J. Petresco

Systèmes minimaux de relations fondamentales dans les groupes de rang fini

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. n° 1, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT

(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1955/56

-:-:-:-

7 novembre 1955

Exposé n° 1

SYSTÈMES MINIMAUX DE RELATIONS FONDAMENTALES DANS LES GROUPES DE RANG FINI,

par J. PETRESCO.

-:-:-:-

Deux groupes étant définis par deux systèmes de générateurs et deux systèmes de relations fondamentales, le problème se pose de reconnaître s'ils sont isomorphes ou non · c'est ce que Kurosch [4] appelle <u>le problème de l'isomorphie</u>. Il s'agit en fait de développer une théorie des relations fondamentales, autrement dit une théorie des systèmes d'équations en une seule opération. Les résultats connus dans cette direction se réduisent à un théorème de Lévi [1] et à un théorème réciproque de Magnus [3] , traitant de <u>groupes libres</u> et de systèmes <u>minimaux</u> de relations fondamentales. Nous nous proposons de généraliser la relation de Lévi-Magnus, aux groupes quelconques de rang fini.

1.- Construction des suites de générateurs.

Considérons un groupe G de <u>rang fini</u>, c'est-à-dire un groupe admettant une suite finie $\bar{A} = \{\bar{a}_1 , \dots , \bar{a}_n\}$ de générateurs. Soit d'autre part F , le groupe libre engendré par n éléments et notons $A = \{a_1 , \dots , a_n\}$ la suite de ses générateurs. D'après le théorème de Dyck, il existe un sous-groupe normal N de F tel que G soit isomorphe à F/N ; c'est l'ensemble des éléments de F qui correspondent à l'unité $\bar{1} \in G$ dans l'homomorphisme de G sur F établi par l'application $\bar{a}_i \to a_i$, $1 \leq i \leq n$. Pratiquons l'identification $G = F/N$, en posant $\bar{a}_i = a_i N$, et si $a \in F$, notons $\bar{a}$ la classe $aN \in G$.

1.1.- <u>Si</u> $\bar{X} = \{\bar{x}_1 , \dots , \bar{x}_m\}$ <u>est une m-suite de générateurs de</u> G , <u>et</u> $X = \{x_1 , \dots , x_m\}$ <u>une m-suite de représentants</u> $x_j \in \bar{x}_j$, $1 \leq j \leq m$, <u>il existe une n-suite</u> $\{\alpha_1 , \dots , \alpha_n\}$ <u>d'éléments de</u> N , <u>telle que</u>

$$F = [X , \alpha_1 , \dots , \alpha_n].$$

Si $G = [\bar{X}]$, $\bar{a}_i \in G$ entraîne

$$a_i N = \bar{a}_i = f(\bar{x}_j) = f(x_j N) = f(x_j) N , \quad 1 \leq i \leq n ,$$

où $f(\bar{x}_j)$ est un produit d'éléments de la forme $x_j^{\pm 1}$ de sorte que

$$a_i = f(x_j).\alpha_i \ , \ \alpha_i \in N \ ,$$

et en définitive $F = [a_1 , \dots , a_u] = [x_1 , \dots , x_m , \alpha_1 , \dots , \alpha_n]$.

Si $V = \{v_1 , \dots , v_m\}$ est une m-suite de variables $v_j \in G$, considérons la m-suite $\varphi V = \{\varphi v_1 , \dots , \varphi v_m\}$, définie par :

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi v_j = v_j \quad ; \ j \neq j_0 \\ \varphi v_{j_0} = S_1(v_j) \ . \ v_{j_0}^{\varepsilon} \ . \ S_2(v_j) \ , \ \varepsilon = \pm 1 \end{cases}$$

où $S_1(v_j)$ et $S_2(v_j)$ sont deux produits d'éléments de la forme $v_j^{\pm 1}$ avec $j \neq j_0$. On a évidemment

$$(2) \qquad [V] = [\varphi V]$$

car

$$(3) \qquad v_{j_0} = [S_1^{-1}(v_j) . \varphi v_{j_0} . S_2^{-1}(v_j)]^{\varepsilon} = P_1(v_j).(\varphi v_{j_0})^{\varepsilon}. P_2(v_j) = \\ = P_1(\varphi v_j).(\varphi v_{j_0})^{\varepsilon}. P_2(\varphi v_j)$$

où $P_1(v_j)$ et $P_2(v_j)$ sont également des produits d'éléments de la forme $v_j^{\pm 1}$ avec $j \neq j_0$.

