J. Riguet

Travaux soviétiques récents sur la théorie des demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. nº 21, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A15_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/1956

-:-:-:-

23 avril 1956

Exposé n° 21

TRAVAUX SOVIÉTIQUES RÉCENTS SUR LA THÉORIE DES DEMI-GROUPES

par J. RIGUET.

Е.С. ЛЯПИН (E. C. LIAPIN) - Invertibilité potentielle des éléments d'un demi-groupe. - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК (Recueil mathématique), t. 38 (80), 1956, p. 373-388.

C'est une remarque triviale pour quiconque a déjà manipulé quelque peu des demi-groupes (des demi-groupes de matrices par exemple) que l'existence d'inverses pour certains éléments rend les calculs et les raisonnements beaucoup plus faciles. Il est donc assez naturel de se demander en présence d'un élément non invertible $x \in E$ d'un demi-groupe E s'il ne serait pas possible d'ajouter des éléments à E de manière à constituer un demi-groupe $F \supset E$ dans lequel x serait invertible. Cela n'est pas toujours possible. On va donner ici une condition nécessaire et suffisante pour la possibilité d'une telle extension et on illustrera les résultats par des exemples dans les demi-groupes de matrices infinies.

Le problème étant évidemment apparenté à celui de l'immersion des demi-groupes dans les groupes, il n'y a pas lieu de s'étonner que les raisonnements que l'on va faire soient apparentés à ceux faits par Malcev dans ses travaux bien connus résolvant le problème de l'immersion des demi-groupes dans les groupes. Il y a cependant une différence essentielle dans les résultats finaux puisque Malcev a montré qu'un demi-groupe doit satisfaire à une infinité de conditions pour pouvoir être immergé dans un groupe alors qu'une seule condition sera nécessaire et suffisante pour notre problème.

DEFINITIONS.

Nous dirons qu'un élément x d'un demi-groupe E est <u>invertible</u> si $Ex = xE = E$, autrement dit, si tout élément de E est divisible à gauche et divisible à droite par x .

Nous dirons que $x \in E$ est <u>régulier à gauche</u> (resp. à droite) si $xa = xb$

(resp. $ax = bx$) entraine $a = b$. Nous dirons que x est <u>régulier</u> lorsqu'il est régulier à gauche et à droite[1].

Nous dirons que $x \in E$ est <u>potentiellement invertible</u> dans E lorsqu'il existe un demi-groupe F contenant E tel que x soit invertible dans F .

Enfin dans le cas ou E admet un élément neutre e , nous dirons que $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ sont <u>mutuellement inverses</u> lorsque $x_1 x_2 = x_2 x_1 = e$.

QUELQUES PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

<u>Théorème 1. - L'ensemble des éléments invertibles d'un demi-groupe E est vide ou constitue un groupe dont l'élément neutre est élément neutre pour tout sous-demi-groupe de E .</u>

Soit en effet G l'ensemble des éléments invertibles de E . Supposons $G \neq \emptyset$ et soient g_1 , $g_2 \in G$. Alors $Eg_1 = g_1E = E = Eg_2 = g_2E$. Donc $Eg_1 g_2 = (Eg_1)g_2 = Eg_2 = E$ $g_1g_2E = g_1(g_2E) = g_1E = E$. Donc $g_1g_2 \in G$. Donc G est un demi-groupe. G a un élément neutre : en effet quel que soit $g \in G$, il existe $e_g \in E$, $i_g \in E$ tels que $ge_g = i_g g = g$. Or quels que soient $g \in G$ et $x \in E$, il existe $y \in E$ et $z \in E$ tels que $yg = gz = x$. Donc $xe_g = i_g x = x$. D'où, en prenant successivement x égal à i_g et à e_g , $i_g = e_g = i_g e_g$. Si nous désignons par e cet élément, on a, quel que soit $x \in E$, $xe = ex = x$. e est bien élément neutre, et appartient à G puisque de toute évidence invertible.

Enfin pour tout élément $g \in G$, il existe un élément $g' \in G$ tels que g et g' soient mutuellement inverses, car quel que soit $g \in G$, il existe $g' \in E$ et $g'' \in E$ tels que $gg' = g''g = e$. Mais alors $g'' = g''e = g''g\, g' = $ $= eg' = g'$. Donc, quel que soit $g \in G$, il existe $g' \in E$ tel que $gg' = g'g = e$. Mais alors $g' \in G$ car on a $E = Ee = (Eg)g' = Eg'$, $E = eE = g'gE = g'E$ d'où $Eg' = g'E = E$ c'est-à-dire $g' \in G$.

