Paul Jaffard

Théorie algébrique de la croissance

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. n° 24, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A18_0>

THÉORIE ALGÉBRIQUE DE LA CROISSANCE

par Paul JAFFARD.

Toutes les fonctions considérées ici seront à valeurs réelles.

1.- Groupe de croissance sur un filtre.

Etant donnés un ensemble E et une fonction (réelle) f définie sur une partie de E, nous noterons $E(f)$ le sous-ensemble de E sur lequel elle est définie, $E^+(f)$, $E^-(f)$ et $E^0(f)$ les sous-ensembles de E sur lesquels elle est respectivement strictement positive, strictement négative, nulle.

Soit un filtre $\mathcal{F}$ défini sur E. Une fonction f sera dite définie sur $\mathcal{F}$ si elle est définie sur un élément de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si $E(f) \in \mathcal{F}$.

On introduit une relation de préordre sur l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{F}$ en posant :

(1) $$f \leq g \pmod{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow \{\exists X \in \mathcal{F} \text{ tel que } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X\}$$

On dira alors que g est supérieure à f sur $\mathcal{F}$.

On en déduit la notion de deux fonctions comparables sur $\mathcal{F}$.

(1) étant une relation de préordre, on est amené à introduire la relation d'équivalence :

(2) $$f = g \pmod{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow \{f \leq g \pmod{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad g \leq f \pmod{\mathcal{F}}\}$$

Deux fonctions équivalentes seront dites égales sur $\mathcal{F}$.

L'ensemble quotient $\mathcal{G}$ correspondant se trouve alors muni d'une relation d'ordre partiel qui en fait un treillis : f étant une fonction définie sur $\mathcal{F}$, on désignera par $\bar{f}$ la classe de f dans $\mathcal{G}$.

(3) $$\sup(\bar{f}, \bar{g}) = \overline{\sup(f, g)}$$

$\sup(f, g)$ étant définie sur $E(f) \cap E(g)$.

On peut définir une addition sur $\mathcal{G}$ en posant $\bar{f} + \bar{g} = \bar{h}$; h étant la fonction égale à $f + g$ sur $E(f) \cap E(g)$. Muni de cette addition et de la relation d'ordre définie plus haut, $\mathcal{G}$ est un groupe réticulé qui sera dit groupe de croissance sur le filtre $\mathcal{F}$.

Dans le cas particulier où $\mathcal{F}$ est un filtre principal (X) (c'est-à-dire le filtre formé par tous les sous-ensembles de E qui contiennent un sous-ensemble X), $\mathcal{G}$ s'identifie au groupe réticulé (additif) des fonctions réelles définies sur X .

Théorème 1. - Pour que $\mathcal{G}$ soit totalement ordonné, il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ soit un ultrafiltre.

On se sert de la caractérisation suivante des ultrafiltres :

Pour que $\mathcal{F}$ soit un ultrafiltre, il faut et il suffit que la réunion d'un nombre fini de sous-ensemble de E n'appartenant pas à $\mathcal{F}$ n'appartienne pas à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que la relation $X_1 \cup \ldots \cup X_n \in \mathcal{F}$ entraine que l'un des i $(1 \leq i \leq n)$ soit tel que $X_i \in \mathcal{F}$.

Ceci posé, montrons le théorème 1 :

Nécessité. Si $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre, $\exists X , Y \notin \mathcal{F}$ avec $X \cup Y \in \mathcal{F}$. Les fonctions caractéristiques de X et de Y ne sont pas comparables sur $\mathcal{F}$ et définissent deux éléments incomparables de $\mathcal{G}$.

Suffisance. Supposons que $\mathcal{F}$ soit un ultrafiltre. Soient $\bar{f}$ et $\bar{g} \in \mathcal{G}$ et $X = E(f) \cap E(g)$. On définit la partition de X : $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$:

$$x \in X_1 \Longleftrightarrow f(x) < g(x)$$
$$x \in X_2 \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$$
$$x \in X_3 \Longleftrightarrow f(x) > g(x)$$

Puisque $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, l'un des X_i appartient à $\mathcal{F}$ et par suite f et g sont comparables sur $\mathcal{F}$.