Soit maintenant $\mathfrak{X}_m(G)$ l'ensemble des m-suites $\bar{X}$ de <u>générateurs</u> de G . A chaque $\bar{X}$ on peut faire correspondre la m-suite $\varphi\bar{X}$, qui s'obtient à partir de φV en remplaçant v_j par $\bar{x}_j$, pour tout j ; d'après (2) , $\varphi\bar{X}$ est également une m-suite de générateurs de G . La correspondance $\bar{X} \to \varphi\bar{X}$, détermine donc une application φ de $\mathfrak{X}_m(G)$ dans lui-même, que nous appelons <u>transformation simple</u>. (3) implique qu'il s'agit en fait de transformations de $\mathfrak{X}_m(G)$ <u>sur lui-même</u> et que <u>l'inverse d'une transformation simple est une transformation simple</u>. En définitive, l'ensemble $\mathfrak{N}_m(G)$ des produits ψ de transformations simples φ <u>est un groupe</u> que nous appelons <u>groupe de Nielsen</u> d'ordre m attaché à G .

Nous avons démontré dans un exposé précédent [5] que, <u>dans le cas où</u> G <u>est un groupe libre</u>, $\mathfrak{N}_m(G)$ <u>est transitif sur</u> $\mathfrak{X}_m(G)$.

Dans le cas d'un groupe quelconque G de rang fini, considérons l'ensemble $\mathfrak{X}^1_{m+n}(G)$ des (m + n)-suites de la forme

$$\bar{X}^1 = \{\bar{X} , \underbrace{\bar{1} , \dots , \bar{1}}_{n}\}$$

où $\bar{X}$ est une m-suite de générateurs de G .

1.2.- <u>Le groupe de Nielsen</u> $\mathcal{N}_{m+n}(G)$ <u>est transitif sur</u> $\mathcal{N}^1_{m+n}(G)$.

Considérons deux (m + n)-suites de $\mathcal{N}^1_{m+n}(G)$, soit

$$\bar{X}^1 = \{\bar{X} , \underbrace{\bar{1} , \dots , \bar{1}}_{n}\} , \bar{Y}^1 = \{\bar{Y} , \underbrace{\bar{1} , \dots , \bar{1}}_{n}\}$$

avec $\bar{X} , \bar{Y} \in \mathcal{X}_m(G)$. Si X et Y sont deux m-suites (d'éléments de F) composées avec des représentants $x_j \in \bar{x}_j$ et $y_j \in \bar{y}_j$ des classes appartenant à $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ respectivement, on peut, d'après 1.1, déterminer $\alpha_i \in N$ et $\beta_i \in N$ $(1 \leq i \leq n)$, tels que

$$F = [X , \alpha_1 , \dots , \alpha_n] = [Y , \beta_1 , \dots , \beta_n] .$$

Le groupe de Nielsen $\mathcal{N}_{m+n}(F)$ étant transitif sur l'ensemble $\mathcal{X}_{m+n}(F)$ des (m + n)-suites de générateurs de F , il existe donc une transformation $\psi \in \mathcal{N}_{m+n}(F)$ telle que

$$(4) \qquad \psi \{X , \alpha_1 , \dots , \alpha_n\} = \{Y , \beta_1 , \dots , \beta_n\} .$$

