Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

J. Petresco

Un théorème de construction pour les relations fondamentales

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. n° 19, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A13_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/56
-:-:-:-

9 avril 1956

Exposé n° 19

UN THÉORÈME DE CONSTRUCTION POUR LES RELATIONS FONDAMENTALES,

par J. PETRESCO.

-:-:-:-:-

Définir un groupe G avec des générateurs et des relations fondamentales, revient d'après le théorème de Dyck, à :

a) se donner un groupe libre $[[A]]$ par une base libre : $A = \{a_i\}$;

b) se donner un sous-groupe normal $N_A[H]$ de $[[A]]$ par une de ses bases, en tant que sous-groupe normal : $H = \{h_k(a_i)\}$;

c) considérer $[[A]]/N_A[H]$.

L'adaptation des procédés introduits dans [2] , permet l'étude des bases H de $N_A[H]$ en étroite analogie avec les bases d'un groupe libre et finalement la construction, à partir d'un système de relations fondamentales concernant le système de générateurs A du groupe G , de tout autre système de relations fondamentales concernant A .

1.- A-groupe libre.

Considérons un groupe K et deux sous-ensembles A et B de ce groupe. Si $R = \{r_1 , r_2 , \dots , r_n\}$ est une suite où l'on a, soit $r_i \in A \cup A^{-1}$ (ce seront les A-éléments de R), soit $r_i \in B \cup B^{-1}$ (ce seront les B-éléments de R) , notons R_A et R_B les sous-suites de R obtenues en supprimant, soit les B-éléments, soit les A-éléments, respectivement. L'ensemble des produits $\bar{R}$ constitue le sous-groupe $[A , B]$; convenons de noter 0 , la suite vide, et écrivons $\bar{0} = 1$. Le sous-ensemble des $\bar{R}$ avec $\bar{R}_A = 1$ est un sous-groupe de $[A , B]$, que nous appelons le A-groupe engendré par B et notons $N_A[B]$.

1.1.- $N_A[B]$ est le sous-groupe normal engendré par B dans $[A , B]$.

D'après 1.2 de [1] , le sous-groupe normal N engendré par B dans $[A , B] = [[A] , [B]]$ est l'ensemble des $\prod a_i b_i$ avec $a_i \in [A]$, $b_i \in [B]$,

$\Pi a_i = 1$; mais $a_i = \prod_j \alpha_{ij}$, $\alpha_{ij} \in A \cup A^{-1}$ et $b_i = \prod_k \beta_{ik}$, $\beta_{ik} \in B \cup B^{-1}$, de sorte qu'on peut écrire

$$\Pi a_i b_i = \prod_i \left(\prod_j \alpha_{ij} \prod_k \beta_{ik} \right) = \bar{R}$$

et l'on a $\bar{R}_A = \prod_i \prod_j \alpha_{ij} = a_i = 1$, donc $\Pi a_i b_i \in N_A[B]$, $N \subseteq N_A[B]$.

Réciproquement si $\bar{R} \in N_A[B]$, c'est-à-dire si $\bar{R}_A = 1$, on peut écrire

$$\bar{R} = \Pi a_i b_i$$

où $a_i \in A \cup A^{-1} \cup 1 \subseteq [A]$, $b_i \in B \cup B^{-1} \cup 1 \subseteq [B]$, et dans ce cas $\bar{R}_A$ et Πa_i ne diffèrent que par un nombre de facteurs égaux à 1 , de sorte que $\Pi a_i = \bar{R}_A = 1$, donc $\bar{R} \in N$, $N_A[B] \subseteq N$.

Nous allons appeler A-<u>suite d'éléments de</u> $B \cup B^{-1}$, une suite R avec $\bar{R}_A = 1$; $\bar{R}$ sera, dans ces mêmes conditions, un A-<u>produit</u> et $\bar{R} = 1$, une A-<u>relation</u> entre les éléments de $B \cup B^{-1}$.

Un sous-groupe K^* de K sera dit A-<u>groupe</u> si tout A-produit R d'élément de K^* appartient à K^* .

Supposons maintenant que :

(1) <u>Les ensembles</u> A , A^{-1} , B , B^{-1} <u>sont deux à deux disjoints</u>.

1.2.- <u>Si</u> $\bar{R} = 1$ <u>est une identité entre les éléments de</u> $(A \cup B) \cup (A \cup B)^{-1}$, $\bar{R}_A = 1$ <u>est une identité entre les éléments de</u> $A \cup A^{-1}$.

Soit ρ la segmentation[1] concordante et unitaire qu'admet R . A chaque A-élément r_i de R on peut rattacher de façon univoque $S_\rho(r_i)$; posons, par exemple, $S_\rho(r_i) = S(r_i r_j)$, $S(r_i r_j) - R_B$ est un segment de R_A , et puisque d'après (1), on a $r_i \notin R_B$, $r_j = r_i^{-1} \notin R_B$, c'est un segment de mêmes extrémités que $S(r_i r_j)$. On déduit que $S_\rho(r_i) - R_B$ est, de même que $S_\rho(r_i)$, un segment unitaire, et que l'ensemble des $S_\rho(r_i) - R_B$ avec $r_i \in R_A$, de même que l'ensemble des $S_\rho(r_i)$ dans le cas de la suite R , une segmentation concordante de R_A .