Dans toute la suite nous considérerons un filtre Φ de E qui sera dit fondamental et le groupe de croissance $\mathcal{G}$ sur Φ . Nous n'étudierons pas ici les sous-groupes de $\mathcal{G}$ (l'étude de ces sous-groupes, plus délicate que celle de $\mathcal{G}$, doit constituer une part importante de la théorie de la croissance : il suffit de considérer le cas où l'on ne s'intéresse qu'à la croissance des fonctions continues par exemple). Tous les filtres que nous aurons à considérer seront plus fins que Φ . Si $\mathcal{F}$ est un tel filtre, nous désignerons par $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ le groupe de croissance sur $\mathcal{F}$.

2.- Les réalisations du groupe Φ .

Tous les groupes considérés seront abéliens.

Γ étant un groupe réticulé, un sous-groupe Γ' de Γ sera dit <u>coréticulé</u> si Γ' est aussi un sous-treillis de Γ (c'est-à-dire si les opérations inf et sup coïncident sur Γ et Γ').

G et G' étant deux groupes réticulés, un homomorphisme φ de G dans G' sera dit <u>coréticulé</u> si on a pour tout couple x , $y \in G$:

$$\varphi(\inf(x , y)) = \inf(\varphi(x) , \varphi(y)) .$$

On appelle <u>réalisation coréticulée</u> d'un groupe réticulé G tout isomorphisme (de groupe réticulé) de G sur un sous-groupe coréticulé d'un produit direct ordonné Γ de groupes totalement ordonnés $\Gamma = \prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$. Lorenzen a montré que tout groupe abélien réticulé admet une telle réalisation coréticulée ([5]). Une réalisation coréticulée de G dans Γ définit pour tout $\iota \in I$ un homomorphisme coréticulé φ_ι de G dans le groupe totalement ordonné Γ_ι . Réciproquement, un ensemble $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ d'homomorphismes coréticulés de G dans les groupes totalement ordonnés (Γ_ι) définit une réalisation coréticulée de G dans le produit direct ordonné $\Gamma = \prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$ dès que l'intersection $\bigcap_\iota \varphi_\iota^{-1}(0)$ de tous les noyaux correspondants se réduit à $\{0\}$.

Pour obtenir une réalisation de G il faut donc avoir "suffisamment" d'homomorphismes coréticulés de G sur des groupes totalement ordonnés.

On montre ([1]) que tous les homomorphismes coréticulés de G s'obtiennent de la façon suivante :

On appelle <u>isolé</u> tout sous-groupe H de G tel que :

(3) $$h \leq x \leq h' \quad (x \in G \,;\, h , h' \in H) \text{ entraine } \quad x \in H$$

H étant un sous-groupe isolé et coréticulé de G , on peut munir le groupe quotient G/H de la structure d'ordre quotient :

(4) $$\bar{x} \geqslant 0 \iff \exists h \in H \quad \text{avec} \quad x + h \geqslant 0$$

($x \in G$ et $\bar{x}$ étant la classe de x dans G/H) .

G/H est alors réticulé et l'application canonique $G \longrightarrow G/H$ est coréticulée.

Pour déterminer H de façon que G/H soit totalement ordonné, il faut introduire les t-idéaux premiers de G .

Un <u>t-idéal premier</u> de G est un sous-ensemble $\mathfrak{p}$ de l'ensemble G_+ formé par les éléments $\geqslant 0$ de G tel que :

1) $x \in \mathfrak{p}$ et $y \geq x \Longrightarrow y \in \mathfrak{p}$

2) $x , y \in \mathfrak{p} \Longrightarrow \inf(x , y) \in \mathfrak{p}$

3) $x , y \in G_+$ et $x , y \notin \mathfrak{p} \Longrightarrow x + y \notin \mathfrak{p}$

Si $\mathfrak{p}$ est un t-idéal premier de G, le sous-ensemble $H_{\mathfrak{p}}$ de G défini par :

(5) $$x \in H_{\mathfrak{p}} \Longleftrightarrow \{ x^+ , x^- \notin \mathfrak{p} \}$$

est un sous-groupe isolé coréticulé de G tel que $G/H_{\mathfrak{p}} = G_{\mathfrak{p}}$ soit totalement ordonné. (On pose $x^+ = \sup(x , 0)$ et $x^- = - \inf(x , 0)$).

Désignons par $\varphi_{\mathfrak{p}}$ l'homomorphisme $G \longrightarrow G_{\mathfrak{p}}$. On montre que <u>tous les homomorphismes coréticulés de</u> G <u>sur les groupes totalement ordonnés sont des homomorphismes</u> $(\varphi_{\mathfrak{p}})$ ($\mathfrak{p}$ parcourant l'ensemble des t-idéaux premiers de G).

