Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

I. Molinaro

Demi-groupes résidutifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. nº 22, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A16_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/1956
-:-:-:-

30 avril 1956

Exposé n° 22

DEMI-GROUPES RÉSIDUTIFS, [1]

par I. MOLINARO

-:-:-:-

Par groupoïde ou demi-groupe résidutif nous entendons un ensemble muni d'une multiplication, éventuellement associative, d'une relation d'ordre (partiel) pour laquelle la multiplication est isotone :

$$x \leqslant y \text{ entraîne } ax \leqslant ay \text{ et } xb \leqslant yb ,$$

et où existent, pour tout couple d'éléments x , y , un résiduel à droite $x \cdot\!\!: y$ et un résiduel à gauche $x \,\dot{:}\, y$ (plus grands éléments q et q' vérifiant respectivement $yq \leqslant x$ et $q'y \leqslant x$) .

Nous nous proposons de mettre en évidence l'existence de demi-groupes résidutifs particuliers en nous appuyant sur les propriétés de trois types d'équivalences pouvant être définies dans un groupoïde résidutif quelconque. Pour simplifier l'exposé nous nous bornerons au cas abélien. Rappelons d'abord quelques formules.

G étant un groupoïde résidutif abélien, on a, quels que soient les éléments x et y de G :

(1)	$y \leqslant x : (x : y)$	(1')	$x : y = x : [x : (x : y)]$
(2)	$x(y : x) \leqslant y$	(2')	$y : x = x(y : x) : x$
(3)	$y \leqslant xy : x$	(3')	$xy = x(xy : x)$

Ces formules sont fondamentales ; il est aisé de voir que (1') , (2') et (3') entraînent respectivement :

1°.- On a $a = x : (x : a)$ si et seulement si a est résiduel de x (c'est-à-dire s'il existe y tel que $a = x : y$) .

[1] Cet exposé résume une partie de la thèse de l'auteur, préparée sous la direction de Mme Dubreil-Jacotin. On trouvera dans cette thèse un exposé plus systématique (cas non abélien, étude des divers types particuliers de demi-groupes nomaux) , et des démonstrations plus détaillées.

2°.- On a $a = ax : x$ si et seulement si a est résiduel par x. (c'est-à-dire s'il existe y tel que $a = y : x$).

3°.- On a $a = x(a : x)$ si et seulement si a est multiple de x.

Signalons encore les formules ci-dessous, faciles à établir et qui nous serviront dans la suite :

(4) $$a : a \leq (a : b) : (a : b)$$

(5) $$b : b \leq (a : b) : (a : b)$$

(6) $$a : a \leq ab : ab .$$

1.- Equivalences du type A.

Soit G un groupoïde résidutif abélien.

Dans G, nous appellerons équivalence du type A associée à l'élément x, et nous désignerons par A_x, la relation définie par

$$a \equiv b(A_x) \text{ si et seulement si } x : a = x : b .$$

Propriété 1[a].- Les classes modulo une équivalence du type A sont convexes.

Propriété 2[a].- Dans G, les équivalences du type A sont F.R.S.[2]

Toutes les classes modulo A_x étant convexes, il suffit de montrer que A_x satisfait à la propriété S. Or, $a < b$, $a \not\equiv b(A_x)$ entraînent $x : (x : a) < x : (x : b)$; pour tout $a' \equiv a(A_x)$ on a $x : (x : a') = = x : (x : a)$; d'autre part $b' = x : (x : b)$ est tel que $b' \equiv b(A_x)$, et l'on a $a' \leq x : (x : a') < x : (x : b) = b'$.

Théorème 1[a]. Si a appartient à la classe A modulo A_x, l'élément $\bar{a} = x : (x : a)$ est équivalent à a et est maximum dans A.

Conséquence des formules (1') et (1).

Corollaire 1[a]. Tout résiduel de x est maximum dans la classe modulo A_x à laquelle il appartient.

---

(2) Fortement régulières supérieurement, c'est-à-dire : régulières par rapport à la relation d'ordre et satisfaisant à la propriété S suivante : $a < b$, $a \not\equiv b$ entrainent que pour tout $a' \equiv a$ il existe $b' \equiv b$ tel que $a' < b'$. Voir M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT, Théorie des Treillis. Paris, Gauthier-Villars, 1953, p. 178, paragraphe 2.- Voir, en particulier, le théorème 3, qui est utilisé ici, et le théorème 5, qui servira plus loin (théorème 2).

En effet, si $x : \mu$ appartient à la classe A modulo A_x, l'élément maximum de la classe de A est $\bar{a} = x : [x : (x : \mu)] = x : \mu$.

<u>Corollaire 2^a.</u> <u>Toute classe modulo</u> A_x <u>contient un résiduel de x et un seul</u>.

<u>Corollaire 3^a.</u> <u>Pour qu'un élément a soit maximum dans sa classe modulo</u> A_x <u>il faut et il suffit que $a = x : (x : a)$</u>.

<u>Théorème 2^a.</u> <u>Dans G, si une équivalence $\mathcal{R}$, régulière par rapport à la multiplication et F.R.S., est telle que l'une des classes modulo $\mathcal{R}$ admette un élément maximum ω, $\mathcal{R}$ est contenue dans A_ω</u>.

Si $a \equiv b(\mathcal{R})$ on peut écrire $a(\omega : b) \equiv b(\omega : b)(\mathcal{R})$; or $b(\omega : b) \leq \omega$ montre que la classe de $b(\omega : b)$ coupe la section commençante (ω) de ω ; cela entraîne $a(\omega : b) \leq \omega$, d'où $\omega : b \leq \omega : a$. On verrait de même que $\omega : a \leq \omega : b$; par conséquent $\omega : a = \omega : b$, c'est-à-dire $a \equiv b(A_\omega)$.

