod{p^m}$ et donc mod p^n donc $rb' = 0$ aussi. Ecrivant tout (a, b) de Γ. $(ra', b) = (ra', rb') + (0, b - rb')$ avec $(ra', rb') \in \Gamma'$ et $(0, b - rb') \in \Gamma''$, Γ est somme directe de Γ' et Γ''. On remarque enfin que $\Gamma'' \simeq B_0$ noyau de l'homomorphisme relatif à B, d'où le théorème 6 et plus généralement, par un procédé analogue :

Théorème 7 : Toute somme sous-directe d'un groupe abélien cyclique infini A et d'un groupe abélien quelconque B est isomorphe à la somme directe de A et d'un sous-groupe de B.

Lorsque A et B sont du type de Prüfer, pour le même nombre premier p, on obtient le résultat analogue :

---

(4) Abelians groups without element of finite order (Duke Journal, 3 (1937) p. 68-122.) Le rang d'un groupe abélien sans torsion est son rang comme module sur les entiers relatifs (Cf. Kaplausky, Infinite abelian groups. Michigan Press 1954).

<u>Théorème 8 : Une somme sous-directe des groupes de type</u> p^{∞} A <u>et</u> B <u>avec les noyaux</u> A_0 <u>et</u> B_0 <u>d'ordre</u> p^m <u>et</u> ρ^n $(m \ngtr n)$ <u>est isomorphe à la somme directe de</u> A <u>avec</u> B_0 .

<u>Remarque</u> : Les sommes sous-directes obtenues jusqu'ici sont directement décomposables, un groupe abélien ayant un nombre fini de générateurs étant somme directe d'un nombre fini de ses sous-groupes cycliques. L. Fuchs donne un exemple (non abélien) où il n'en est pas ainsi.

4.- Application aux anneaux.

Dans le cas des anneaux, le théorème de Birkhoff prend la forme suivante:

<u>Théorème 9 : Un anneau</u> R <u>est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux</u> S_i <u>si et seulement si il existe en</u> R <u>des idéaux bilatères</u> A_i <u>d'intersection nulle tels que pour tout</u> i <u>on ait</u> $R/A_i \simeq S_i$,

On a aussi le :

<u>Théorème 10 : Un anneau</u> R <u>est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux</u> S_i <u>si et seulement si, pour chaque</u> i , <u>il existe un homomorphisme</u> h_i <u>de</u> R <u>sur</u> S_i <u>tel que, si</u> r <u>est un élément non nul de</u> R , <u>on ait</u> $h_i(r) \neq 0$ <u>pour au moins un</u> i .

En effet si R est somme sous-directe des S_i , soit h_i l'homomorphisme naturel de R sur S_i . R est isomorphe à un sous-anneau de la somme directe et comme dans un isomorphisme les zéros se correspondent on a $h_i(r) \neq 0$ pour un i dès que $r \neq 0$. Réciproquement si la condition de l'énoncé est réalisée, la correspondance : $r \Longleftrightarrow (h_1(r)\ ,\ h_2(r)\ ,\ \dots)$ est un isomorphisme de R avec une somme sous-directe des S_i .

Lorsque l'un des h_i est un isomorphisme la représentation de S comme somme sous-directe des S_i sera dite "triviale".

On sait(5) qu'en un anneau commutatif, avec élément unité, R le nil-radical ρ est l'intersection des idéaux premiers et le radical de Jacobson J $(J \supseteq \rho)$ est celle des idéaux maximaux. Le théorème 9 entraîne donc les deux théorèmes :

<u>Théorème 11 · Un anneau commutatif à élément unité</u> A <u>est somme sous-directe de domaines d'intégrité si et seulement si on a</u> $\rho = (0)$ <u>et</u> A <u>est somme sous-directe de corps commutatifs si et seulement si on a</u> $J = (0)$.

---

(5) Voir par exemple le Séminaire d'algèbre 1954-55 exposé n° 2, section 3 .

Les anneaux sous-directement irréductibles sont caractérisés par le

Théorème 12 : Un anneau R n'est pas somme sous-directe non triviale d'anneaux S_i si et seulement si les idéaux bilatères non triviaux de R ont un élément minimum.

Les corps commutatifs sont facilement caractérisés par la condition suivante : Un anneau commutatif A est un corps si et seulement s'il a plus d'un élément, n'a aucun élément nilpotent et est sous-directement irréductible.

Pour la réciproque on applique le théorème 9 . Si $j \neq (0)$ est contenu dans l'idéal non nul minimum I de A , l'idéal Aj^2 contient $j^3 \neq 0$ donc $Aj^2 \supseteq I$ et on a $j = xj^2$. Posant $xj = e$ on a alors :

$$e^2 = x^2 j^2 = x(xj^2) = xj = e$$

et comme $ej = j \neq 0$ on a $e \neq 0$. Tout idéal contenant j contient e qui appartient donc à I . Alors l'idéal $U = \{t - te \,,\, t \in A\}$ est nul sinon $e = t_1 - t_1 e$ $(t_1 \in R)$ et $e^2 = e = t_1 e - t_1 e^2 = 0$, donc e est unité de A qui est donc égal à I . A est un corps.