<u>Corollaire. - Pour qu'un élément</u> $x \in E$ <u>d'un demi-groupe</u> E <u>soit invertible dans</u> E , <u>il faut et il suffit que</u> E <u>possède un élément neutre et qu'il existe dans</u> E <u>un élément</u> x' <u>tel que</u> x <u>et</u> x' <u>soient mutuellement inverses.</u>

D'après le théorème 1 la condition est nécessaire. Elle est suffisante, puisque $E = Ee = Ex'x \subset Ex \subset E$ $E = eE = xx'E \subset xE \subset E$ d'où $Ex = xE = E$ c'est-à-dire x est invertible.

---

(1) <u>Régulier</u> est donc synonyme de <u>simplifiable</u>.

<u>Théorème 2. - Tout élément potentiellement invertible d'un demi-groupe est régulier</u>.

En effet, soit $x \in E$ potentiellement invertible donc invertible dans un certain $F \supset E$. D'après le corollaire, F possède un élément neutre e et un élément x' tel que $xx' = x'x = e$. Donc $xa = xb$ implique $x'xa = x'xb$, c'est-à-dire $a = b$.

<u>Théorème 3. - Si</u> x <u>et</u> y <u>sont deux éléments du demi-groupe</u> E <u>tels que</u> $xy = x$ <u>et si</u> x <u>est régulier alors</u> E <u>admet un élément neutre</u> e <u>et</u> $y = e$.

Rappelons la démonstration de ce théorème bien connu[2].

Soit u un élément arbitraire de E . On a $xx = xyx$ et puisque x est régulier à gauche $x = yx$. D'où $ux = uyx$ et puisque x est régulier à droite $u = uy$. Mais d'après l'hypothèse $xu = xyu$ donc puisque x est régulier à gauche $u = yu$. Donc $u = uy = yu$. y est donc bien élément neutre

PRODUITS LIBRES DE DEMI-GROUPES.

Soient $E_1 , E_2 , \ldots , E_k$, k demi-groupes deux à deux disjoints, le signe de multiplication sur ces demi-groupes étant noté $\top$, E leur ensemble somme qui est donc partagé en k classes par $E_1 , \ldots , E_k$.

Soit H la syntaxe (autrement dit le sous-ensemble de mots) constituée par tous les mots construits à l'aide de l'alphabet E et satisfaisant à la seule condition : deux lettres consécutives dans un même mot n'appartiennent jamais à la même classe. Nous appellerons alors <u>produit libre des demi-groupes</u> $E_1 , \ldots , E_k$ la syntaxe H munie de la structure de demi-groupe grâce à la multiplication $\top$ définie par la formule valable quels que soient $w_1 \in H$ et $w_2 \in H$

$$w_1 \top w_2 = \left| \begin{array}{ll} w_1 w_2 & \text{s'il n'existe pas } 1 \leq i \leq k \text{ tel que } w_1 \in HE_i \text{ , } w_2 \in E_i H \\ & \\ w_1'(s \top t)\, w_2' & \text{s'il existe } 1 \leq i \leq k \text{ et } s , t \in E_i \text{ tels que} \\ & w_1 = w_1' s \text{ , } w_2 = t w_2' \text{ [3] .} \end{array} \right.$$

---

(2) Voir par exemple P. DUBREIL, Algèbre, t. 1, 2e éd., chap. II , paragraphe 5, théorème et corollaire 1, p. 86.

(3) Si w_1 et w_2 sont deux nots, $w_1 w_2$ désigne le mot obtenu par concaténation c'est-à-dire en écrivant w_2 à la suite de w_1 .

Cette multiplication est en effet associative : démonstration immédiate H contient évidemment E_i comme sous-demi-groupe.

Cette définition est évidemment calquée sur celle du produit libre de groupes. Ce n'en est pourtant pas une généralisation immédiate : si les E_i sont des groupes alors leur produit libre suivant la définition ci-dessus n'est pas un groupe. En effet un produit libre de demi-groupes n'a pas d'élément neutre. La construction généralisant le produit libre de groupes n'est pas difficile à obtenir si nous admettons que les E_i ont en commun un sous-demi-groupe T . Alors on peut définir un produit libre de demi-groupes ayant en commun un sous-groupe (Voir les travaux de Kuroch généralisés par B. H. Neumann : notion d'amalgame).

Dans le cas où T est vide, on retombe sur la définition ci-dessus. Dans le cas où $T = \{e\}$, e étant un élément neutre commun aux E_i , et où les E_i sont des groupes, on obtient le produit libre de groupes E_i . Dans le cas où T est un sous-groupe $\neq \{e\}$, et où les E_i sont des groupes, nous obtenons un produit libre de groupes amalgamé par T .

LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE.