Si maintenant φ est une transformation simple $\in \mathcal{N}_{m+n}(F)$, c'est-à-dire une transformation de $\mathcal{X}_{m+n}(F)$ définie par (1) , où les variables $v_j \in F$ et $1 \leq j \leq m + n$, considérons la transformation $\bar{\varphi}$ de $\mathcal{X}_{m+n}(G)$, définie par (1) où l'on a remplacé v_j par $\bar{v}_j \in G$ et qui est évidemment une transformation simple $\in \mathcal{N}_{m+u}(G)$. On a

$$\bar{\varphi}\, \bar{v}_j = \bar{v}_j = \overline{\varphi v_j} \quad , \quad j \neq j_0$$

$$\bar{\varphi}\, \bar{v}_{j_0} = S_1(\bar{v}_j) . \bar{v}_{j_0}^{\varepsilon} . S_2(\bar{v}_j) = \overline{S_1(v_j) . v_{j_0}^{\varepsilon} . S_2(v_j)} = \overline{\varphi v_{j_0}}$$

c'est-à-dire, pour tout j ,

$$(5') \qquad \bar{\varphi}\bar{v}_j = \overline{\varphi v_j} .$$

Plus généralement, on peut attacher à chaque $\psi = \varphi_r \dots \varphi_1 \in \mathcal{N}_{m+n}(F)$, la transformation $\bar{\psi} = \bar{\varphi}_r \dots \bar{\varphi}_1 \in \mathcal{N}_{m+u}(G)$ et l'on a d'après (5') ,

$$(5) \quad \bar{\psi}\bar{v}_j = \bar{\varphi}_r \dots \bar{\varphi}_1\, \bar{v}_j = \bar{\varphi}_r \dots \bar{\varphi}_2\, \overline{\varphi_1 v_j} = \bar{\varphi}_r \dots \bar{\varphi}_3\, \overline{\varphi_2 \varphi_1 v_j} = \overline{\varphi_r \dots \varphi_1 v_j} = \overline{\psi v_j} .$$

On a par conséquent, en appliquant (5) , dans le cas de $\bar{\psi} \in \mathcal{N}_{m+n}(G)$ attachée à la transformation $\psi \in \mathcal{N}_{m+n}(F)$ de (4)

$$\bar{\psi}\,\bar{x}_j = \overline{\psi x_j} = \bar{y}_j \quad , \ 1 \leq j \leq m ,$$

$$\bar{\psi}\bar{1} = \bar{\psi}\bar{\alpha}_i = \overline{\psi \alpha_i} = \bar{\beta}_i = \bar{1} \quad , \ 1 \leq i \leq n \quad ,$$

et en définitive $\bar{\psi}\,\bar{X}^1 = \bar{Y}^1$.

On peut, en utilisant 1.2, construire à partir d'une suite de générateurs de G, toute autre suite de générateurs.

L'utilisation de la représentation de G comme groupe quotient F/N de F est nécessaire uniquement pour la démonstration de 1.2, de sorte que désormais nous pourrons noter les éléments de G par $a, x, y, v, \ldots$ au lieu de $\bar{a}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{v}, \ldots$ et de même les suites d'éléments par $A, X, Y, V, \ldots$

2.- Transformation des relations par le groupe de Nielsen.

2.1- $V = \{v_j\}$, $1 \leq j \leq m$, étant une m-suite de variables appartenant à G et $\psi \in \mathcal{N}_m(G)$, on peut associer à chaque j un produit $f_j(v_k)$, $1 \leq k \leq m$, d'éléments de la forme $v_k^{\pm 1}$ tel que

$$\psi v_j = f_j(v_k) .$$

Si φ est une transformation simple on a évidemment, d'après (1),

$$\varphi v_j = f'_j(v_h) \quad , \; 1 \leq h \leq m \quad .$$

D'autre part si la propriété est valable pour tout produit de r transformations simple et si nous considérons $\psi = \varphi_{r+1} \varphi_r \cdots \varphi_1$, on a d'après l'hypothèse

$$\varphi_r \cdots \varphi_1 v_h = f''_h(v_k) \, , \; 1 \leq k \leq m \, ,$$

et par conséquent

$$\psi v_j = \varphi_{r+1} \cdot \varphi_r \cdots \varphi_1 v_j = f'_j(\varphi_r \cdots \varphi_1 v_h) = f'_j[f''_h(v_k)] = f_j(v_k).$$