Notons que la représentation d'un anneau comme somme sous-directe n'est pas unique (par exemple l'anneau Z des entiers est somme sous-directe des domaines Z/Zp ou bien des anneaux $Z/Z\,p^2$, p premier). On a par ailleurs la condition suivante pour qu'une somme sous-directe finie coïncide avec la somme directe (finie) :

Théorème 13 : Soit R une somme sous-directe d'un nombre fini d'anneaux R_i , tels que pour tout i $R_i^2 = R_i$ et satisfaisant au théorème de Krull pour ses idéaux[6] , R est la somme directe des R_i si et seulement si deux idéaux maximaux différents de R ont des intersections différentes avec R .

On obtient aussi une caractérisation des p-anneaux R (p premier) c'est-à-dire tels que pour tout $x \in R$ on ait

$$x^p = x \qquad px = 0 \quad ,$$

qui généralisera le résultat de Stone suivant lequel tout anneau de Boole est somme sous-directe de corps à deux éléments.

---

(6) C'est-à-dire que tout idéal bilatère est contenu en un idéal bilatère maximal, par exemple parce que R a un élément unité. Démonstration en Nagata (Note on subdirect sums of rings, Nagoya Math. Journal, Vol. 2, 1951, p. 50)

On démontre que R <u>est nécessairement commutatif</u>[7] et on a le :

<u>Théorème 14</u> : <u>Les p-anneaux non réduits à</u> 0 <u>sont les sommes sous-directes de corps commutatifs à</u> p <u>éléments</u>.

On montre qu'un p-anneau sous-directement irréductible et non réduit à zéro est un corps, puis on applique le théorème de Birkhoff. Il suffit donc de montrer qu'un tel p-anneau n'a pas d'élément nilpotent. En effet si $x^{\alpha}=0$ pour $x \neq 0$, α minimum, $\alpha > 0$, si $p \geqslant \alpha$ on a $x = x^p = x^{\alpha} x^{p-\alpha} = 0$ et si $\alpha > p$ on a $\alpha = pq + r$ $(r < p)$ donc $x^{\alpha} = x^{q+r}$ mais $q + r < \alpha$ d'où contradiction. Ce corps est fini puisque ses éléments sont solutions de $x^p - x = 0$ sur lui-même.

5.- <u>Sommes sous-directes spéciales</u>.

On appelle <u>somme sous-directe spéciale</u> des S_i toute somme sous-directe qui contient tous les éléments de la somme directe dont les composants sont tous nuls sauf un (Köthe). Lorsque les S_i sont en nombre fini on retrouve uniquement la somme directe.

Köthe et Mac Coy obtiennent alors pour une classe étendue d'anneaux R la condition pour que R soit somme sous-directe spéciale d'idéaux bilatères fixés au moyen du

<u>Théorème 15</u> : <u>Soit</u> R <u>un anneau tel que</u> $[(0)^{\cdot}.R] \cap [(0).^{\cdot}R] = (0)$ <u>et</u> $\{A_i\}_{i \in I}$ <u>un ensemble non vide d'idéaux bilatères en</u> R . <u>Alors</u> R <u>est isomorphe à une somme sous-directe spéciale des</u> A_i <u>si et seulement si on a</u> :

a) $A_i \cap A_j = (0)$ <u>pour tous</u> i <u>et</u> j <u>différents</u>,

b) <u>Pour tout</u> i <u>il existe un idéal bilatère (unique)</u> B_i <u>tel que</u> R <u>soit somme directe de</u> A_i et B_i .

c) <u>On a</u> $\bigcap_i B_i = (0)$.

En effet, pour la proposition directe, on prendra pour B_i l'idéal bilatère formé des éléments ayant 0 comme i-ème composante.

Pour la réciproque pour tout $x \in R$ et tout i on a d'une manière unique : $x = \alpha_i + \beta_i$ $(\alpha_i \in A_i , \beta_i \in B_i)$ et un homomorphisme h_i : $a \to a_i$ de R <u>sur</u> A_i . Si $a \neq 0$ on a d'après c) $h_i(a) = a_i \neq 0$ pour un i et la correspondance $(a , \{h_i(a)\}_{i \in I})$ est un isomorphisme de R avec une somme sous-directe des A_i .

---

(7) Mac Coy - Rings and Ideals - Carus Marographs 1948 - th 43 - Généralisation en : Jacobson - Theory of rings et Annals of Math., 1945, p. 695.

Pour montrer que la somme est spéciale on établira le :

Lemme 4 : *Si* $(0 \cdot . R) \cap (0 . \cdot R) = 0$ *et* R *est somme directe d'idéaux bilatères* U_1 , V_1 *et aussi de* U_2 *et* V_2 *avec* $U_1 \cap U_2 = (0)$, *alors* $U_1 \subseteq V_2$.