Soit E un demi-groupe, x un élément régulier de E , $\bar{X}$ le demi-groupe cyclique libre engendré par $\bar{x}$ ($\bar{x}$ considéré comme une lettre).

Soit F le produit libre de E et de $\bar{X}$. Alors quel que soit $u \in F$, il existe, déterminés d'une manière unique, un entier $n \geqslant 1$, des entiers $\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-1}$ tous supérieurs ou égaux à 1, et des éléments $a_1 , \dots , a_n \in E$ (a_1 et a_n pouvant éventuellement dans le cas $n > 1$ être de symboles vides), tels que $u = a_1 \bar{x}_1^{\alpha_1} a_2 \bar{x}^{\alpha_2} \dots a_{n-1} \bar{x}^{\alpha_{n-1}} a_n$.

Considérons alors les trois éventualités suivantes, mutuellement exclusives :

1) $n = 1$ ou $n \neq 1$ et a_1 non divisible à droite par x , $a_2 , \dots , a_{n-1}$ non divisibles par x et a_n non divisible par x à gauche.

2) $n \neq 1$ et $a_1 , \dots , a_{k-1}$ $(k \neq 1)$ non divisibles par x et a_k divisible par x à gauche.

3) $n \neq 1$ et $a_1 , \dots , a_{k-1}$ $(k \neq n)$ non divisibles par x et a_k divisible par x à droite et non divisible par x à gauche.

On définit alors une application σ de F dans F par

$$\sigma(u) = \begin{cases} u \quad \text{dans le cas 1)} \\ a_1\bar{x}^{\alpha_1} \ldots a_{k-1}\bar{x}^{\alpha_{k-1}-1} a''_k \bar{x}^{\alpha_k} \; a_{k+1}\bar{x}^{\alpha_{k+1}} \ldots a_n \\ \qquad\qquad \text{dans le cas 2) avec } a_k = xa''_k \\ a_1\bar{x}^{\alpha_1} \ldots a_{k-1}\bar{x}^{\alpha_{k-1}} \; a'_k\bar{x}^{\alpha_{k-1}} \; a_{k+1}\bar{x}^{\alpha_{k+1}} \ldots a_n \\ \qquad\qquad \text{dans le cas 3) avec } a_k = a'_k x \end{cases}$$

a'_k et a''_k étant déterminés de manière unique vu la régularité de x , σ est bien une application de F dans F .

Nous allons introduire dans F les deux relations binaires R_1 et R_2 définies de la manière suivante :

$(u,v) \in R_1$ ou encore $u \longrightarrow v$ si et seulement s'il existe $t_1 \in F$, $t_2 \in F$ (pouvant éventuellement être des signes vides) tels que

$$u = t_1 t_2 \quad , \quad v = t_1 x\bar{x} t_2$$

$(u,v) \in R_2$ ou encore $u \multimap v$ si et seulement s'il existe $t_1 \in F$, $t_2 \in F$ (pouvant éventuellement être des signes vides) tels que

$$u = t_1 t_2 \quad , \quad v = t_1 \bar{x} x t_2$$

On posera $R = R_1 \cup \bar{R}_1^1 \cup R_2 \cup \bar{R}_2^1 \cup \Delta$ où Δ désigne l'égalité. $(u , v) \in R$ sera encore noté $u \sim v$.

<u>Lemme 1</u>. - Si u , v , w_1 , w_2 <u>sont des éléments quelconques de</u> F ,

$u \longrightarrow v$ <u>implique</u> $w_1 u w_2 \longrightarrow w_1 v w_2$

$u \multimap v$ <u>implique</u> $w_1 u w_2 \multimap w_1 v w_2$

$u \sim v$ <u>implique</u> $w_1 u w_2 \sim w_1 v w_2$

Démonstration évidente

<u>Lemme 2</u>. - Si u et v <u>sont des éléments quelconques de</u> F ,

$u \longrightarrow v$ <u>implique</u> $\sigma(v) = u$ ou $\sigma(u) \longrightarrow \sigma(v)$

$u \multimap v$ <u>implique</u> $\sigma(v) = u$ ou $\sigma(u) \multimap \sigma(v)$

Démontrons[4] la première de ces deux propositions. Par hypothèse $u \longrightarrow v$. Il existe donc un entier i tel que, si l'on pose $u'_i = a_1 x^{\alpha_1} \ldots a_{i-1}$, $u''_i = a_i\bar{x}^{\alpha_i} \ldots a_n$ on ait $u = u'_i\bar{x}^{\alpha_{i-1}} a_i\bar{x}^{\alpha_i} u''_{i+1}$, $v = u'_i\bar{x}^{\alpha_{i-1}} v_i \, u''_{i+1}$