Notons $f_j^{-1}(v_k)$ le produit associé à ψ^{-1} et à chaque j, tel que

$$\psi^{-1} v_j = f_j^{-1}(v_k) \; .$$

Si maintenant $R(v_j)$, $1 \leq j \leq m$, est un produit d'éléments de la forme $v_j^{\pm 1}$, nous appelons transformé par ψ de $R(v_j)$, le produit d'éléments de la forme $(\psi v_j)^{\pm 1}$, suivant :

$$[R(v_j)]^{\psi} = R[f_j^{-1}(\psi v_k)] \; ;$$

on a

$$R(v_j) = R(\psi^{-1} \psi v_j) = R[f_j^{-1}(\psi v_k)] = [R(v_j)]^{\psi} .$$

donc

$$(6) \qquad R(v_j) = 1 \rightleftarrows [R(v_j)]^{\psi} = 1 \, ,$$

c'est-à-dire qu'une relation entre les éléments de V se transforme en une relation entre les éléments de ψV, qui lui est équivalente.

2.2.- <u>Si</u> $R_t(v_j) = 1$, $1 \leq t \leq s$, <u>est un système de relations fondamentales pour</u> V , $[R_t(v_j)]^{\psi} = 1$ <u>est un système de relations fondamentales pour</u> ψV ; <u>si</u> $R_t(v_j) = 1$ <u>est minimal</u>, $[R_t(v_j)^{\psi} = 1$ <u>est également minimal</u>.

a) D'après (6) , si $R(\psi v_j) = 1$ est une relation entre les éléments de ψV , $[R(\psi v_j)]\psi^{-1}$ est une relation entre les éléments de V et si $R_t(v_j) = 1$ est un système de relations fondamentales pour V

$$R_t(v_j) = 1 \longrightarrow [R(\psi v_j)]\psi^{-1} = 1 \quad ,$$

mais alors, toujours d'après (6)

$$[R_t(v_j)]^{\psi} = 1 \longrightarrow R(\psi v_j) = 1 \quad .$$

b) Si $R_{t'}(\psi v_j) = 1$, $1 \leq t' \leq s'$, $s' < s$ est un système de relations fondamentales pour ψV , $[R_{t'}(\psi v_j)]\psi^{-1} = 1$ est d'après a) , un système de relations fondamentales pour V , ce qui contredit l'hypothèse que $R_t(v_j) = 1$, $1 \leq t \leq s$, est minimal.

3.- <u>Systèmes minimaux de relations</u>.

X étant une m-suite de générateurs de G , notons $\rho(X) = m$, et soit $\sigma(X)$ le nombre des relations d'un système de relations fondamentales pour X .
Considérons

$$X^1 = \{X \, , \underbrace{1 \, , \, \ldots \, , 1}_{n}\} \in \mathcal{X}^1_{m+n}(G)$$

autrement dit la $(m + n)$-suite de générateurs de G :

$$X^1 = \{X \, , \xi_1 \, , \, \ldots \, , \xi_n\} \text{ avec les relations } \quad \xi_1 = 1 \, , \, \ldots \, , \xi_n = 1 \, .$$

Si $R_t(x_j) = 1$, $1 \leq t \leq \sigma(X)$, est un système minimal de relations fondamentales pour X ,

$$R_t(x_j) \, , \, 1 \leq t \leq \sigma(X) \quad ; \quad \xi_i = 1 \, , \, 1 \leq i \leq n \, ,$$

est un système minimal de relations fondamentales pour X^1 .