Considérons les propositions :

(α) <u>La</u> A-<u>relation</u> $\bar{R} = 1$ <u>est une identité</u>.

(β) <u>La</u> A-<u>relation</u> $\bar{R} = 1$ <u>est soit telle que</u> $\omega(R) = 2$, <u>soit telle que</u> R <u>contienne un</u> A-<u>segment</u> $S \subset R$ <u>avec</u> $\bar{S} = 1$.

---

(1) pour les notations et les notions dont la définition n'est pas indiquée se reporter à [2].

On a $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$, car si $\bar{R} = 1$ est une identité avec $\omega(R) \geqslant 3$ le cas $\omega(R) = 1$ est exclu par (1), et si r_i est un élément de R différent des extrémités, $S\rho(r_i) \subset R$, et d'autre part $\bar{S}\rho(r_i) = 1$ est une identité, donc d'après 1.2, $[S\rho(r_i)]_A = 1$.

Notons (α_B) , (β_B) les propositions déduites de (α) , (β) en affirmant qu'elles sont valables pour toute A-relation $\bar{R} = 1$ entre les éléments de $B \cup B^{-1}$.

1.3.- On a l'équivalence $(\alpha_B) \Longleftrightarrow (\beta_B)$.

Supposons qu'on ait (β_B) et, de plus, (α_B) pour toute A-relation $\bar{R} = 1$ avec $\omega(R) < n$. Si maintenant $\bar{R} = 1$ est une A-relation avec $3 \leqslant \omega(R) = n$, considérons le A-segment $S \subset R$ avec $\bar{S} = 1$ dont l'existence est assurée par (β_B) ; $\bar{S} = 1$ est une A-relation avec $\omega(S) < n$, donc, d'après l'hypothèse, une identité.

Posons d'autre part $T = R - S$; $\bar{R} = \bar{R}_A = 1$ et $\bar{S} = \bar{S}_A = 1$ entrainent $\bar{T} = \bar{T}_A = 1$, de sorte que $\bar{T} = 1$ est une A-relation avec $\omega(T) = n - \omega(S) < n$, donc également une identité.

Si ρ_S et ρ_T sont les segmentations concordantes et unitaires de S et T respectivement, on voit que les segments de R ayant les mêmes extrémités que ceux appartenant à ρ_S ou ρ_T , constituent une segmentation concordante et unitaire de R , c'est-à-dire que $\bar{R} = 1$ est une identité.

Par ailleurs, une relation $\bar{R} = 1$ avec $\omega(R) = 2$ est nécessairement une identité, de sorte que $(\beta_B) \Longrightarrow (\alpha_B)$ est démontrée par récurrence.

Si (1) et (α_B) sont valables, on dira que B est un A-système libre, autrement dit :

(AL_α) . B est un A-système libre, si l'on a (1) et si les seules A-relations $\bar{R} = 1$ entre les éléments de $B \cup B^{-1}$ sont les identités.

Si B est un A-système libre, A et B sont des systèmes libres ; en effet si $\bar{R} = 1$ est telle que R soit exclusivement constituée, soit de A-éléments, soit de B-éléments, on a

$$\bar{R}_A = \begin{cases} \bar{R} = 1 \\ \bar{0} = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\bar{R} = 1$ est une A-relation, donc d'après (AL_α) , une identité.

Si B est un A-système libre, on dira que $N_A[B]$ est le A-groupe libre engendré par B et on écrira $N_A[B] = N_A[[B]]$. Un sous-groupe N de F est un A-groupe libre s'il existe un sous-ensemble B tel que $N = N_A[[B]]$ et B est dite A-base libre de N .

Un exemple simple de A-groupe libre est le suivant :

Considérons deux ensembles A et B , disjoints, et le groupe libre $K = [[A , B]]$, engendré par les éléments de $A \cup B$: on a (1) et de plus :

(a) B est un A-système libre : en effet, toute relation $\bar{R} = 1$ entre les éléments de $(A \cup B) \cup (A \cup B)^{-1}$, et en particulier toute A-relation, est une identité.

(b) Le sous-groupe normal engendré par B dans K coïncide avec $N_A[[B]]$; en effet, d'après 1.1, ce sous-groupe n'est autre que $N_A[B]$ et, d'après (a) $N_A[B] = N_A[[B]]$.

2.- A-relations irréductibles.