(4) Cette démonstration n'est pas conforme à la lettre à celle de Liapin. Elle en conserve cependant l'esprit.

avec $a_i\bar{x}^{\alpha_i} \longrightarrow v_i$ et avec v_i de l'un des deux types

$$v_i = \left| \begin{array}{ll} b_{i_1} x\bar{x}\, b_{i_2} \bar{x}^{\alpha_i} & \text{où } b_{i_1} b_{i_2} = a_i \text{, } b_{i_2} \text{ pouvant être éventuellement vide} \\ a_i \bar{x}^{\beta_i}\, x\bar{x}\, \bar{x}^{\gamma_i} = a_i \bar{x}^{\beta_i}\, x\bar{x}^{\gamma_i+1} & \text{où } \beta_i + \gamma_i = \alpha_i \text{, } \gamma_i \text{ pouvant être éventuellement nul} \end{array} \right.$$

1) Supposons que a_1 est divisible à droite par x ou que a_2 est divisible par x ou ... ou que a_{i-1} soit divisible par x. On a

$$\sigma(v) = \sigma(u_i' \bar{x}^{\alpha_{i-1}}) v_i\, u''_{i+1}$$

$$\sigma(u) = \sigma(u_i' \bar{x}^{\alpha_{i-1}}) a_i \bar{x}^{\alpha_i}\, u''_{i+1}$$

Donc d'après le lemme 1 $\sigma(u) \longrightarrow \sigma(v)$.

2) Supposons que a_1 ne soit pas divisible par x à droite et que a_2 ne soit pas divisible par x et ... et que a_{i-1} ne soit pas divisible par x et que a_i soit divisible par x à gauche : $a_i = x a''_i$. On a

$$\sigma(u) = u_i' \bar{x}^{\alpha_{i-1}-1}\, a''_i\, \bar{x}^{\alpha_i}\, u''_{i+1}$$

Supposons v_i du premier type : $v = u_i' \bar{x}^{\alpha_{i-1}}\, b_{i_1} x\bar{x}\, b_{i_2} \bar{x}^{\alpha_i}\, u''_{i+1}$

- ou b_{i_1} est divisible à gauche par x : $b_{i_1} = x b''_{i_1}$ on a alors

$$\sigma(v) = u_i' \bar{x}^{\alpha_{i-1}-1}\, b''_{i_1} x\bar{x}\, b_{i_2} \bar{x}^{\alpha_i}\, u''_{i+1}$$

Alors $\sigma(u) \longrightarrow \sigma(v)$ d'après le lemme 1 puisque $a''_i \longrightarrow b''_{i_1} x\bar{x}\, b_{i_2}$ (En effet d'après la régularité de x, $a''_i = b''_{i_1} b_{i_2}$)

- ou b_{i_1} n'est pas divisible à gauche par x. Alors

$$\sigma(v) = u_i' \bar{x}^{\alpha_{i-1}}\, b_{i_1} b_{i_2}\, \bar{x}^{\alpha_i}\, u''_{i+1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sigma(v) = u \text{ puisque}$$

$a_i = b_{i_1} b_{i_2}$.

Supposons v_i du deuxième type : $v = u_i' \bar{x}^{\alpha_{i-1}} x a''_i \bar{x}^{\beta_i}\, x\bar{x}^{\gamma_i+1}\, u''_{i+1}$

$$\sigma(v) = u_i' \bar{x}^{\alpha_{i-1}-1}\, a''_i\, \bar{x}^{\beta_i}\, x\bar{x}\, \bar{x}^{\gamma_i}\, u''_{i+1}$$

Alors $\sigma(v) \longrightarrow \sigma(u)$ puisque $\bar{x}^{\alpha_i} \longrightarrow \bar{x}^{\beta_i}\, x\bar{x}\, \bar{x}^{\gamma_i}$

3) Supposons que a_1 ne soit pas divisible par x à droite, que a_2 ne soit pas divisible par x, ... , que a_{i-1} ne soit pas divisible par x que a_i ne soit pas divisible par x à gauche et soit divisible par x à droite: $a_i = a_i' x$.

On a $\sigma(u) = u_i' \bar{x}^{\alpha_i - 1} a_i' \bar{x}^{\alpha_i - 1} u_{i+1}''$

Supposons v_i du premier type : $v = u_i' \bar{x}^{\alpha_i - 1} b_{i_1} x\bar{x} b_{i_2} \bar{x}^{\alpha_i} u_{i+1}''$.