En effet tout $u_1 \in U_1$ s'écrit de manière unique

$u_1 = u_2 + v_2$ $(u_2 \in U_2 \ , v_2 \in V_2)$ et pour tout $x \in V_2$ on a $x\, u_1 \in U_1 \cap U_2$ donc $x\, u_1 = 0$. De plus $xv_2 \in U_2 \cap V_2 = (0)$, donc $xu_2 = 0$ et finalement $U_2\, u_2 = (0)$ et donc $R\, u_2 = (0)$. On en déduit par analogie $u_2\, R = (0)$ et on a $u_2 = 0$ et $u_1 = v_2$, $u_1 \in V_2$ donc $U_1 \subseteq V_1$.

On déduit du lemme et de la condition a) que $A_i \subseteq B_j$ $\forall$ i et j différents et donc que $c \in A_i$ donne $h_i(c) = c$ et $h_j(c) = 0$ pour $j \neq i$ d'où le théorème. On va en déduire aussi le :

Théorème 16 : *Pourqu'un anneau* R *soit isomorphe à une somme sous-directe spéciale d'anneaux simples avec élément unité, il faut et il suffit que tout idéal bilatère non nul de* R *contienne un idéal simple avec élément unité*(8).

On remarque d'abord que si un idéal bilatère A a un élément unité e , on a partout $y \in A$ $ey = eye = ye$ et $B = \{x - ex\}_{x \in R}$ est un idéal bilatère (ensemble des annulateurs de e) tel que R soit somme directe de A et B On en déduit qu'un idéal simple I de R avec élément unité e est un anneau simple car on a $I \supseteq Ie \neq (0)$ donc $I = Ie$ ou eI , et comme aucun élément $\neq 0$ de I n'annule e (car $I \cap B = 0$, si on prend $A = I$) les idéaux de l'anneau I sont des idéaux de R .

La condition est suffisante : Si $aR = Ra = (0)$; (a) ne peut contenir aucun idéal simple avec élément unité donc $a = 0$. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ les idéaux bilatères simples avec les éléments unités respectifs e_i désignant par B_i les idéaux $\{x \in R \ , xe_i = e_i x = 0\}$. On a montré que R est somme directe de A_i et B_i pour tout i . Mais on a $A_i \cap A_j \subset A_i$ donc $A_i \cap A_j = (0)$ si $i \neq j$ et enfin $\bigcap_{i \in I} B_i = (0)$ sinon on aurait $\cap B_i \supseteq A_{i_0}$ pour $i_0 \in I$ et $e_{i_0} \in \cap B_i \subsetneq B_{i_0}$, et alors $e_{i_0}(\bigcap_i B_i) = 0$ donc $e_{i_0}^2 = e_{i_0} = 0$ et $A_{i_0} = (0)$ ce qui n'est pas. D'après le théorème 14 , R est isomorphe à une somme sous-directe spéciale des anneaux simples avec éléments unités A_i .

La condition est nécessaire : Si R est somme sous-directe spéciale d'anneaux S_i , simples avec éléments unités et si B désigne un idéal bilatère non nul de R , soit $b \in B$. On a $b = \{b_i\}_{i \in I}$ $(b_i \in S_i)$ et dès que $b \neq 0$,

(8) Un anneau simple est un anneau sans idéal bilatère propre. Un idéal est simple s'il est minimal dans l'ensemble des idéaux bilatères propres. Pour le cas commutatif cf. J. Guérindon (Compte Rendus, t. 239, p. 145-147, 12 juillet 1954, et Conférence au Séminaire du 10 mai 1954).

b_1 par exemple est non nul.

Alors B contient

$$(b_1 , b_2 , \ldots) (1 , 0 , 0 , \ldots) = (b_1 , 0 , 0 , \ldots)$$

et donc l'idéal bilatère I engendré par $(b_1 , 0 , 0 , \ldots)$. S_1 étant simple, I est l'ensemble des $(x , 0 , 0 , \ldots)$ avec $x \in S_1$ et répond, avec ses analogues pour tout i , aux conditions de l'énoncé.

Les raisonnements précédents permettent d'établir le résultat suivant :

Définition : Un idéal bilatère I d'un anneau quelconque R est dit *complètement réductible* s'il ne contient aucun nil-idéal non nul de R et si tout sous-ensemble non vide d'idéaux à droite de R contenus en I admet un élément minimal. On a alors le :

Théorème 17 : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau soit isomorphe à une somme sous-directe spéciale d'anneaux simples, dont chacun est isomorphe à un anneau complet de matrices sur un anneau de division, est que tout idéal bilatère non nul de* R *contienne un idéal bilatère non nul complètement réductible*[9]

---

[9] On trouvera d'autres applications (aux composants sous-directs d'un idéal par exemple) en Krull, Math. Zeit., 52, 1949-50, p. 810 : Subdireckte Summendarstellung.