Une A-suite R sera dite A-suite irréductible si $\bar{S} \neq 1$, pour chaque A-segment $S \subset R$; dans ces mêmes conditions, $\bar{R}$ sera un A-produit irréductible et $\bar{R} = 1$ une A-relation irréductible. On déduit de 1.3 :

(AL_β) . B est un A-système libre, si l'on a (1) et s'il n'existe pas de A-relation irréductible $\bar{R} = 1$, avec $\omega(R) \geqslant 3$, entre les éléments de $B \cup B^{-1}$.

2.1.- Pour toute A-suite R , il existe une A-sous-suite irréductible $R^m \subseteq R$, avec $\bar{R} = \bar{R}^m$.

Supposons que la A-suite ne soit pas irréductible ; on a $\bar{R}_A = 1$ et d'autre part il existe un segment $S^1 \subset R$ avec $\bar{S}^1 = \bar{S}^1_A = 1$. Si l'on note $R^1 = R - S^1$, on a par conséquent $\bar{R} = \overline{R - S^1} = \bar{R}^1$ et $\bar{R}^1_A = \overline{R_A - S^1_A} = 1$, cette dernière égalité montrant que R^1 est une A-suite. On peut ainsi construire une chaine stricte de A-sous-suites de R : $R \supset R^1 \supset \ldots$ avec $\bar{R} = \bar{R}^1 = \ldots$, qui est finie, puisque R est finie, de sorte que pour un certain m , R^m est nécessairement une A-suite irréductible.

2.2.- Si $N = N_A[[B]]$, tout $1 \neq x \in N$ admet une représentation unique comme A-produit irréductible d'éléments de $B \cup B^{-1}$.

D'après 2.1, il existe une représentation comme A-produit irréductible de x . Si maintenant $1 \neq x = \prod^{n} r_i = \prod^{m} s_j$ où $\prod r_i$ et $\prod s_j$ sont des A-produits irréductibles,

$$R = \prod s_{m-j+1}^{-1} \prod r_i = 1$$

est une identité, d'après (AL_α) ; soit ρ la segmentation concordante et unitaire qu'admet R . Si $S \in \rho$, on a d'après 1.2, $\bar{S} = \bar{S}_A = 1$, donc, puisque $\prod r_i \neq 1$ et $\prod s_j \neq 1$ sont des A-produits irréductibles,

$$S = S(s_{m-j+1}^{-1} r_i) \ .$$

Si l'on fait intervenir la définition des segmentations concordantes, on déduit $m = n$ et $S = S(s_i^{-1} r_i)$, et en définitive, puisque S est unitaire, $s_i = r_i$.

3.- Couverture centrale.

R étant une suite d'éléments de $(A \cup B) \cup (A \cup B)^{-1}$, notons $\omega_B(R)$ le nombre des B-éléments de R ; d'autre part nous disons que R est x-simple si la classe des B-éléments r_i tels que $r_i = x^{\pm 1}$ se réduit à un seul B-élément de R .

Si maintenant $N = N_A[[B]]$ et si $x = \bar{R}$ est la représentation comme A-produit irréductible de $1 \neq x \in N$, nous appelons B-longueur $\lambda_B(x)$ de x , le nombre $\omega_B(R)$; on pose $\lambda_B(1) = 0$ et on a évidemment $\lambda_B(x) = \lambda_B(x^{-1})$; si R est un A-produit quelconque d'éléments de $B \cup B^{-1}$, on a d'après 2.1, $\lambda_B(\bar{R}) \leq \omega_B(R)$.

Si $\lambda_B(x) = 2m + 1$, le $m+1$-ème B-élément de R est dit B-centre de x; si $\lambda_B(x) = 2m$, le m-ème B-élément de R est dit B-centre à gauche et le $m+1$-ème , B-centre à droite, de x . Le segment de R ayant comme extrémités le B-centres de x , est dit segment central $S_C(x)$ de x .

Si $\omega[S_C(x)] = 2\mu + 1$, le $\mu+1$-ème élément de $S_C(x)$ est appelé centre de x ; si $\omega[S_C(x)] = 2\mu$, le μ-ème élément de $S_C(x)$ est dit centre à gauche et le $\mu+1$-ème élément, centre à droite de x .

$\omega[S_C(x)] = 1$ correspond au cas où le B-centre, le segment central et le centre se confondent en un seul élément de R ; $\omega[S_C(x)] = 2$ correspond à celui où les B-centres coïncident avec les centres et le segment central se réduit à ceux-ci ; si $\omega[S_C(x)] \geq 3$, tout élément de $S_C(x)$ différant des extrémités est un A-élément, et en particulier il en est ainsi des centres de x .

Nous appelons <u>longueur</u> $\lambda(x)$ de x le couple de nombres :

$$\lambda(x) = \{\lambda_B(x) \ , \omega[S_C(x)]\} \ ;$$

on pose par définition $\lambda(1) = \lambda_B(1) = 0$. La relation $<$ entre les longueurs, définie par $0 = \lambda(1) < \lambda(x)$, pour tout $x \neq 1$, et par :

$$\lambda(x) < \lambda(y) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{soit à } \lambda_B(x) < \lambda_B(y) \\ \text{soit, si } \lambda_B(x) = \lambda_B(y) \ , \text{ à } \omega[S_C(x)] < \omega[S_C(y)] \ , \end{cases}$$

est une relation de bon ordre.