Puisque b_{i_1} n'est pas divisible à gauche par x on a

$$\sigma(v) = u_i' \bar{x}^{\alpha_i - 1} b_{i_1} b_{i_2} \bar{x}^{\alpha_i} u_{i+1}'' \quad \text{c'est-à-dire } \sigma(v) = u .$$

Supposons v_i du second type : $v = u_i' \bar{x}^{\alpha_i - 1} a_i' x\bar{x}^{\beta_i} x\bar{x}^{\gamma_i + 1} u_{i+1}''$

$$\sigma(v) = u_i' \bar{x}^{\alpha_i - 1} a_i' \bar{x}^{\beta_i - 1} x\bar{x}^{\gamma_i + 1} u_{i+1}'' . \text{ Alors } \sigma(u) \longrightarrow \sigma(v)$$

d'après le lemme 1 puisque $\bar{x}^{\alpha_i - 1} \longrightarrow \bar{x}^{\beta_i - 1} x\bar{x}\,\bar{x}^{\gamma_i}$

4) Supposons que a_1 ne soit pas divisible par x à droite, que a_2 ne soit pas divisible par x, ... , que a_i ne soit pas divisible par x et que a_{i+1} ou a_{i+2} ... ou a_{i-1} soit divisible par x ou que a_n soit divisible par x à gauche.

Alors $\sigma(v)$ s'obtient en simplifiant par $x\bar{x}$ dans v_i c'est-à-dire

$\sigma(v) = u_i' \bar{x}^{\alpha_i - 1} a_i \bar{x}^{\alpha_i} u_{i+1}''$. Donc $\sigma(v) = u$.

Dans tous les cas on a donc bien $\sigma(u) \longrightarrow \sigma(v)$ ou $\sigma(v) = u$.

La seconde proposition du lemme 2 se démontrerait d'une façon analogue.

<u>Lemme 3</u>. - <u>Si</u> $u \sim v$ <u>et si</u> $\sigma^r(u) \in E$ <u>alors</u> $\sigma^{r+1}(v) = \sigma^r(u)$.

Montrons tout d'abord ceci pour $r = 0$, $\sigma^0(u)$ étant alors par définition égal à u.

Il faut montrer que si $u \sim v$ et si $u \in E$ alors $\sigma(v) = u$. Puisque $u \sim v$ on a

- ou bien $u = v$, mais alors $\sigma(v) = \sigma(u) = u$
- ou bien $v \longrightarrow u$, mais ceci est impossible puisque $u \in E$
- ou bien $v \longrightarrow_0 u$, mais ceci est impossible puisque $u \in E$
- ou bien $u \longrightarrow v$, alors il existe t_1, $t_2 \in F$ tels que $u = t_1 t_2$ $v = (t_1 x)\bar{x} t_2$.

Puisque $u \in E$, on a $t_1 \notin E$, $t_2 \in E$, $t_1 x \in E$. Donc $\sigma(v) = t_1 t_2 = u$.

– ou bien $u \multimap v$, alors il existe t_1, $t_2 \in F$ tels que $u = t_1 t_2$ $v = t_1 \bar{x}(x t_2)$. Puisque $u \in E$, on a $t_1 \in E$, $t_2 \in E$, $x t_2 \in E$. Si t_1 n'est pas divisible par x à droite, $\sigma(v) = t_1 t_2 = u$. Si t_1 est divisible par x à droite $t_1 = t_1' x$ $v = t_1' x \bar{x}(x t_2)$ alors $\sigma(v) = t_1'(x t_2) = t_1 t_2 = u$.

Donc le lemme est démontré pour $r = 0$.

Supposons maintenant que $r \neq 0$ et qu'il existe un entier positif $k \leq r$ tel que $\sigma^{k+1}(v) = \sigma^k(u)$ ou $\sigma^k(v) = \sigma^k(u)$ ou $\sigma^{k-1}(v) = \sigma^k(u)$. En multipliant les deux membres par σ^{r-k} dans le premier cas, on a $\sigma^{r+1}(v) = \sigma^r(u)$. Dans le second cas en multipliant par σ^{r-k+1}, on a $\sigma^{r+1}(v) = \sigma^{r+1}(u) = \sigma^r(u)$ puisque $\sigma^r(u) \in E$. Dans le troisième cas en multipliant par σ^{r-k+2}, on a $\sigma^{r+1}(v) = \sigma^{r+2}(u) = \sigma^{r+1}(u) = \sigma^r(u)$ puisque $\sigma^r(u) \in E$. Le lemme est donc encore démontré sous cette hypothèse.