On a :

(6) $$\varphi_{\mathfrak{p}}(x) > 0 \Longleftrightarrow x^+ \in \mathfrak{p} .$$

Si $\mathcal{G}$ est le groupe de croissance sur le filtre fondamental Φ, on obtient facilement des homomorphismes coréticulés de $\mathcal{G}$ à partir des filtres plus fins que Φ :

Soit $\mathcal{F}$ un tel filtre. Toute fonction définie sur Φ est définie sur $\mathcal{F}$. Deux fonctions égales sur $\mathcal{F}$ sont égales sur Φ. D'où une application $\Psi_{\mathcal{F}} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ qui est un homomorphisme de groupe. Soit $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ son noyau : $\bar{f} \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow f$ est nulle sur $\mathcal{F}$.

$\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ est un sous-groupe isolé coréticulé de $\mathcal{G}$. On voit facilement que l'ordre quotient sur $\mathcal{G}/\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ coïncide avec celui de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. On en déduit que $\Psi_{\mathcal{F}}$ est un homomorphisme coréticulé de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

En particulier si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre (plus fin que Φ), $\Psi_{\mathcal{U}}$ est un homomorphisme coréticulé de $\mathcal{G}$ sur le groupe totalement ordonné $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ peut donc être identifié à $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}$, si $\mathfrak{p}$ est le t-idéal premier de $\mathcal{G}$ défini par :

(7) $$\bar{f} \in \mathfrak{p} \Longleftrightarrow \{ E^0(f) \cup E^+(f) \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad E^+(f) \in \mathcal{U} \} .$$

$\mathfrak{p}$ sera dit <u>défini par l'ultrafiltre</u> $\mathcal{U}$.

Ces homomorphismes de $\mathcal{G}$ définis par des ultrafiltres (plus fins que Φ) sont suffisamment nombreux pour permettre de définir une réalisation coréticulée de $\mathcal{G}$.

On va utiliser pour le montrer le :

<u>Lemme 1. - Si</u> $(\mathcal{F}_\iota)$ <u>est un ensemble de filtres sur</u> E <u>tel que</u> $\Phi = \bigcap_\iota \mathcal{F}_\iota$, <u>toute fonction</u> f <u>définie sur</u> Φ <u>et s'annulant sur chaque</u> $\mathcal{F}_\iota$ <u>s'annule sur</u> Φ.

On a $E^0(f) \in \mathcal{F}_\iota \ \forall_\iota$, donc $E^0(f) \in \bigcap_\iota \mathcal{F}_\iota = \Phi$ et f s'annule sur Φ .

On en déduit immédiatement le :

<u>Théorème 2. - Si</u> $(\mathcal{U}_\iota)$ <u>est un ensemble d'ultrafiltres tel que</u> $\Phi = \bigcap_\iota \mathcal{U}_\iota$, <u>les homomorphismes</u> $(\psi \mathcal{U}_\iota)$ <u>définissent une réalisation coréticulée de</u> $\mathcal{G}$.

Le lemme 1 montre en effet que, dans ce cas, $\bigcap_\iota \psi_{\mathcal{U}_\iota}^{-1}(0) = \{0\}$.

Comme tout filtre est intersection des ultrafiltres plus fins que lui, on en déduit l'existence de réalisations coréticulées de $\mathcal{G}$ (d'où la démonstration du théorème de Lorenzen dans ce cas particulier).

Nous allons montrer que les homomorphismes coréticulés de $\mathcal{G}$ sur des groupes totalement ordonnés sont liés de manière simple à ceux définis par des ultrafiltres plus fins que Φ .

<u>Lemme 2. - Si</u> $\mathfrak{p}$ <u>est un t-idéal premier de</u> $\mathcal{G}$, <u>il est contenu dans un (et un seul) t-idéal premier</u> $\mathfrak{m}$ <u>défini par un ultrafiltre (plus fin que</u> Φ).