Si maintenant $\psi \in \mathcal{H}_{m+n}(G)$

$$(7) \qquad [R_t(x_j)]^{\psi} = 1 \quad , \quad (\xi_i)^{\psi} = 1$$

constitue, d'après 2.2, un système minimal de relations fondamentales pour ψX^1 . Supposons que ψ soit telle que

$$\psi \xi_i = 1 \, , \, 1 \leq i \leq n \quad ;$$

ψX est alors une m-suite de générateurs de G . Soit $R'_{t'}(\psi x_j) = 1$, $1 \leq t' \leq \sigma(\psi X)$ un système minimal de relations fondamentales pour ψX . Il s'ensuit que

$$R'_{t'}(\psi x_j) = 1 \quad , \quad \psi \xi_i = 1$$

est un système minimal de relations fondamentales pour ψX^1 et comme il en est de même pour (7) , on déduit $\sigma(X) + n = \sigma(\psi X) + n$, et par conséquent

$$(8) \qquad \sigma(\psi X) = \sigma(X)$$

3.1.- Le nombre $\sigma(X)$ est le même pour toute m-suite de générateurs de G.

Si en effet $Y^1 = \{Y , \underbrace{1 , \dots , 1}_{n}\}$ est une suite quelconque de $\mathcal{G}^1_{m+n}(G)$, il existe d'après 1.2, $\psi \in \mathcal{G}_{m+n}(G)$ telle que $\psi X^1 = Y^1$, et puisque $\psi \xi_i = 1$, $1 \leq i \leq n$, on a d'après (8) , $\sigma(Y) = \sigma(\psi X) = \sigma(X)$.

Soit maintenant $r(G)$ le rang de G , c'est-à-dire le nombre d'éléments d'une suite minimale de générateurs de G , soit $A = \{a_1 , \dots , a_{r(G)}\}$ et $s(G)$, le nombre de relations d'un système minimal de relations fondamentales pour A , qui d'après 3.1, est le même quelle que soit la $r(G)$-suite de générateurs de G .

3.2.- Quelle que soit la suite X de générateurs de G on a

$$\rho(X) - \sigma(X) = r(G) - s(G) .$$

Considérons en effet la $\rho(X)$-suite

$$A_{\rho(X)} = \{a_1 , \dots , a_{r(G)} , \xi_{r(G)+1} , \dots , \xi_{\rho(X)}\}$$

de générateurs de G , avec $\xi_{r(G)+1} = 1 , \dots , \xi_{\rho(X)} = 1$. Si $R_t(a_j) = 1$, $1 \leq j \leq s(G)$, est un système minimal de relations fondamentales pour A ,

$$R_t(a_j) = 1 , \ \xi_{r(G)+1} = 1 , \dots , \xi_{\rho(X)} = 1$$

est un système minimal de relations fondamentales pour $A_{\rho(X)}$ de sorte qu'en appliquant 3.1 on a

$$\sigma(X) = s(G) + \rho(X) - r(G) ,$$

d'où 3.2.

Si $\sigma(X)$ est infini, 3.2 reste valable, car on sait que dans ce cas, G ne peut pas être défini avec un système fini de relations fondamentales. B.H. Neumann [2] a donné un exemple de groupe de cette espèce.

Dire que G est libre équivaut à poser $s(G) = 0$, de sorte qu'on déduit comme cas particulier de 3.2 :

Théorème de Levi [1] . Si G est un groupe libre, on a pour toute suite de générateurs X , $\rho(X) - \sigma(X) = r(G)$.

Théorème de Magnus [3] . Si pour une certaine suite de générateurs X , on a $\rho(X) - \sigma(X) = r(G)$, G est un groupe libre.

Références.

[1] . F. LEVI, Math. Z., 37 (1933) , p. 315-318.

[2] . B.H. NEUMANN, J. London math. Soc., 12 (1937) , p. 120-127.

[3] . W. MAGNUS, Monatsh. Math. Phys., 47 (1939) , p. 307-313.

[4] . A.G. KUROSCH, Gruppentheorie, Berlin 1953.

[5] . J. PETRESCO, Séminaire P. Dubreil 1954/55, exposé n° 23 .