Considérons par ailleurs un A- produit $\bar{R} = r_1 r_2 \dots r_n$ d'éléments $\neq 1$ de $N = N_A[[B]]$ et soit

$$r_i = \prod_j^{\ell_i} s_{ij}$$

la représentation de $r_i \in N$ comme A-produit irréductible d'éléments de $B \cup B^{-1}$. Notons $L(R) = \max \{\lambda(r_i)\}$ et

$$\bar{R}^* = \prod_i \prod_j s_{ij}$$

où l'on écrit r_i à la place de $\prod_j s_{ij}$ si r_i est un A-élément de R . Si de plus R^* admet une segmentation concordante et unitaire ρ , nous appelons <u>couverture centrale</u> $\mathcal{C}_\rho(r_i)$ de $r_i \in N$, le segment minimum de $\rho \cup R^*$ contenant les centres de r_i .

On a $(\prod_j s_{ij})_A = 1$, pour tout r_i qui n'est pas A-élément de R , de sorte que :

$$S_A(r_h r_k) = (\prod_{h \leq i \leq k} r_i)_A = \prod_{h \leq i \leq k} (\prod_j s_{ij})_A = S_A(s_{h1} s_{k,\ell_k}) \tag{2}$$

Soit enfin $\bar{R} = 1$ une A-relation irréductible entre les éléments de $N = N_A[[B]]$ et $\omega(R) \geqslant 3$; d'aprè (AL_α) , $\bar{R}^* = 1$ est une A-identité ; soit ρ la segmentation concordante et unitaire qu'admet R^* .

3.1.- <u>Si</u> r_i , $r_k \in N$, <u>on a</u> :

$$r_i = r_k^{\pm 1} \ , \ \mathcal{C}_\rho(r_i) = \mathcal{C}_\rho(r_k) \Longrightarrow i = k \ .$$

Supposons $i < k$, $r_i = r_k^{\pm 1}$, $\mathcal{C}_\rho(r_i) = \mathcal{C}_\rho(r_k) = \mathcal{C}$; deux cas sont à distinguer :

1) $\omega[S_C(r_i)] = \omega[S_C(r_k)] = 2\mu + 1$. Le centre s_{ic} de r_i appartient à $\mathcal{C}$

donc $S\rho(s_{ic}) \subseteq \mathcal{C}$, et puisque $\mathcal{C}$ est minimum dans $\rho \cup R^*$ à contenir s_{ic} , $S\rho(s_{ic}) = \mathcal{C}$; de façon analogue on a pour le centre s_{kc} de r_k , $S\rho(s_{kc}) = \mathcal{C}$; on conclut

$$\mathcal{C} = S(s_{ic}\ s_{kc}) \quad .$$

Si $r_i = r_k$, on a, d'une part d'après 2.2 , $s_{ic} = s_{kc}$, d'autre part puisque $\mathcal{C}$ est unitaire, $s_{ic} = s_{kc}^{-1}$; ceci contredit (1).

Si $r_i = r_k^{-1}$, la représentation comme A-produit irréductible de r_i est d'après 2.2

$$r_i = s_{k,\ell_k}^{-1} \cdots s_{k,c+1}^{-1} \cdot s_{kc}^{-1} \cdot s_{k,c-1}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1}$$

de sorte que son centre est s_{kc}^{-1} et comme $\mathcal{C} \in \rho$ entraine $\bar{\mathcal{C}} = 1$, on déduit

$$\bar{S}(r_i r_k) = s_{k,\ell_k}^{-1} \cdots s_{k,c+1}^{-1} \cdot \bar{\mathcal{C}}\, s_{k,c+1} \cdots s_{k,\ell_k} = 1$$

$$\bar{S}(r_{i+1} r_{k-1}) = s_{k1} \cdots s_{kc} \cdot \bar{\mathcal{C}} \cdot s_{kc}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1} = 1$$

Par ailleurs $\bar{\mathcal{C}} = 1$ est une identité, donc d'après 1.2, $\bar{\mathcal{C}}_A = 1$; en tenant compte de (2) on a par conséquent

$$\bar{S}_A(r_i r_k) = \bar{S}_A(s_{i1}\ s_{k,\ell_k}) = (s_{k,\ell_k}^{-1} \cdots s_{k,c+1}^{-1})_A \cdot \bar{\mathcal{C}}_A \cdot (s_{k,c+1} \cdots s_{k,\ell_k})_A =$$
$$= (s_{k,c+1} \cdots s_{k,\ell_k})_A^{-1}\ (s_{k,c+1} \cdots s_{k,\ell_k})_A = 1$$

$$\bar{S}_A(r_{i+1}\ r_{k-1}) = \bar{S}_A(s_{i+1,1}\ s_{k-1,\ell_{k-1}}) = (s_{k1} \cdots s_{kc})_A \cdot \bar{\mathcal{C}}_A \cdot (s_{kc}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1}) =$$
$$= (s_{k1} \cdots s_{kc})_A (s_{k1} \cdots s_{kc})_A^{-1} = 1$$