Soit $\mathfrak{p}$ un t-idéal premier de $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{G}'$ le groupe des fonctions réelles définies sur E (il coïncide avec $\mathcal{G}$ si $\Phi = (E)$) . Φ étant plus fin que le filtre principal (E) , il existe un homomorphisme coréticulé canonique φ de $\mathcal{G}'$ sur $\mathcal{G}$. On en déduit un homomorphisme coréticulé $\varphi'_\mathfrak{p} = \varphi_\mathfrak{p} \varphi$ de $\mathcal{G}'$ sur $\mathcal{G}_\mathfrak{p}$. $\varphi'_\mathfrak{p}$ est défini par un t-idéal premier $\mathfrak{p}'$ de $\mathcal{G}'$.

Soit $\mathcal{U}$ le sous-ensemble de $\Phi(E)$ (ensemble des parties de E) ainsi défini :

(8) $$X \in \mathcal{U} \Longleftrightarrow \exists f \in \mathfrak{p}' \quad \text{avec} \quad X = E^+(f) .$$

Montrons que $\mathcal{U}$ est un filtre sur E : $\mathcal{U}$ n'est pas vide puisque $\mathfrak{p}'$ ne l'est pas.

Soit $X \in \mathcal{U}$ et $Y \supset X$. $\exists f \in \mathfrak{p}'$ avec $X = E^+(f)$. D'après la définition de $\mathcal{G}'$ $\exists g \in \mathcal{G}'_+$ avec $Y = E^+(g)$. On a $f + g \in \mathfrak{p}'$ (puisque $g \geqslant 0$) et $Y = E^+(f + g)$ donc $Y \in \mathcal{U}$. Soient $X , Y \in \mathcal{U}$ et $f , g \in \mathfrak{p}'$ tels que $X = E^+(f)$, $Y = E^+(g)$. On a $h = \inf(f , g) \in \mathfrak{p}'$ (puisque $\mathfrak{p}'$ est un t-idéal). $X \cap Y = E^+(h)$ entraine $X \cap Y \in \mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ est donc un filtre. Montrons que c'est un ultrafiltre.

Soient X_1 , $X_2 \subset E$ avec $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{U}$. $\exists f \in \mathfrak{p}'$ avec $X_1 \cup X_2 = E^+(f)$. Il est facile de voir qu'il existe f_1 , $f_2 \in \mathcal{G}'_+$ avec $f \leq f_1 + f_2$, $E^+(f_1) = X_1$ et $E^+(f_2) = X_2$.

Comme $\mathfrak{p}'$ est premier, f_1 ou f_2 appartient à $\mathfrak{p}'$. Soit $f_1 \in \mathfrak{p}'$. On a donc $X_1 \in \mathcal{U}$. La relation $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{U} \Longrightarrow \{X_1$ ou $X_2 \in \mathcal{U}\}$ montre que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre.

Montrons que $\mathcal{U}$ est plus fin que Φ :

Soient $X \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathfrak{p}'$ tel que $E^+(f) = X$. La relation $f \in \mathfrak{p}'$ entraine $\varphi(f) = \bar{f} \in \mathfrak{p}$. Soit $A \in \Phi$. Si on avait $X \cap A = \emptyset$ on aurait $\bar{f} \leq 0$ ce qui contredirait $\bar{f} \in \mathfrak{p}$. Donc tout élément de $\mathcal{U}$ a une intersection non vide avec tout élément de Φ . On en déduit que $\mathcal{U}$ est plus fin que Φ .

Soit alors $\mathfrak{m}$ le t-idéal premier de $\mathcal{G}$ défini par $\mathcal{U}$. On a $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. En effet soit $\bar{f} \in \mathfrak{p}$. On peut toujours supposer (en modifiant s'il le faut la valeur de f "en dehors du filtre Φ ") que $f \in \mathcal{G}'_+$. Donc $\varphi'_{\mathfrak{p}}(f) = \varphi_{\mathfrak{p}}(\bar{f}) > 0$ et $f \in \mathfrak{p}'$. Par suite $E^+(f) \in \mathcal{U}$ et $\bar{f} \in \mathfrak{m}$.

D'où le lemme.

Ceci posé, l'inclusion $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ entraine $\mathcal{H}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{H}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}$ peut être considéré comme un groupe quotient de $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}$. L'application $\varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}} : \mathcal{G}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathfrak{p}}$ est telle que $\varphi_{\mathfrak{p}} = \varphi_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}} \varphi_{\mathfrak{m}}$. C'est un homomorphisme coréticulé d'un groupe totalement ordonné (sur un autre) . Il est d'un type bien connu ([3]).