Supposons enfin que pour $k = 1, 2, \dots, r$ on ait $\sigma^{k+1}(v) \neq \sigma^k(u)$, $\sigma^k(v) \neq \sigma^k(u)$, $\sigma^{k-1}(v) \neq \sigma^k(u)$ $u \sim v$ entraine $\sigma(u) \sim \sigma(v)$ d'après le lemme 1, puisque, si l'on avait $\sigma(v) = u$ ou $\sigma(u) = v$, on aurait $\sigma^2(v) = \sigma(u)$ ou $\sigma^2(u) = \sigma(v)$ contre l'hypothèse pour $k = 1$.

Mais $\sigma(u) \sim \sigma(v)$ entraine $\sigma^2(u) \sim \sigma^2(v)$ d'après le même raisonnement s'appuyant sur l'hypothèse pour $k = 2$. On arrive ainsi en poursuivant jusqu'à $k = r$ à $\sigma^r(u) \sim \sigma^r(v)$. Mais $\sigma^r(v) \in E$. Donc en appliquant à $\sigma^r(u)$ et $\sigma^r(v)$ le cas $r = 0$, on a : $\sigma^{r+1}(v) = \sigma^r(u)$.

Le lemme est donc bien démontré dans tous les cas.

<u>Lemme 4</u>. – <u>Si</u> $u_1 \in E$, $u_k \in E$ <u>et s'il existe</u> $u_2, \dots, u_{k-1} \notin F$ <u>tels que</u> $u_1 \sim u_2 \sim \dots \sim u_k$, <u>alors</u> $u_1 = u_k$. <u>Autrement dit</u> $\Delta_E \bar{R} \Delta_E = \Delta_E$ ($\bar{R}$ <u>désignant la fermeture transitive de</u> R).

En effet par application successive du lemme 2 on a $u_1 \in E$ donc $u_1 \sim u_2$ et $\sigma(u_1) \in E$ donc $\sigma^2(u_2) = \sigma(u_1) \in E$. Mais $u_2 \sim u_3$, donc $\sigma^3(u_3) = \sigma^2(u_2) \in E$. Mais $u_3 \sim u_4$, donc $\sigma^4(u_4) = \sigma^3(u_3) \in E$, etc.; jusqu'à $\sigma^k(u_k) = \sigma^{k-1}(u_{k-1}) \in E$. Donc $\sigma^k(u_k) = u_1$. Or, par hypothèse, $u_k \in E$ donc $\sigma^k(u_k) = u_k$. Donc $u_1 = u_k$

CONSÉQUENCES DES LEMMES.

Il résulte immédiatement du lemme 1 que $\bar{R}$, fermeture transitive de R, est une relation d'équivalence compatible avec la multiplication. Donc $\frac{F}{\bar{R}}$ est un demi-groupe. D'après le lemme 3, $\frac{F}{\bar{R}}$ contient un sous-demi-groupe $\frac{E}{\bar{R}}$ isomorphe à E.

$\bar{R}(x)$ est un élément invertible du demi-groupe $\frac{F}{\bar{R}}$. On a en effet

$$\bar{R}(x)\ \bar{R}(\bar{x}\ u) \subset \bar{R}(x\bar{x}\,u) = \bar{R}(u)$$
$$\bar{R}(u\bar{x})\ \ \bar{R}(x) \subset \bar{R}(u\bar{x}x) = \bar{R}(u)$$

Théorème 4. - Pour qu'un élément d'un demi-groupe soit potentiellement invertible, il faut et il suffit qu'il soit régulier.

La condition est nécessaire d'après le théorème 2. Elle est suffisante, car si x est élément régulier du demi-groupe E, on peut immerger E dans le demi-groupe $\frac{F}{\bar{R}}$ dans lequel $\bar{R}(x)$ est invertible.

Remarques. - Si E a un élément neutre e, $\bar{R}(e)$ est élément neutre de $\frac{F}{\bar{R}}$.

Si $x \in E$ est invertible dans E, alors $\frac{F}{\bar{R}}$ est isomorphe à E.

DEMI-GROUPES DE MATRICES INFINIES.

On sait que si on définit formellement le produit de deux matrices infinies de la manière habituelle, ce produit n'a de sens que si les séries qui remplacent les sommes finies habituelles sont convergentes et que par ailleurs les quatre produits AB, BC, $(AB)C$, $A(BC)$ peuvent fort bien être définis sans que l'on ait la loi associative : $(AB)C = A(BC)$ (5).

Un ensemble $\mathfrak{A}$ de matrices infinies sera dit un demi-groupe de matrices, si, quel que soient A, $B \in \mathfrak{A}$ le produit AB est défini, appartient à $\mathfrak{A}$, et si la loi associative est satisfaite. L'ensemble des matrices n'ayant qu'un nombre fini d'éléments non nuls dans chaque ligne et chaque colonne constitue un demi-groupe de matrices que nous désignerons par $\mathfrak{A}_1$. Toute matrice $A \in \mathfrak{A}_1$ est telle que, quelle que soit la matrice infinie X, les produits XA et AX sont tous deux définis.