Il s'ensuit que $S(r_i\ r_k)$ et $S(r_{i+1}\ r_{k-1})$ sont des A-segments de R tels que $\bar{S}(r_i\ r_k) = \bar{S}(r_{i+1}\ r_{k-1}) = 1$; de plus, $\omega(R) \geqslant 3$, entraine soit $S(r_i\ r_k) \neq 0, R$, soit $S(r_{i+1}\ r_{k-1}) \neq 0, R$. Ceci contredit l'hypothèse que $\bar{R} = 1$ est une A-relation irréductible.

2) $\omega[S_C(r_i)] = \omega[S_C(r_k)] = 2\mu$. Soit s_{ic} , $s_{i,c+1}$ et s_{kc} , $s_{k,c+1}$ les centres de r_i et r_k respectivement et considérons le segment $S = S(s_{i,c+1}\ s_{kc})$; $\mathcal{C}\rho(r_i) = \mathcal{C}\rho(r_k)$ entraine

$$s \in S \Longrightarrow S\rho\,(s) \subseteq S \ .$$

Il s'ensuit que l'ensemble de $S\rho(s)$ avec $s \in S$ constitue une segmentation de S , qui est, de même que ρ , concordante et unitaire. On conclut que $\bar{S} = 1$ est une identité.

Si $r_i = r_k$, la représentation comme A-produit irréductible de r_i est :

$$r_i = s_{k1} \dots s_{kc}\, s_{k,c+1} \dots s_{k,\ell_k}$$

de sorte que les centres de r_i sont s_{kc} et $s_{k,c+1}$ et par conséquent en tenant compte de $\bar{S} = 1$

$$S(r_i\, r_{k-1}) = s_{k1} \dots s_{kc} \,.\, \bar{S} \,.\, s_{kc}^{-1} \dots s_{k1}^{-1} = 1 \,.$$

D'autre part, d'après 1.2, $\bar{S}_A = 1$; on déduit en tenant compte de (2)

$$\bar{S}_A(r_i\, r_{k-1}) = \bar{S}_A(s_{i1}\, s_{k-1,\ell_{k-1}}) = (s_{k1} \dots s_{kc})_A \,.\, \bar{S}_A \,.\, (s_{kc}^{-1} \dots s_{k1}^{-1})_A = 1 \,.$$

$S(r_i\, r_{k-1})$ est donc un A-segment de R et on a évidemment $S(r_i\, r_{k-1}) \neq 0$, R , ce qui est contradictoire.

Si $r_i = r_k^{-1}$, la représentation comme A-produit irréductible de r_i est :

$$r_i = s_{k,\ell_k}^{-1} \dots s_{k,c+1}^{-1}\, s_{kc}^{-1} \dots s_{k1}^{-1}$$

de sorte que les centres de r_i sont $s_{k,c+1}^{-1}$ et s_{kc}^{-1} et par conséquent

$$\bar{S}(r_i\, r_k) = s_{k,\ell_k}^{-1} \dots s_{k,c+1}^{-1} \,.\, \bar{S} \,.\, s_{k,c+1} \dots s_{k,\ell_k} = 1$$

$$S(r_{i+1}\, r_{k-1}) = s_{k1} \dots s_{kc} \,.\, \bar{S} \,.\, s_{kc}^{-1} \dots s_{k1}^{-1} = 1$$

et comme plus haut, en tenant compte de (2) et $\bar{S}_A = 1$,

$$\bar{S}_A(r_i\, r_k) = (s_{k,\ell_k}^{-1} \dots s_{k,c+1}^{-1})_A (s_{k,c+1} \dots s_{k,\ell_k})_A = 1$$

$$\bar{S}_A(r_{i+1}\, r_{k-1}) = (s_{k1} \dots s_{kc})_A (s_{kc}^{-1} \dots s_{k1}^{-1})_A = 1 \,,$$

ce qui est contradictoire.

4.- Lemmes sur les A-relations irréductibles.

Considérons toujours la A-relation irréductible $\bar{R} = 1$ avec $\omega(R) \geqslant 3$.

4.1.- Il existe, pour tout élément $r_\alpha \in R$ avec $\lambda(r_\alpha) = L(R)$, une A-suite S , formée à partir de R , r_α -simple et telle que $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

Considérons l'ensemble ρ^* des couvertures centrales correspondant aux éléments $r \in R$ avec $r = r_\alpha^{\pm 1}$; soit $\mathcal{C}_\rho(r_\beta)$, $r_\beta = r_\alpha^{\pm 1}$ un segment minimal appartenant à ρ^* .