On a donc montré le :

<u>Théorème 3</u>. - <u>Tout homomorphisme coréticulé</u> $\varphi_{\mathfrak{p}}$ <u>du groupe de croissance</u> $\mathcal{G}$ (<u>sur un filtre</u> Φ) <u>sur un groupe totalement ordonné</u> $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}$ <u>est le produit d'un homomorphisme</u> $\psi_{\mathcal{U}}$ <u>de</u> $\mathcal{G}$ <u>sur le groupe de croissance</u> $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ (<u>sur un ultrafiltre</u> $\mathcal{U}$ <u>plus fin que</u> Φ) <u>et d'un homomorphisme coréticulé du groupe totalement ordonné</u> $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ <u>sur le groupe totalement ordonné</u> $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}$.

A partir du théorème 3 on voit que toute réalisation coréticulé de $\mathcal{G}$ peut se déduire d'une manière simple de la réalisation obtenue en prenant tous les homomorphismes $\psi_{\mathcal{U}}$.

3.- <u>Questions d'archimédianité. Un problème sur les ensembles.</u>

On peut se demander à quelle condition le groupe de croissance G sur un ultrafiltre $\mathcal{U}$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe additif (ordonné) des nombres réels. Pour cela, il faut et il suffit qu'il soit archimédien, c'est-à-dire tel que pour tout élément $a > 0$ de G et tout élément b de G, il existe un nombre $n > 0$ avec $na \geqslant b$.

Plus généralement, nous dirons que le groupe réticulé G est paraarchimédien (voir [1]) si pour tout $a > 0$ de G et tout $b \in G$, il existe un entier n tel que $na \nleq b$.

Théorème 4. - Pour que le groupe de croissance $\mathcal{G}$ sur le filtre Φ soit paraarchimédien, il faut et il suffit que Φ remplisse la condition suivante : Quelle que soit la suite dénombrable $(X_n)_{1 \leq n < \infty}$ d'éléments de Φ, $\bigcap_n X_n$ est encore un élément de Φ.

Suffisance. Supposons $\mathcal{G}$ non paraarchimédien. $\exists \bar{f} > 0$ et $\bar{g}$ tels que pour tout n on ait $n\bar{f} \leq \bar{g}$. Donc pour tout entier $n > 0$, $\exists X_n \in \Phi$ avec :

$$(nf - g)X_n \leq 0 \qquad f(X_n) \geqslant 0$$

Soit $X = \bigcap_n X_n$. On a $f(X) = 0$; donc $\bar{f} > 0$ entraine $X \notin \Phi$.

Nécessité. Supposons qu'il existe une suite (X_n) d'éléments de Φ avec $X = \bigcap_n X_n \notin \Phi$.

Posons $Y_n = \bigcap_{m \leq n} X_m$ (on a $Y_n \in \mathcal{F}\ \forall n$) $Y_n \supset Y_{n+1}$ et $\bigcap_n Y_n = X \notin \mathcal{F}$

Posons $Z_n = Y_n - Y_{n+1}$ ($\notin \mathcal{F}$) et soient f et g deux fonctions ainsi définies sur E :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in \complement X \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ si } x \in X$$
$$g(x) = 1 \text{ si } x \in X \cup \complement Y_1 \quad \text{et} \quad g(x) = n \text{ si } x \in Z_n .$$

On a $\bar{f} > 0$ car $X \notin \Phi$. D'autre part, pour tout n on a $n\bar{f} \nleq n\bar{g}$, car $Y_{n+1} \in \Phi$ et $X \notin \Phi$ entrainent que $Y_{n+1} - X$ rencontre tous les éléments de Φ, or $g(Y_{n+1} - X) \geqslant n+1$.

$\mathcal{G}$ n'est donc pas archimédien.

De nombreux filtres remplissent la condition du théorème 4. Donnons quelques exemples de tels filtres :

1) Φ est un filtre principal.

2) E a une puissance strictement supérieure à celle du dénombrable et Φ est ainsi défini :

$$X \in \Phi \Longleftrightarrow \complement X \text{ a une puissance } \leq \text{ celle du dénombrable.}$$

3) E est un espace topologique inépuisable (c'est-à-dire qu'il n'est pas

maigre relativement à lui-même. Par exemple E est un espace de Baire, ou E est localement compact) et Φ est ainsi défini :

$$X \in \Phi \Longleftrightarrow \complement X \text{ est maigre}$$

4) E est mesuré par une mesure μ non nulle et

$$X \in \Phi \Longleftrightarrow \mu(\complement X) = 0$$

Par contre, si Φ est un ultrafiltre, la propriété énoncée plus haut est beaucoup plus restrictive.