<u>Corollaire 4^a.</u> <u>Pour que dans G, l'équivalence $\mathcal{R}$, satisfaisant aux conditions du théorème précédent, soit égale à</u> A_ω, <u>il faut et il suffit que toute classe modulo $\mathcal{R}$ contienne un résiduel de ω</u>.

Sinon, en effet, une classe au moins modulo A_ω se décomposerait en plusieurs classes modulo $\mathcal{R}$ et par suite contiendrait plusieurs résiduels de ω.

<u>Théorème 3^a.</u> <u>Pour que dans G, une équivalence $\mathcal{R}$ à classes convexes soit égale à</u> A_x, <u>il faut et il suffit que toute classe modulo $\mathcal{R}$ contienne un résiduel de x, et un seul, et que cet élément soit maximum dans sa classe</u>.

La condition est nécessaire ; elle est suffisante, car elle entraîne que pour tout a il existe un élément de la forme $x : \mu$, et un seul, tel que $a \equiv x : \mu(\mathcal{R})$ et $a \leq x : \mu$; cette inégalité entraîne $a \leq x : (x : a) \leq x : \mu$, d'où $x : (x : a) \equiv x : \mu(\mathcal{R})$ donc $x : (x : a) = x : \mu$. Or $a \equiv x : (x : a)(A_x)$, donc $a \equiv x : \mu(A_x)$. On en déduit que si $a \equiv b(\mathcal{R})$, on a $a \equiv b(A_x)$. Par conséquent $\mathcal{R} \subseteq A_x$; mais si $\mathcal{R}$ n'était pas égale à A_x une classe au moins modulo A_x se décomposerait en plusieurs classes modulo $\mathcal{R}$.

<u>Corollaire 5^a.</u> <u>Pour que</u> $A_x = A_y$ <u>il faut et il suffit que tout résiduel de x soit résiduel de y et inversement</u>.

Supposons que G soit un demi-groupe résidutif abélien.

<u>Propriété 3^a.</u>- <u>Toute équivalence du type A est régulière par rapport à la multiplication</u>.

Corollaire 6^a. Pour que $A_x = A_{x:a}$ il faut et il suffit que toute classe modulo A_x contienne un multiple de a.

D'après le corollaire 5^a il faut (et il suffit) que tout résiduel de x soit résiduel de $x : a$, donc, qu'à tout μ, on puisse faire correspondre ν tel que $x : \mu = (x : a) : \nu$, d'où $\mu \equiv a\,\nu\ (A_x)$.

2.- Equivalences du type F.

G étant un groupoïde ordonné abélien, nous appellerons équivalence du type F associée à l'élément x, et nous désignerons par F_x, la relation définie par

$$a \equiv b(F_x) \text{ si et seulement si } xa = xb .$$

La propriété suivante est immédiate.

Propriété 1^f.- Les classes modulo une équivalence du type F sont convexes.

Dans ce qui suit nous supposerons que G est un groupoïde résidutif.

Propriété 2^f.- Dans G, toute équivalence du type F est F.R.S.

Montrons que F_x satisfait à la propriété S ; $a < b$ et $a \not\equiv b(F_x)$ entraînent $xa : x < xb : x$; pour tout $a' \equiv a(F_x)$ on a $xa' : x = xa : x$; d'autre part $b' = xb : x$ est tel que $b' \equiv b(F_x)$ et l'on a $a' \leq xa' : x < xb : x = b'$.

Théorème 1^f. Si a appartient à la classe A modulo F_x, l'élément $\bar{a} = ax : x$ est équivalent à a et est élément maximum dans A.

Conséquence des formules (3) et (3').

Corollaire 1^f. Tout résiduel par x est élément maximum dans la classe modulo F_x à laquelle il appartient.

Si $\mu : x$ appartient à la classe A modulo F_x, l'élément maximum dans A est, en effet, $\bar{a} = x(\mu : x) : x = \mu : x$. (formule (2')).

Corollaire 2^f. Toute classe modulo F_x contient un résiduel par x et un seul.

Corollaire 3^f. Pour qu'un élément a soit maximum dans sa classe modulo F_x, il faut et il suffit que $a = xa : x$.

Théorème 3^f. Pour que dans G une équivalence $\mathcal{R}$ à classes convexes soit égale à F_x, il faut et il suffit que toute classe modulo $\mathcal{R}$ contienne un résiduel par x et un seul et que cet élément soit maximum dans sa classe.

La condition est nécessaire ; elle est suffisante, car elle entraîne qu'à tout a correspond un et un seul élément de la forme $\mu : x$ tel que $a \equiv \mu : x(\mathcal{R})$ et $a \leq \mu : x$, ce qui entraîne $a \leq ax : x \leq \mu : x$, d'où $ax : x \equiv \mu : x(\mathcal{R})$ et par conséquent $ax : x = \mu : x$. Or on a $a \equiv ax : x(F_x)$, donc $a \equiv \mu : x(F_x)$. On en déduit que $a \equiv b(\mathcal{R})$ entraîne $a \equiv b(F_x)$; c'est-à-dire $\mathcal{R} \subseteq F_x$. Si alors $\mathcal{R}$ n'était pas égale à F_x une classe modulo F_x au moins se décomposerait en plusieurs classes modulo $\mathcal{R}$.

<u>Corollaire 5^f. Pour que</u> $F_x = F_y$ <u>il faut et il suffit que tout résiduel par x soit résiduel par y et inversement.</u>

Supposons que G soit un <u>demi-groupe</u> résidutif abélien.