Si $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = R^*$, R est r_α-simple ; si en effet $r_\gamma = r_\alpha^{\pm 1}$, $\mathcal{C}_\rho(r_\gamma) \subseteq R^* = \mathcal{C}_\rho(r_\beta)$ et puisque $\mathcal{C}_\rho(r_\beta)$ est minimal dans ρ^* , $\mathcal{C}_\rho(r_\gamma) = \mathcal{C}_\rho(r_\beta)$, donc d'après 3.1, $\gamma = \beta$. Par ailleurs $\lambda(\bar{R}) = 0 < \lambda(r_\alpha)$, de sorte qu'on peut prendre $S = R$.

Si d'autre part $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) \neq R^*$, posons $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = S(s_{i,j+1}\ s_{kh}) \in \rho$; $\bar{S}(s_{i,j+1}\ s_{kh}) = 1$ est une identité et $s_{i,j+1}\ s_{kh} = 1$.

I.- $r_\gamma = r_\beta^{\pm 1}$, $i < \gamma < k \Longrightarrow \gamma = \beta$.

Si en effet $i < \gamma < k$, les centres de r_γ appartiennent à $\mathcal{C}_\rho(r_\beta)$ donc puisque celui-ci est minimal dans ρ^* , $\mathcal{C}_\rho(r_\gamma) = \mathcal{C}_\rho(r_\beta)$; si de plus $r_\gamma = r_\beta^{\pm 1}$, d'après 3.1 , $\gamma = \beta$.

Deux cas sont à distinguer :

a) $s_{i,j+1}$ et s_{kh} sont des B-éléments ; on peut distinguer quatre sous-cas :

a.1) <u>Un</u> B-centre de r_i et <u>un</u> B-centre de r_k , $\notin S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$.

Dans ce cas $r_\beta \in S(r_{i+1}\ r_{k-1})$ et d'après I , $S(r_{i+1}\ r_{k-1})$ est r_α-simple. On a d'autre part

$$\bar{S}(r_{i+1}\ r_{k-1}) = s_{i,\ell_i}^{-1} \cdots s_{i,j+1}^{-1} \cdot \bar{S}(s_{i,j+1}\ s_{kh}) \cdot s_{kh}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1} =$$
$$= s_{i,\ell_i}^{-1} \cdots s_{i,j+2}^{-1}\ s_{k,h-1}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1} = \bar{S}^*$$

et en tenant compte de (2) et $\bar{S}_A(s_{i,j+1}\ s_{kh}) = 1$

$$\bar{S}_A(r_{i+1}\ r_{k-1}) = \bar{S}_A^* .$$

On peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}(r_{i+1}\ r_{k-1})$. S est en effet une A-suite, car $\bar{S}_A = (\bar{S}_A^*)^{-1} \cdot \bar{S}_A^* = 1$, r_α-simple, au même titre que $S(r_{i+1}\ r_{k-1})$.

D'autre part

$$2[\lambda_B(s_{i,\ell_i}^{-1} \cdots s_{i,j+1}^{-1})] \leq \lambda_B(r_i) \leq \lambda_B(r_\alpha)$$
$$2[\lambda_B(s_{kh}^{-1} \cdots s_{k1}^{-1})] \leq \lambda_B(r_k) \leq \lambda_B(r_\alpha)$$

d'où, puisque $s_{i,j+1}$ et s_{kh} sont des B-éléments :

$$2\,\lambda_B(\bar{S}^*) \leq \lambda_B(r_\alpha) - 2 + \lambda_B(r_\alpha) - 2 = 2[\lambda_B(r_\alpha) - 2]$$

et par conséquent

$$\lambda_B(\bar{S}) \leq \omega_B[(\bar{S}_A^*)^{-1}] + \lambda_B[\bar{S}(r_{i+1}\ r_{k-1})] = 0 + \lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda_B(r_\alpha) .$$

En définitive, on a également $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

a.2) <u>Les</u> B-centres de $r_i \in S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$, et <u>un</u> B-centre de $r_k \notin S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$.

Dans ce cas $r_\beta \in S(r_i\ r_{k-1})$. On montre comme dans I, que $r_i = r_\beta^{\pm 1}$ entraine $i = \beta$, de sorte qu'en tenant compte de I, on conclut que $S(r_i\ r_{k-1})$ est r_α-simple et on a par ailleurs

$$\bar{S}(r_i\ r_{k-1}) = s_{i1} \dots s_{ij}\ s_{kh}^{-1} \dots s_{k1}^{-1} = \bar{S}^* ,\ \bar{S}_A(r_i\ r_{k-1}) = \bar{S}_A^*$$

On peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1}.\ S(r_i\ r_{k-1})$, car on voit comme dans a.1) qu'il s'agit d'un A-produit r_α-simple et d'autre part

$$2[\lambda_B(s_{i1} \dots s_{ij})] < \lambda(r_i) \leqslant \lambda(r_\alpha)$$
$$2[\lambda_B(s_{kh}^{-1} \dots s_{k1}^{-1})] \leqslant \lambda(r_k) \leqslant \lambda(r_\alpha)$$

d'où

$$\lambda_B(\bar{S}) \leqslant \omega_B[(\bar{S}_A^*)^{-1}] + \lambda_B[\bar{S}(r_i\ r_{k-1})] = \lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda(r_\alpha)$$

et en définitive $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

a.3) <u>Un</u> B-centre de $r_i \notin S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$ et <u>les</u> B-centres de $r_k \in S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$.