Nous dirons qu'un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ a la <u>propriété</u> D si le groupe de croissance sur $\mathfrak{U}$ est non archimédien.

On peut alors se poser le <u>problème non résolu suivant</u> :

<u>Problème</u>. - Existe-t-il des ultrafiltres non principaux n'ayant pas la propriété D ?

Dans le cas où E a une puissance $\leq$ celle du continu, on peut répondre par la négative à cette question :

<u>Théorème 5</u>. - <u>Si</u> E <u>a une puissance</u> $\leq$ <u>celle du continu, tout ultrafiltre non principal défini sur</u> E <u>a la propriété</u> D .

Il est facile de voir (en plongeant E dans F) que si E a une puissance $\leq$ celle de F et si tout ultrafiltre non principal de F a la propriété D , il en est de même de tout ultrafiltre non principal de E .

Il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas où E à la puissance du continu. Supposons par exemple que E soit le segment de droite $[0 , 1]$ (métrique compact). Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre non principal sur E . $\mathfrak{U}$ converge vers un élément $a \in E$ et comme $\mathfrak{U}$ n'est pas principal $\{a\} \notin \mathfrak{U}$.

Soit V_n le voisinage de a défini par :

$$x \in V_n \Longleftrightarrow |x - a| \leq 1/n$$

$V_n \in \mathfrak{U}$ $(\forall n)$. D'autre part $\bigcap_n V_n = \{a\} \notin \mathfrak{U}$. Donc $\mathfrak{U}$ a la propriété D .

<u>Théorème 6</u>. - <u>Pour qu'un ultrafiltre</u> $\mathfrak{U}$ <u>ait la propriété</u> D , <u>il faut et il suffit qu'il existe une fonction</u> f <u>définie sur</u> $\mathfrak{U}$ <u>qui ne soit constante sur aucun élément de</u> $\mathfrak{U}$.

<u>Nécessité</u>. Si toute fonction définie sur $\mathfrak{U}$ est constante sur un élément de $\mathfrak{U}$, toute fonction est égale sur $\mathfrak{U}$ à une constante et le groupe de croissance sur $\mathfrak{U}$ est isomorphe au groupe additif des réels.

Suffisance. Supposons que $\mathcal{U}$ n'ait pas la propriété D . Son groupe de croissance est isomorphe au groupe additif des réels et on peut considérer que dans cet isomorphisme chaque fonction constante est appliquée sur sa valeur. Donc toute fonction définie sur $\mathcal{U}$ est égale sur $\mathcal{U}$ à une constante

Théorème 7. - Si l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ a la propriété D , il n'existe pas d'homomorphisme coréticulé non nul de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ dans le groupe additif R des nombres réels.

Montrons d'abord que $\forall \bar{f} \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$, il existe $\bar{g} \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ "infiniment plus grand que $\bar{f}$ ". Soit $\bar{f} \geqslant 0$ un élément de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. On peut supposer $f \geqslant 0$. Soit (X'_n) une suite d'éléments de $\mathcal{U}$ telle que $X' = \bigcap_n X'_n \notin \mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre $X_n = X'_n - X \in \mathcal{U}$ pour tout n et $\bigcap_n X_n = \emptyset$. Posons (comme dans la démonstration du théorème 4) :

$Y_n = \bigcap_{m \leqslant n} X_m$ et $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$. Définissons g sur Y_1 en posant :

$$g(x) = nf(x) \iff x \in Z_n$$

On a $\bar{g} \geqslant n\bar{f}$ pour tout n .

Ceci posé, supposons qu'il existe un homomorphisme coréticulé non nul φ de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ dans R et soit $\bar{f} \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ tel que $\varphi(\bar{f}) > 0$. Soit alors $\bar{g} \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ tel que $\bar{f} \leqslant n\bar{g}$ $\forall n$. On devrait avoir $\varphi(\bar{f}) \leqslant n\varphi(\bar{g})$ $\forall n$, ce qui est impossible puisque R est archimédien.

On va déduire de ce théorème l'existence de groupes réticulés paraarchimédiens dont il n'existe aucun homomorphisme coréticulé non nul dans le groupe additif R des nombres réels.