Toute équivalence du type F est alors <u>régulière par rapport à la multiplication</u>. Ci-dessous, nous allons étudier les équivalences B_x $[a \equiv b(B_x) \Longleftrightarrow a : x = b : x]$; compte tenu de leur définition, on a :

<u>Corollaire 6^f. Pour que</u> $F_x = F_{ax}$ <u>il faut et il suffit que toute classe modulo</u> B_x <u>contienne un résiduel par a</u>.

En effet, il faut et il suffit qu'à tout μ on puisse faire correspondre ν tel que $\mu : x = \nu : ax$, d'où $\mu \equiv \nu : a(B_x)$.

3.- <u>Equivalences du type</u> B.

Nous supposerons que G est un groupoïde résidutif abélien.

<u>Nous appellerons équivalence du type B associée à l'élément x, et nous désignerons par</u> B_x, <u>la relation définie par</u>

$$a \equiv b(B_x) \text{ si et seulement si } a : x = b : x$$

On a d'abord

<u>Propriété 1^b.- Les classes modulo une équivalence du type B sont convexes.</u>

<u>Propriété 2^b.- Toute équivalence du type B est F.R.I.</u>(3)

Toute classe modulo B_x étant convexe, il suffit de montrer que B_x satisfait à la propriété S'. Or $a < b$ et $a \not\equiv b(B_x)$ entraînent $x(a : x) < x(b : x)$; pour tout $b' \equiv b(B_x)$ on a $x(b' : x) = x(b : x)$;

---

(3) <u>Fortement régulière inférieurement</u>, c'est-à-dire régulière par rapport à la relation d'ordre et satisfaisant à la propriété S' suivante : $a < b$, $a \not\equiv b$ entraînent que pour tout $b' \equiv b$, il existe $a' \equiv a$ tel que $a' < b'$.

d'autre part $a' = x(a : x)$ est tel que $a' \leq a(B_x)$ et l'on a

$a' = x(a : x) \leq x(b' : x) \leq b'$.

Théorème 1^b. Si a appartient à la classe A modulo B_x ; l'élément $\bar{a} = x(a : x)$ est équivalent à a et est élément minimum dans A .

Conséquence des formules (2) et (2') .

Corollaire 1^b. Tout multiple de x est élément minimum dans la classe modulo B_x à laquelle il appartient.

En effet, si $x\mu$ appartient à la classe A modulo B_x ; l'élément minimum dans A est $\bar{a} = x(x\mu : x) = x\mu$.

Corollaire 2^b. Toute classe modulo B_x contient un multiple de x et un seul

Corollaire 3^b. Pour qu'un élément a soit minimum dans sa classe modulo B_x il faut et il suffit que $a = x(a : x)$.

Théorème 3^b. Pour que dans G une équivalence $\mathcal{R}$ à classes convexes soit égale à B_x , il faut et il suffit que toute classe modulo $\mathcal{R}$ contienne un multiple de x et un seul et que cet élément soit minimum dans sa classe.

La condition est nécessaire ; elle est suffisante, car elle entraîne qu'à tout a correspond un et un seul élément de la forme $x\mu$ tel que $a \equiv x\mu \ (\mathcal{R})$ et $x\mu \leq a$; cette inégalité entraîne $x\mu \leq x(a : x) \leq a$, d'où $x\mu \equiv x(a : x)(\mathcal{R})$, par conséquent $x\mu = x(a : x)$. Or, on a $a \equiv x(a : x)(B_x)$, donc $a \equiv x\mu(B_x)$. On en déduit $\mathcal{R} \subseteq B_x$. Si alors $\mathcal{R}$ n'était pas égale à B_x , une classe modulo B_x au moins se décomposerait en plusieurs classes modulo $\mathcal{R}$.

Corollaire 5^b. Pour que $B_x = B_y$ il faut et il suffit que tout multiple de x soit multiple de y et inversement .

Supposons que G soit un demi-groupe résiduti[f] abélien.

Propriété 3^b. L'équivalence B_x est régulière à droite par rapport à la résiduation, c'est-à-dire : $a \equiv b(B_x)$ entraîne $a : \mu \equiv b : \mu \ (B_x)$, $\forall \mu$.

Corollaire 6^b. Pour que $B_x = B_{ax}$ il faut et il suffit que toute classe modulo F_x contienne un multiple de x .

Il faut et il suffit qu'à tout μ on puisse faire correspondre ν tel que $\mu x = \nu ax$, d'où $\mu \equiv \nu a(F_x)$.

4.- Equivalence $\mathcal{A}$-nomale - Demi-groupe $\mathcal{A}$-nomal .

Dans tout ce qui suit, G est un demi-groupe résidutif abélien.

Dans G , l'équivalence A_θ sera dite équivalence $\mathcal{A}$-nomale si elle est telle que

$$A_\theta = A_{\theta : \mu} , \forall \mu \in G .$$

Comme conséquence du corollaire 6^a , on a d'abord :

Théorème 4^a. Pour que dans G une équivalence A_θ soit $\mathcal{A}$-nomale il faut et il suffit que toute classe modulo A_θ contienne un multiple de tout élément de G , en d'autres termes, soit un complexe net.

Une équivalence $\mathcal{A}$-nomale pour l'élément θ sera représentée par $\mathcal{A}_\theta$ (l'emploi de la lettre ronde $\mathcal{A}$, au lieu de A , est destiné à rappeler la nomalité). θ est appelé élément $\mathcal{A}$-nomaloïde et le demi-groupe G , qui contient un élément $\mathcal{A}$-nomaloïde est dit demi-groupe $\mathcal{A}$-nomal.