$\mathfrak{A}_1$ contient les continuants, c'est-à-dire les matrices de la forme

---

(5) Par exemple prendre $A = C =$ matrice dont tous les éléments sont égaux à 1 et $B = \| b_{i,j} \|$ telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{i,j} \neq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}$ (Une telle série double est donnée par exemple dans Bourbaki, Topologie, chap. IV, paragraphe 7, exercice 17).

$$\begin{Vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \\ 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

Parmi les continuants, il y en a qui admettent un inverse (par exemple la matrice unité), d'autres qui n'en admettent pas. Il y en a aussi qui ne sont pas potentiellement invertibles. C'est le cas de

$$H = \left\Vert \begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & & 0 & \\ \hline & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{array} \right\Vert$$

En effet si $S_\lambda = \left\Vert \begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \\ \hline 0 & & 0 \end{array} \right\Vert$ $\quad HS_{\lambda_1} = HS_{\lambda_2}$ pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Parmi les continuants se trouvent les matrices de Jacobi dont les éléments sont réels et bornés en valeur absolue par une constante donnée et tels que
$\alpha_k = \gamma_{k-1} > 0 \quad k = 1, 2, \ldots$

De telles matrices sont intéressantes car dans l'espace de Hilbert, on peut, par changement d'axe, transformer la matrice, correspondante à un opérateur borné auto-conjugué dont le spectre est discontinu, en une matrice de Jacobi.

<u>Théorème</u>. - <u>Dans</u> $\mathfrak{A}_1$ <u>toute matrice de Jacobi est potentiellement invertible</u>.

En effet soient $S_1 = \Vert \sigma_{ij}^{(1)} \Vert$ et $S_2 = \Vert \sigma_{ij}^{(2)} \Vert$ deux matrices telles que, J étant une matrice de Jacobi, on ait $S_1 J = S_2 J$. Posons
$A = S_1 J = S_2 J$, $A = \Vert a_{ij} \Vert$.
On a $\beta_1 \sigma_{k1}^{(p)} + \gamma_1 \sigma_{k2}^{(p)} = a_{k_1}$, $\gamma_{\ell-1} \sigma_{k(\ell-1)} + \gamma_\ell \sigma_{k\ell} + \gamma_\ell \sigma_{k(\ell+1)} =$
$= a_{k\ell} \quad (\ell = 2, 3, \ldots)$.

Puisque S_1 , $S_2 \in \mathfrak{A}_1$ il existe un entier N tel que, quel que soit $i > N$ on ait $\sigma_{ki}^{(1)} = \sigma_{ki}^{(2)} = 0$.

A partir des $N-1$ relations, $\sigma_{kN}^{(p)}$ se définit d'une manière unique : $\sigma_{kN}^{(1)} = \sigma_{kN}^{(2)}$.

A partir des $N-2$ relations, $\sigma_{k(N-1)}^{(p)}$ se définit d'une manière unique : $\sigma_{k(N-1)}^{(1)} = \sigma_{k(N-1)}^{(2)}$.

En continuant le raisonnement on constate que la k-ième colonne de S_1 coïncide la k-ième colonne de S_2 . Donc $S_1 = S_2$.

On montrerait de même que $JS_1 = JS_2$ entraine $S_1 = S_2$.

Puisque dans $\mathfrak{A}_1$ toute matrice de Jacobi est potentiellement invertible, il est assez naturel de se demander si pour toute matière de Jacobi il n'existait pas un demi-groupe de matrices dans lequel cette matrice serait invertible. Le théorème suivant montre qu'il n'en est rien.

Théorème. - Il n'existe pas de demi-groupe de matrices dans lequel la matrice de Jacobi

$$J_0 = \left\| \begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots \end{matrix} \right\|$$

soit invertible.

Supposons qu'il existe un tel demi-groupe $\mathfrak{A}$. D'après le corollaire du théorème 1 $\mathfrak{A}$ a un élément unité $I = \| \varepsilon_{ij} \|$ et J_0 doit admettre un inverse $D = \| d_{ij} \|$.