Soient E l'intervalle $[0 , 1]$, Φ le filtre des complémentaires des parties dénombrables de E . Le groupe de croissance $\mathcal{G}$ sur Φ est paraarchimédien (théorème 4). Soit φ un homomorphisme coréticulé de $\mathcal{G}$ dans R . D'après le théorème 3 , φ se décompose en le produit d'un homomorphisme $\psi_{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{G}$ sur le groupe de croissance $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ sur un ultrafiltre $\mathcal{U}$ et d'un homomorphisme coréticulé de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ dans R . Mais ce dernier est nul en vertu du théorème 7 . Donc φ est nul.

Nakayama a donné l'exemple d'un groupe réticulé paraarchimédien dont il n'existe aucun homomorphisme croissant (non nécessairement coréticulé) dans R ([6]) .

4.- Relation de domination.

f et g étant deux fonctions définies sur le filtre Φ telles que $\bar{f}, \bar{g} \geqslant 0$, on dit que f est dominée par g suivant Φ s'il existe un entier $n > 0$ tel que $\bar{f} \leq n\bar{g}$. On écrit alors :

$$f \leq g \pmod{\Phi}$$

On dit que f est négligeable devant g suivant Φ si $\bar{f} \leq n\bar{g}$ pour tout entier $n > 0$. On écrit alors :

$$f \ll g \pmod{\Phi}$$

On a le :

Théorème 8.- Pour que f soit dominée par g suivant Φ, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun filtre $\mathcal{F}$ plus fin que Φ tel que g soit négligeable devant f suivant $\mathcal{F}$.

Nécessité. Supposons que f soit dominée par g suivant Φ. $\exists n > 0$ tel que $\bar{f} \leqslant n\bar{g}$. Quel que soit $\mathcal{F}$ plus fin que Φ, $\psi_{\mathcal{F}}(\bar{f}) \leq n \ \psi_{\mathcal{F}}(\bar{g})$. Donc f est dominée par g suivant $\mathcal{F}$ et g ne peut être négligeable devant f suivant $\mathcal{F}$.

Suffisance. Supposons que f ne soit pas dominée par g suivant Φ. On va montrer l'existence d'un t-idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{G}$ tel que $\bar{f} \in \mathfrak{p}$ et $\bar{g} \notin \mathfrak{p}$:

Soit $S = \bigcup_n \{n\bar{g}\}$ (n parcourant l'ensemble de tous les entiers strictement positifs). S est un sous-ensemble additivement clos de $\mathcal{G}_+$ tel que $S \cap (\bar{f}) = 0$ ($(\bar{f})$ désignant l'ensemble des éléments de $\mathcal{G} \geqslant \bar{f}$). On en déduit (grâce à un procédé classique du à Krull) l'existence d'un t-idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{G}$ tel que $\bar{f} \in \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, donc tel que $\bar{g} \notin \mathfrak{p}$. D'après le théorème 3 il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$ tel que $\varphi_{\mathfrak{p}} = \varphi' \psi_{\mathcal{U}}$ où φ' est un homomorphisme coréticulé de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ tel que :

$$\begin{cases} \varphi'(\psi_{\mathcal{U}}(\bar{f})) > 0 \\ \varphi'(\psi_{\mathcal{U}}(\bar{g})) = 0 \end{cases}$$

Ceci n'est possible que si $\psi_{\mathcal{U}}(\bar{g})$ est un élément de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ "infiniment petit" devant $\psi_{\mathcal{U}}(\bar{f})$, c'est-à-dire si g est négligeable devant f suivant $\mathcal{U}$.
C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. JAFFARD - Contribution à l'étude des groupes ordonnés. - J. Math. pures et appl., Vol. 32 (1953) p. 203-280.

[2] P. JAFFARD - Un problème sur les ensembles lié à la théorie de la croissance. - A paraître.

[3] W. KRULL - Allgemeine Bewertungstheorie. - J. reine ang. Math., Vol. 167 (1931) p. 160-196.

[4] W. KRULL - Halbgeordnete Gruppen und asymptotische Grössenordnung. - Archiv der Math., Vol. 3 (1952) p. 1-7.

[5] P. LORENZEN - Abstrakte Begründung der multiplicativen Idealtheorie. - Math.Z.,Vol. 45 (1939) p. 533-553.

[6] T. NAKAYAMA - On Krull's conjecture - III. - Proc. of Japan Acad., Vol. 22 (1946) p. 249-250.