Nous dirons qu'un élément α est $\mathcal{A}$-nomal , s'il est $\mathcal{A}$-nomaloïde et s'il est maximum dans sa classe modulo $\mathcal{A}_\alpha$. On voit que :

1°- Si θ est $\mathcal{A}$-nomaloïde, les résiduels de θ sont $\mathcal{A}$-nomaux.

2°- Pour qu'un élément $\mathcal{A}$-nomaloïde θ soit $\mathcal{A}$-nomal il faut et il suffit qu'il existe k tel que $\theta = \theta : k$.

Théorème 5^a. Pour que dans G un élément α soit $\mathcal{A}$-nomal il faut et il suffit qu'il satisfasse à la relation

$$(1) \qquad \alpha = \alpha : \mu (\alpha : \alpha \mu) , \forall \mu \in G .$$

La condition est nécessaire, car si α est $\mathcal{A}$-nomal il est maximum dans sa classe modulo $A_{\alpha : \mu}$, quel que soit μ ; donc on a (corollaire 3^a)

$$(2) \qquad \alpha = (\alpha : \mu) : [(\alpha : \mu) : \alpha] ,$$

d'où (1) . Inversement supposons que α vérifie (1) ; d'abord il est maximum dans sa classe modulo A_α ; puis, en écrivant (1) sous la forme (2) , on voit que α est maximum dans sa classe modulo $A_{\alpha : \mu}$; il résulte alors du théorème 2 que $A_{\alpha : \mu} \subseteq A_\alpha$, d'où l'égalité, puisque $A_\alpha \subseteq A_{\alpha : \mu}$.

Théorème 6^a. Pour que dans G un élément α soit $\mathcal{A}$-nomal, il faut et il suffit qu'il vérifie simultanément les deux conditions suivantes :

1°- *il existe* k *tel que* $\alpha = \alpha : \alpha k$.

2°- *Le résiduel par lui-même de tout résiduel de* α *est égal à* $\alpha : \alpha$, autrement dit, $(\alpha : \mu) : (\alpha : \mu) = \alpha : \alpha$, $\forall \mu \in G$.

Si α est $\mathcal{A}$-nomal, on a (1) ; en remplaçant, dans (1) , μ par α et en posant $k = \alpha : \alpha^2$, on a $\alpha = \alpha : \alpha k$; d'autre part, (1) écrite sous la forme (2) entraîne $[(\alpha : \mu) : \alpha] : [(\alpha : \mu) : \alpha] = \alpha : \alpha$; on en déduit, compte-tenu de la formule (4) , $(\alpha : \mu) : (\alpha : \mu) = \alpha : \alpha$.

Inversement, d'après 2° on a, en particulier $(\alpha : \alpha\mu) : (\alpha : \alpha\mu) = \alpha : \alpha$
Si k est l'élément du 1° on peut écrire $[(\alpha : \alpha\mu) : k] : (\alpha : \alpha\mu) =$ $= \alpha : \alpha k$; or $(\alpha : \alpha\mu) : k = (\alpha : \alpha k) : \mu = \alpha : \mu$, donc $\alpha : \mu(\alpha : \alpha\mu) = \alpha$.

Corollaire . Si α est $\mathcal{A}$-nomal, on a $\mu : \mu \leqslant \alpha : \alpha$, $\forall \mu \in G$.

Conséquence du 2° du théorème précédent et de la formule (5) .

Théorème 7^{a}. *Pour que* G *soit un demi-groupe* $\mathcal{A}$*-nomal, il faut et il suffit que l'ensemble des éléments* $\mu : \mu$, *où* $\mu \in G$, *admette un élément maximum* ; *cet élément est élément* $\mathcal{A}$*-nomal* .

La condition est nécessaire, d'après le corollaire précédent. Pour voir qu'elle est suffisante, on vérifiera que, s'il existe n tel que, pour tout μ, $\mu : \mu \leqslant n : n$, l'élément $\alpha = n : n$ satisfait aux conditions du théorème précédent, et, par conséquent, est $\mathcal{A}$-nomal.

Théorème d'unicité. *Si, dans* G , *il existe une équivalence* $\mathcal{A}$*-nomale, elle est unique*.

Soient θ_1 et θ_2 deux éléments $\mathcal{A}$-nomaloïdes de G ; α_1 étant un résiduel de θ_1 on a $\mathcal{A}_{\theta_1} = \mathcal{A}_{\alpha_1} = \mathcal{A}_{\alpha_1 : \alpha_1}$, et aussi $\mu : \mu \leqslant \alpha_1 : \alpha_1$, $\forall \mu \in G$; de même si α_2 est un résiduel de θ_2 , on a

$$\mathcal{A}_{\theta_2} = \mathcal{A}_{\alpha_2} = \mathcal{A}_{\alpha_2 : \alpha_2} \quad \text{et} \quad \mu : \mu \leqslant \alpha_2 : \alpha_2 , \forall \mu \in G .$$

Il en résulte $\alpha_1 : \alpha_1 = \alpha_2 : \alpha_2$, d'où $\mathcal{A}_{\alpha_1 : \alpha_1} = \mathcal{A}_{\alpha_2 : \alpha_2}$, et , par conséquent, $\mathcal{A}_{\theta_1} = \mathcal{A}_{\theta_2}$

Corollaire. *Si* α *est* $\mathcal{A}$*-nomal, les seuls éléments* $\mathcal{A}$*-nomaux du demi-groupe sont* α *et ses résiduels*.

Si α_1 est un élément $\mathcal{A}$-nomal autre que α , on a $\mathcal{A}_{\alpha_1} = \mathcal{A}_{\alpha}$;

α_1 est donc élément maximum dans sa classe modulo $\mathcal{A}_\alpha$ et par conséquent, est un résiduel de α .