Puisque $I J_0 = J_0$ on a

$$- 2\, \varepsilon_{k1} + \varepsilon_{k2} = 0$$

$$\varepsilon_{ki} - 2\, \varepsilon_{k(i+1)} + \varepsilon_{k(i+2)} = 0 \qquad (i = 1 \,;\, 2 \,;\, \dots \,;\, k-3)$$

$$\varepsilon_{k(k-2)} - 2\, \varepsilon_{k(k-1)} + \varepsilon_{kk} = 1$$

$$\varepsilon_{k(k-1)} - 2\, \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{k(k+1)} = -2$$

$$\varepsilon_{kk} - 2\, \varepsilon_{k(k+1)} + \varepsilon_{k(k+2)} = 1$$

$$\varepsilon_{kj} - 2\, \varepsilon_{k(j+1)} + \varepsilon_{k(j+2)} = 0 \qquad (j = k+1 \,,\, k+2 \,,\, \dots)$$

Désignons ε_{k1} par λ et exprimons les ε_{ki} en fonction de λ :

$\varepsilon_{k1} = \lambda$, $\varepsilon_{k2} = 2\lambda$, ... , $\varepsilon_{ki} = i\lambda$, ... , $\varepsilon_{kk-1} = (k-1)\lambda$,
$\varepsilon_{kk} = k\lambda + 1$
$\varepsilon_{kk+1} = (k+1)\lambda$, ... , $\varepsilon_{kj} = j\lambda$, ...

De la même manière, en exprimant que $J_0 I = J_0$ et en désignant ε_{ik} par τ on a $\varepsilon_{ik} = i\tau$ $(i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots)$, $\varepsilon_{kk} = k\tau + 1$
En égalant les deux valeurs pour ε_{kk} il vient $\lambda = \tau$.

L'élément à l'intersection de la k-ième ligne et de la k-ième colonne de II est égal à

$$\lambda^2 + (2\lambda)^2 + \dots [(k-1)\lambda]^2 + (k\lambda + 1)^2 + [(k+1)\lambda]^2 + \dots$$

Cette série ne converge que pour $\lambda = 0$. Donc I est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale tous égaux à 1 .

$DJ_0 = I$ donne alors

$$-2\,d_{11} + d_{12} = 1 \qquad d_{1k} - 2d_{1(k+1)} + d_{1(k+2)} = 0$$

. Donc si l'on pose $d_{11} = \sigma$, on a

$$d_{11} = \sigma \;,\; d_{12} = 2\sigma + 1 \;,\; d_{13} = 3\sigma + 2 \;, \dots \quad d_{1i} = i\sigma + (i-1)$$

De même $J_0 D = I$ donne

$$d_{11} = \sigma \;,\quad d_{12} = 2\sigma + 1 \;,\qquad d_{i1} = i\sigma + i - 1$$

Mais alors le premier élément de la le ligne de DD doit être égal à

$$d_{11}^2 + d_{12}\,d_{21} + d_{13}\,d_{31} + \dots = \sigma^2 + (2\sigma + 1)^2 + (3\sigma + 2)^2 + \dots$$

Cette série diverge quel que soit la valeur de σ . Le produit DD n'existe pas, $\mathfrak{A}$ n'est pas un demi-groupe, contre l'hypothèse.

*

* *

Un élément potentiellement invertible dans un demi-groupe peut très bien ne plus l'être dans un sur-demi-groupe.

Considérons la matrice de Jacobi J avec $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_k = -\frac{k^3 + k^2 + 1}{(k+1)!}$ $(k = 2, 3, \dots)$ $\gamma_\ell = \frac{1}{\ell!}$ $(\ell = 1, 2, \dots)$

Considérons la matrice $U = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2!} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{3!} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \end{matrix} \right\|$ et posons $W = U + J$

On voit facilement que $JU = 0$. D'où $JW = JJ$ et comme $J \neq W$, J n'est potentiellement invertible dans aucun demi-groupe de matrices contenant à la fois J et W .

Soit $\mathfrak{A}_2$ l'ensemble des matrices dont chaque ligne n'a qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

$\mathfrak{A}_3$ l'ensemble des matrices dont les éléments constituent une série double absolument convergente.

$\mathfrak{A}_4$ l'ensemble des matrices où chaque ligne et chaque colonne constitue une série absolument convergente.

On vérifie facilement que $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ sont des demi-groupes de matrices contenant les matrices J et W , et dans aucun desquels, par conséquent, J n'est potentiellement invertible bien que J soit potentiellement invertible dans $\mathfrak{A}_1$.

Si $\mathfrak{A}_5$ est l'ensemble des matrices correspondant aux opérateurs linéaires bornés de l'espace de Hilbert et si $\mathfrak{A}_6$ est l'ensemble des matrices correspondant aux opérateurs linéaires bornés complètement continus de l'espace de Hilbert, $\mathfrak{A}_5$ et $\mathfrak{A}_6$ sont des demi-groupes de matrices qui contiennent eux aussi, des matrices de Jacobi non potentiellement invertibles par rapport à eux.