Ce cas est symétrique à a.2) et on peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1}.\ S(r_{i+1}\ r_k)$ ou $\bar{S}^* = s_{i,\ell_i}^{-1} \dots s_{i,j+1}^{-1}\ s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k}$.

a.4) <u>Les</u> B-centres de r_i et <u>les</u> B-centres de r_k, $\in S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$.

En tenant compte de I, on montre comme dans a.2) et a.3) que $S(r_i\ r_k)$ est r_α-simple et par ailleurs

$$\bar{S}(r_i\ r_k) = s_{i1} \dots s_{ij}\ s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k} = \bar{S}^* ,\ \bar{S}_A(r_i\ r_k) = \bar{S}_A^*$$

On peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1}.\ S(r_i\ r_k)$, puisqu'il s'agit d'un A-produit r_α-simple et que d'autre part

$$2[\lambda_B(s_{i1} \dots s_{ij})] < \lambda(r_i) \leqslant \lambda(r_\alpha)$$
$$2[\lambda_B(s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k})] < \lambda(r_k) \leqslant \lambda(r_\alpha)$$

d'où

$$\lambda_B(\bar{S}) \leqslant \lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda(r_\alpha)$$

et en définitive $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

b) $s_{i,j+1}$ et s_{kh} sont des A-éléments ; on distingue également quatre cas :

b.1) <u>Un</u> centre de r_i et <u>un</u> centre de r_k , $\notin S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$.

On voit comme dans a.1) que $S(r_{i+1}\ r_{k-1})$ est r_α-simple et

$$\bar{S}(r_{i+1}\ r_{k-1}) = s^{-1}_{i,\ell_i} \ldots s^{-1}_{i,j+2}\ s^{-1}_{k,h-1} \ldots s^{-1}_{k1} = \bar{S}^* \ , \ \bar{S}_A(r_{i+1}r_{k-1}) = \bar{S}^*_A$$

de sorte que $\bar{S} = (\bar{S}^*_A)^{-1} \cdot \bar{S}(r_{i+1}\ r_{k-1})$ est un A-produit r_α-simple.

Si $s_{i,j+1} \notin S_c(r_i)$, les B-centres de $r_i \notin S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$, donc

$$2[\lambda_B(s^{-1}_{i,\ell_i} \ldots s^{-1}_{i,j+1})] < \lambda_B(r_i) \leq \lambda_B(r_\alpha)$$

et puisque d'autre part $2[\lambda_B(s_{kh} \ldots s_{k1})] \leq \lambda_B(r_\alpha)$, on a

$$\lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda(r_\alpha) .$$

Si $s_{k,h} \notin S_c(r_k)$, on déduit de façon symétrique la même relation ci-dessus.

Si $s_{i,j+1} \in S_c(r_i)$, $s_{kh} \in S_c(r_k)$, notons $s_{i,jm}$, $s_{i,jm+1}$ et $s_{k,hm}$, $s_{k,hm+1}$ les B-centres de r_i et r_k , respectivement ; si on a, soit $\lambda_B(r_i) < \lambda_B(r_\alpha)$, soit $\lambda_B(r_k) < \lambda_B(r_\alpha)$, il est clair que $\lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda(r_\alpha)$; la même relation est valable si $\lambda_B(r_i) = \lambda_B(r_k) = \lambda_B(r_\alpha)$ et si S^* admet un A-segment T avec $\bar{T} = 1$. et contenant des B-éléments .

Si maintenant $\lambda_B(r_i) = \lambda_B(r_k) = \lambda_B(r_\alpha)$ et si les A-segments T avec $\bar{T} = 1$ de R^B , ne contienne que des A-éléments, le fait que $\prod_j s_{ih}$ sont de A-produits irréductibles pour tout i , entraine

$$T \subset \left\{ s^{-1}_{i,jm+1} , \ldots , s^{-1}_{i,j+2} , s^{-1}_{k,h-1} , \ldots , s^{-1}_{k,hm} \right\} = S^*_c$$

de sorte que la représentation comme A-produit irréductible de $\bar{S}^*$ est telle que $\lambda_B(\bar{S}) = \lambda_B(\bar{S}^*) = \lambda_B(r_\alpha)$ et

$$S_c(\bar{S}^*) \subseteq S^*_c \ .$$

Mais alors

$$2[\omega(s^{-1}_{i,jm+1} , \ldots , s^{-1}_{i,j+1})] \leq \omega[S_c(r_i)] \leq \omega[S_c(r_\alpha)]$$

$$2[\omega(s^{-1}_{kh} , \ldots , s^{-1}_{k,jm})] \leq \omega[S_c(r_k)] \leq \omega[S_c(r_\alpha)]$$

d'où

$$2\,\omega(S^*_c) \leq 2\left\{\omega[S_c(r_\alpha)] - 2\right\}$$

et en définitive

$$\omega[S_c(S)] = \omega\left\{S_c[\bar{S}(r_{i+1}\ r_{k-1})]\right\} = \omega[S_c(\bar{S}^*) \leq \omega(S^*_c) < \omega[S_c(r_\alpha)] .$$