<u>Théorème 8^a. Dans un demi-groupe $\mathcal{A}$-nomal G , toute équivalence du type A est contenue dans l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale.</u>

On montre que, quel que soit x , on a, si α est un élément $\mathcal{A}$-nomal, $\alpha : \alpha = x : [\,x : (\alpha : \alpha)\,]$. Il en résulte que $\alpha : \alpha$ est élément maximum dans sa classe modulo A_x , donc $A_x \subseteq \mathcal{A}_{\alpha:\alpha}$ (théorème 2).

<u>Corollaire</u> . <u>Pour que α soit $\mathcal{A}$-nomal il faut et il suffit qu'il vérifie la relation</u> $\alpha = \mu : (\mu : \alpha)\ ,\ \forall\, \mu$.

On a, en effet, $\alpha \equiv \mu : (\mu : \alpha)(A_\mu)$, donc $\alpha \equiv \mu : (\mu : \alpha)(\mathcal{A}_\alpha)$, ce qui entraîne $\alpha = \mu : (\mu : \alpha)$. Inversement, si l'on remplace μ par $\alpha : \mu$, on obtient $\alpha = \alpha : \mu\,(\alpha : \alpha\mu)$.

<u>Théorème 9. Si, dans G , une équivalence $\mathcal{R}$, F.R.S. et régulière par rapport à la multiplication, est telle que G/$\mathcal{R}$ soit un groupe et que ω soit maximum dans sa classe modulo $\mathcal{R}$, ω est élément $\mathcal{A}$-nomal et</u> $\mathcal{R} = \mathcal{A}_\omega$.

Montrons d'abord que $\omega : \omega$ est l'élément maximum de la classe-unité de G/$\mathcal{R}$; si ε appartient à cette classe on a $\varepsilon\omega \equiv \omega\ (\mathcal{R})$, d'où $\varepsilon\omega \leqslant \omega$, $\varepsilon \leqslant \omega : \omega$; on en déduit $\varepsilon\omega \leqslant \omega(\omega : \omega) \leqslant \omega$, d'où $\varepsilon\omega \equiv \omega(\omega : \omega)(\mathcal{R})$ et enfin $\varepsilon \equiv \omega : \omega\,(\mathcal{R})$.

Cela étant, soit a un élément d'une classe A modulo $\mathcal{R}$, a^* un élément de la classe inverse ; on a $aa^* \equiv \omega : \omega\ (\mathcal{R})$; d'où $aa^* \leqslant \omega : \omega$, $a^* \leqslant (\omega : \omega) : a$, $aa^* \leqslant a[(\omega : \omega) : a] \leqslant \omega : \omega$. On en déduit

(1) $$a[(\omega : \omega) : a] \equiv \omega : \omega\,(\mathcal{R})$$

Cette relation montre que si $a \in A$, $(\omega : \omega) : a \in A^{-1}$, donc que $(\omega : \omega) : [(\omega : \omega) : a] \in (A^{-1})^{-1} = A$. Il en résulte que toute classe modulo $\mathcal{R}$ contient un résiduel ω , donc (corollaire 4) $\mathcal{R} = A_\omega$. Mais alors ω est maximum dans sa classe modulo A_ω , donc (1) s'écrit $\omega : a(\omega : \omega a) = \omega$. Il s'ensuit que ω est $\mathcal{A}$-nomal, et, par suite, que $\mathcal{R}$ est l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale.

<u>Théorème 10. Si α est élément $\mathcal{A}$-nomal</u>, G/$\mathcal{A}_\alpha$ <u>est un groupe</u>.

Si α est $\mathcal{A}$-nomal on a $\alpha = \alpha : (\alpha : \alpha)$, d'où $\alpha : \mu = \alpha : (\alpha : \alpha)\mu$, c'est-à-dire $\mu \equiv (\alpha : \alpha)\,\mu\ (\mathcal{A}_\alpha)$, ce qui montre que la classe de $\alpha : \alpha$

est classe-unité dans $G/\mathcal{A}_{\alpha}$. D'autre part, d'après le théorème 5^{a} on a $\mu\,(\alpha : \alpha\mu) \equiv \alpha : \alpha\ (\mathcal{A}_{\alpha})$, ce qui montre que la classe contenant μ admet pour inverse la classe contenant $\alpha : \alpha\mu$.

A partir des deux théorèmes précédents, on démontre :

Pour que G/A_x soit un groupe, il faut et il suffit que x soit élément $\mathcal{A}$-nomaloïde.

5.- Equivalence $\mathcal{F}$-nomale. Demi-groupe $\mathcal{F}$-nomal.

Dans un demi-groupe abélien G, l'équivalence F_{γ} est dite équivalence $\mathcal{F}$-nomale si elle est telle que

$$F_{\gamma} = F_{\gamma\mu}\ ,\ \forall \mu \in G .$$

Dans ce qui suit, nous supposerons essentiellement que G est résidutif

D'après le corollaire 6^{f} on a d'abord :

Théorème 4^{f}. Pour que dans G une équivalence F_{γ} soit $\mathcal{F}$-nomale il faut et il suffit que toute classe modulo B_{γ} contienne un résiduel par tout élément de G.

Une équivalence $\mathcal{F}$-nomale pour l'élément γ sera représentée par $\mathcal{F}_{\gamma}$; γ est appelé élément $\mathcal{F}$-nomaloïde, et le demi-groupe G, qui contient un élément $\mathcal{F}$-nomaloïde, est dit demi-groupe $\mathcal{F}$-nomal.

Théorème d'unicité. Si dans G, il existe une équivalence $\mathcal{F}$-nomale, elle est unique.

En effet, si γ_1 et γ_2 sont deux éléments $\mathcal{F}$-nomaloïdes, on a $\mathcal{F}_{\gamma_1} = \mathcal{F}_{\gamma_1\gamma_2} = \mathcal{F}_{\gamma_2}$.

Théorème 5^{f}. Pour que dans G un élément γ soit $\mathcal{F}$-nomaloïde, il faut et il suffit qu'il vérifie la relation :

(1) $$a\gamma : \gamma = a\mu\gamma : \mu\gamma\ ,\ \forall a \text{ et } \mu \in G .$$

La condition est nécessaire (théorème 1^{f}) ; on montre qu'elle est suffisante en s'appuyant sur le théorème 4^{f}.

Théorème 6^{f}. Pour que dans G un élément γ soit $\mathcal{F}$-nomaloïde, il faut et il suffit que l'on ait

(2) $$a\mu : \mu \leq a\gamma : \gamma\ ,\ \forall a \text{ et } \mu \in G .$$

En effet, la relation (1), compte tenu de la formule (6), entraîne (2). Inversement, si l'on a (2) on a $a\gamma\mu : \gamma\mu \leqslant a\gamma : \gamma$, d'où (1).

<u>Théorème 7^f. Pour que dans G un élément γ soit $\mathcal{T}$-nomaloïde, il faut et il suffit qu'il vérifie la relation</u>

(3) $$a : \gamma = (a : \gamma)\mu : \mu, \quad \forall a \text{ et } \mu \in G.$$

On obtient (3) en remplaçant dans (1) a par $a : \gamma$ et en tenant de la formule (6).

Inversement, en remplaçant dans (3) a par $a\gamma$ on verrait que (3) entraîne (2).

<u>Théorème 8^f. Dans un demi-groupe $\mathcal{T}$-nomal, toute équivalence du type F est contenue dans l'équivalence $\mathcal{T}$-nomale.</u>

<u>Théorème 11. Tout demi-groupe $\mathcal{T}$-nomal est $\mathcal{A}$-nomal.</u>

En effet, si γ est $\mathcal{T}$-nomaloïde on a (2); on en déduit $a\mu : a\mu \leqslant a\gamma : a\gamma$; mais on a $\mu : \mu \leqslant a\mu : a\mu$, donc $\mu : \mu \leqslant a\gamma : a\gamma$, $\forall \mu \in G$. Le théorème 7^a donne alors le résultat et indique en outre que $a\gamma : a\gamma$ est élément $\mathcal{A}$-nomal.

<u>Corollaire. Si l'on pose $\varepsilon = \alpha : \alpha$, où α est un élément $\mathcal{A}$-nomal quelconque, on a $a\gamma : a\gamma = \varepsilon$, $\forall a$, pour tout élément $\mathcal{T}$-nomaloïde γ.</u>

On sait, en effet, que ε est tel que $\mu : \mu \leqslant \varepsilon$, $\forall \mu$; donc, d'abord $a\gamma : a\gamma \leqslant \varepsilon$; mais on vient de voir que $\mu : \mu \leqslant a\gamma : a\gamma$, $\forall \mu$; en particulier, $\varepsilon = \varepsilon : \varepsilon \leqslant a\gamma : a\gamma$, d'où l'égalité.

<u>Corollaire. Si γ_1 est multiple d'un élément $\mathcal{T}$-nomaloïde γ, l'ensemble des éléments $\mathcal{A}$-nomaux n'est autre que l'ensemble des résiduels de γ_1 par ses multiples.</u>

<u>Corollaire. Dans un demi-groupe $\mathcal{T}$-nomal, l'équivalence $\mathcal{T}$-nomale est contenue dans l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale.</u>

Si $a \equiv b\ (\mathcal{T}_\gamma)$, c'est-à-dire si $\gamma a = \gamma b$, on a, puisque $\mathcal{A}_\alpha$ est simplifiable ($G/\mathcal{A}_\alpha$ est un groupe), $a \equiv b(\mathcal{A}_\alpha)$.

6.- Equivalence $\mathcal{B}$-nomale. Demi-groupe $\mathcal{B}$-nomal.

Nous désignons toujours par G un demi-groupe résidutif abélien.

Dans G , une équivalence B_θ sera dite équivalence $\mathcal{B}$-nomale si elle est telle que

$$B_\theta = B_{\theta\mu} \quad ; \ \forall \mu \in G .$$

Comme conséquence du corollaire 5^b on a

Théorème 4^b. Pour que dans G une équivalence B_θ soit $\mathcal{B}$-nomale, il faut et il suffit que, quel que soit m multiple de θ , tout multiple de θ soit multiple de m .

Une équivalence $\mathcal{B}$-nomale pour l'élément θ sera représentée par $\mathcal{B}_\theta$; θ est appelé élément $\mathcal{B}$-nomaloïde et le demi-groupe G , qui contient un élément $\mathcal{B}$-nomaloïde, est dit demi-groupe $\mathcal{B}$-nomal .

Nous dirons qu'un élément β est $\mathcal{B}$-nomal s'il est $\mathcal{B}$-nomaloïde et s'il est élément minimum dans sa classe modulo $\mathcal{B}_\beta$. On voit que

Si θ est $\mathcal{B}$-nomaloïde, les multiples de θ sont $\mathcal{B}$-nomaux.

Pour qu'un élément $\mathcal{B}$-nomaloïde θ soit $\mathcal{B}$-nomal, il faut et il suffit qu'il existe k tel que $\theta = \theta k$.

Théorème d'unicité . Si dans G , il existe une équivalence $\mathcal{B}$-nomale, elle est unique.

En effet, si θ_1 et θ_2 sont deux éléments $\mathcal{B}$-nomaloïdes, on a

$$\mathcal{B}_{\theta_1} = \mathcal{B}_{\theta_1\theta_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{\theta_2} = \mathcal{B}_{\theta_1\theta_2} \quad ; \text{ d'où } \mathcal{B}_{\theta_1} = \mathcal{B}_{\theta_2} .$$

Corollaire . Si β est $\mathcal{B}$-nomal, les seuls éléments $\mathcal{B}$-nomaux du demi-groupe sont β et ses multiples.

Théorème 5^b. Dans G , un élément β est $\mathcal{B}$-nomal si, et seulement s'il vérifie la relation.

$$(1) \qquad \beta = \beta\mu\,(\beta : \beta\mu) \quad , \ \forall \mu \in G .$$

La condition est nécessaire (corollaire 3^b). Inversement si m est multiple de β , on a $\beta = m(\beta : m)$, ce qui montre que tout multiple de β est multiple de m .

Théorème 6^b. Dans G un élément β est $\mathcal{B}$-nomal si et seulement s'il vérifie la relation.

$$(2) \qquad \beta = \mu(\beta : \mu) , \forall \mu \in G .$$

(1) entraîne, en effet, $\beta = \beta\mu[(\beta : \mu) : \beta] \leq \mu(\beta : \mu) \leq \beta$, et par suite (2) . Inversement, en remplaçant dans (2) , μ par $\beta\mu$, on retrouve (1) .

Théorème 8^b. Dans un demi-groupe $\mathcal{B}$-nomal, toute équivalence du type B est contenue dans l'équivalence $\mathcal{B}$-nomale .

Théorème 12. Tout élément $\mathcal{B}$-nomal est $\mathcal{F}$-nomaloïde ; par conséquent, tout demi-groupe $\mathcal{B}$-nomal est $\mathcal{F}$-nomal (et par suite $\mathcal{A}$-nomal).

Si β est $\mathcal{B}$-nomal, on a (2) , d'où, quel que soit a , $a : \beta = [a : (\beta : \mu)] : \mu$; si l'on pose $a : (\beta : \mu) = b$, la formule $\mu(b : \mu) : \mu = b : \mu$, montre que β vérifie la relation $a : \beta = \mu(a : \beta) : \mu$, $\forall a$ et $\mu \in G$. D'après le théorème 7^f , β est $\mathcal{F}$-nomaloïde.

Corollaire. Si l'on pose $\varepsilon = \alpha : \alpha$, où α est un élément $\mathcal{A}$-nomal quelconque, on a $\beta : \beta = \varepsilon$ et $\beta\varepsilon = \beta$, pour tout β $\mathcal{B}$-nomal.

La première égalité résulte du corollaire relatif au théorème 11, puisque β est $\mathcal{F}$-nomaloïde et est multiple de lui-même. Elle entraîne la seconde.

Ce corollaire (selon lequel pour tout α $\mathcal{A}$-nomal et β $\mathcal{B}$-nomal, on a $\alpha : \alpha = \beta : \beta$) permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 13. Dans un demi-groupe $\mathcal{B}$-nomal G :

1°- Toute classe modulo $\mathcal{A}_\alpha$ contient un élément $\mathcal{B}$-nomal et un seul.

2°- Toute classe modulo $\mathcal{B}_\beta$ contient un élément $\mathcal{A}$-nomal et un seul.

Corollaire . Si β est élément $\mathcal{B}$-nomal, on peut définir l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale $\mathcal{A}_\alpha$ par : $a \equiv b(\mathcal{A}_\alpha)$ si et seulement si $\beta a = \beta b$.

Si $a \equiv b(\mathcal{A}_\alpha)$, on a $\beta a \equiv \beta b(\mathcal{A}_\alpha)$; mais βa et βb sont $\mathcal{B}$-nomaux, d'où $\beta a = \beta b$; inversement $\beta a = \beta b$ entraîne $a \equiv b(\mathcal{A}_\alpha)$.

D'après ce corollaire, on a $\mathcal{A}_\alpha = F_{\beta\beta}$; or cela est vrai pour tout élément $\mathcal{B}$-nomal β , c'est-à-dire pour les éléments $\beta\mu$, $\forall\mu$. Donc $\mathcal{A}_\alpha = F_\beta = F_{\beta\mu}$ et par conséquent :

Si β est $\mathcal{B}$-nomal, l'équivalence F_β est l'équivalence $\mathcal{F}$-nomale et elle est égale à l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale.

On montre d'ailleurs le théorème suivant :

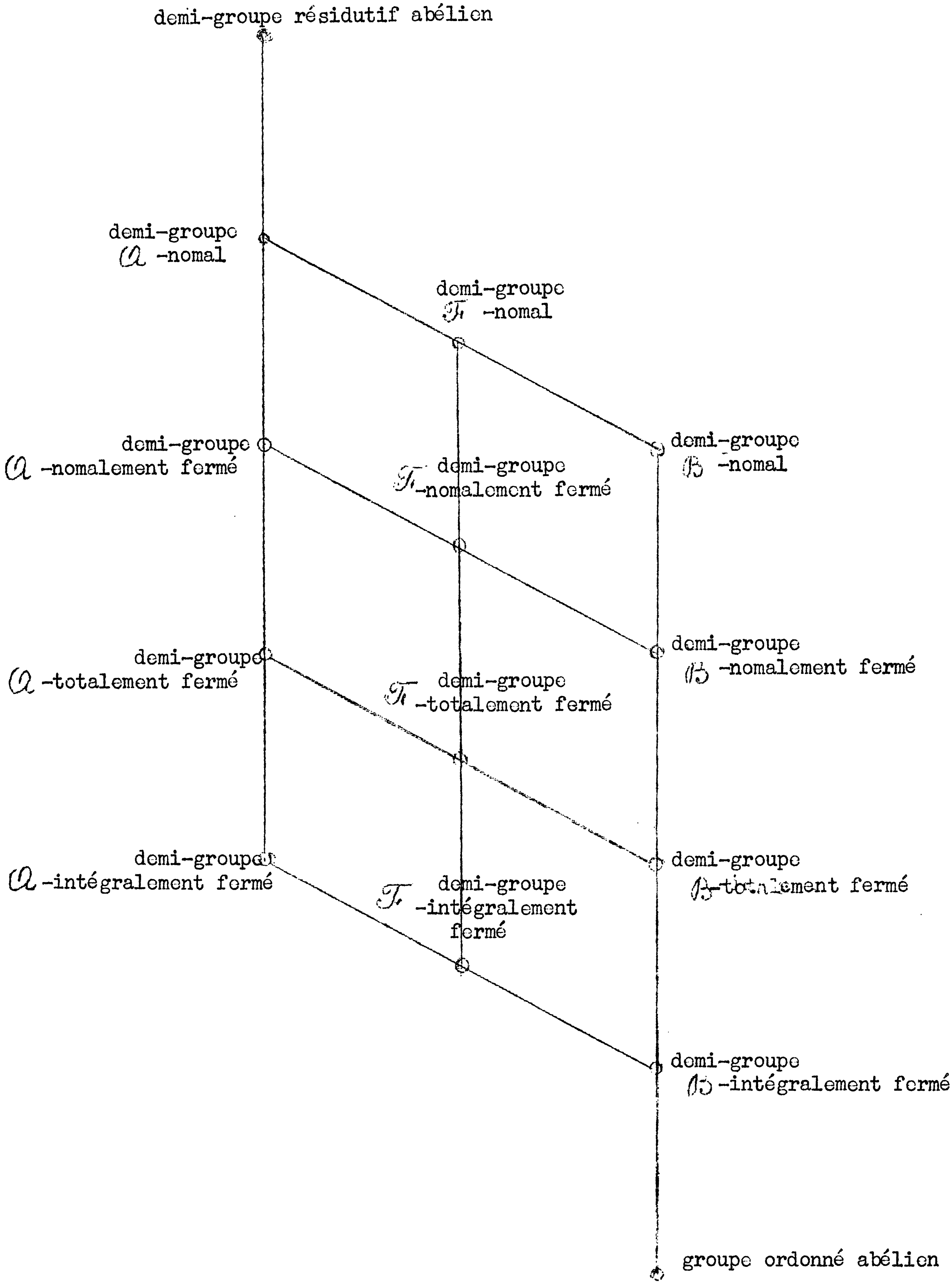
Théorème 14. Dans un demi-groupe $\mathcal{F}$-nomal G, l'équivalence $\mathcal{F}$-nomale est égale à l'équivalence $\mathcal{A}$-nomale, si et seulement si G est $\mathcal{B}$-nomal.

7.- Cette étude met en évidence d'étroites analogies entre les trois types d'équivalences, analogies qui se prolongent assez loin pour les équivalences nomales (le numérotage des énoncés montre bien le parallélisme de certaines propriétés). La raison profonde de ces analogies a été donnée par P. Dubreil, et R. Croisot, qui mettent en évidence le lien étroit qui existe entre la notion de correspondance de Galois et celle de résiduation[4].

Au cours de cet exposé, nous n'avons pas parlé des demi-groupes nomaux particuliers, obtenus en imposant aux demi-groupes $\mathcal{A}$-nomaux, $\mathcal{F}$-nomaux, $\mathcal{B}$-nomaux, des conditions de plus en plus fortes. Disons simplement qu'on obtient de la sorte le tableau d'implication ci-dessous :

---

[4] Propriétés générales de la résiduation en liaison avec les correspondances de Galois, par P. DUBREIL et R. CROISOT, Collectanea Mathematica (Barcelone).


demi-groupe résidutif abélien
demi-groupe
$\mathcal{A}$ -nomal
demi-groupe
$\mathcal{T}$ -nomal
demi-groupe
$\mathcal{A}$ -nomalement fermé
demi-groupe
$\mathcal{T}$-nomalement fermé
demi-groupe
$\mathcal{B}$ -nomal
demi-groupe
$\mathcal{A}$ -totalement fermé
demi-groupe
$\mathcal{T}$ -totalement fermé
demi-groupe
$\mathcal{B}$ -nomalement fermé
demi-groupe
$\mathcal{A}$ -intégralement fermé
demi-groupe
$\mathcal{T}$ -intégralement fermé
demi-groupe
$\mathcal{B}$-totalement fermé
demi-groupe
$\mathcal{B}$ -intégralement fermé
groupe ordonné abélien

Par exemple, les demi-groupes $\mathcal{A}$-intégralement fermés, $\mathcal{T}$-intégralement fermés et $\mathcal{B}$-intégralement fermés sont respectivement des demi-groupes $\mathcal{A}$-nomaux, $\mathcal{T}$-nomaux et $\mathcal{B}$-nomaux dans lesquels on a $\mu : \varepsilon = \mu , \forall \mu$, avec $\varepsilon = \alpha : \alpha$, où α est un élément $\mathcal{A}$-nomal quelconque.

Les implications considérées sont strictes ; on peut donner des exemples de chaque type du demi-groupe. Un procédé de fabrication de ces exemples consiste à considérer l'ensemble-produit E de deux ensembles E_1 et E_2 de nombres le plus souvent entiers, ordonnés et munis d'une multiplication commutative et associative ; selon ce qu'on veut obtenir, E_1 et E_2 sont bornés supérieurement, ou inférieurement, ou supérieurement et inférieurement.

-:-:-:-:-:-:-