On a ainsi, dans tous les cas, $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

b.2) Les centres de $r_i \in S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$ et un centre de $r_k \notin S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$.

On montre de façon analogue à b.1) que $\bar{S} = (\bar{S}^*_A)^{-1}.\bar{S}(r_i\ r_{k-1})$, où $\bar{S}^* = s_{i1} \dots s_{ij}\ s_{kh}^{-1} \dots s_{k1}$, est un A-produit r_α-simple, et que l'on a soit $\lambda_B(\bar{S}) = \lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda_B(r_\alpha)$, soit, si $\lambda_B(\bar{S}) = \lambda_B(\bar{S}^*) = \lambda(r_\alpha)$, $\omega[S_c(\bar{S})] = \omega[S_c(\bar{S}^*)] < \omega[S_c(r_\alpha)]$, donc $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

b.3) Un centre de $r_i \notin S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$ et les centres de $r_k \in S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$.

Ce cas est symétrique à b.2) et l'on peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}^*_A)^{-1}.\bar{S}(r_{i+1}\ r_k)$ où $\bar{S}^* = s_{i,\ell_i}^{-1} \dots s_{i,j+1}^{-1}\ s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k}$.

b.4) Les centres de r_i et les centres de r_k , $\in S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$.

On montre que $\bar{S} = (S^*_A)^{-1}.S(r_i\ r_k)$ où $\bar{S}^* = s_{i1} \dots s_{ij}\ s_{k,h+1} \dots s_{k,\ell_k}$ est un A-produit r_α-simple tel que $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

Considérons maintenant un A-produit irréductible R avec $\omega(R) \geqslant 3$ et soit $b \in B \cup B^{-1}$.

4.2.- Si $\bar{R} = b$, il existe pour tout $r_\alpha \in R$ avec $\lambda(r_\alpha) = L(R)$, une A-suite S d'éléments de R , r_α-simple, et telle que $\lambda(\bar{S}) < \lambda(r_\alpha)$.

Considérons la A-relation $b^{-1}\bar{R} = 1$, irréductible, en même temps que la A-suite R et par conséquent telle que $\lambda_B(r_i) \geqslant 2$. Soit $r_i = \prod_j s_{ij}$ la représentation comme A-produit irréductible de r_i et considérons l'identité

$$b^{-1}\bar{R}^* = b^{-1} \prod_i \prod_j s_{ij} = 1$$

ainsi que la segmentation concordante et unitaire ρ , qu'admet $\{b^{-1}, R^*\}$.

Soit comme dans 4.1 , ρ^* l'ensemble des couvertures centrales correspondant aux $r \in \{b^{-1}, R^*\}$ avec $r = r_\alpha^{\pm 1}$ et $\mathcal{C}_\rho(r_\beta)$, $r_\beta = r_\alpha^{\pm 1}$, un segment minimal appartenant à ρ^* .

Si $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = S(s_{i,j+1}\ s_{kh})$, on peut construire comme dans 4.1 une A-suite S satisfaisant aux conditions de 4.2.

Si $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = \{b^{-1}, R^*\}$ on voit comme dans 4.1 que $\{b^{-1}, R\}$, donc R , est r_α-simple et d'autre part $\lambda_B(\bar{R}) = \lambda_B(b) = 1 < 2 \leq \lambda_B(r_\alpha)$, donc $\lambda(\bar{R}) < \lambda(r_\alpha)$.

Il reste à étudier le cas $\mathcal{C}_\rho(r_\beta) = S(b^{-1}s_{kh})$.

Si $r_\beta \in S(r_1\ r_{k-1})$, on voit comme dans le cas a.1) de 4.1 que $S(r_1\ r_{k-1})$ est r_α-simple. D'autre part en tenant compte de $\bar{S}(b^{-1}s_{kh}) = 1$, $b^{-1}s_{kh} = 1$ (2) et $\bar{S}_A(b^{-1}s_{kh}) = 1$ on a

$$\bar{S}(r_1\ r_{k-1}) = b\ \ \bar{S}(b^{-1}s_{kh})s_{kh}^{-1} \dots s_{k1}^{-1} = s_{k,h-1}^{-1} \dots s_{k1}^{-1} = \bar{S}^*$$

$$\bar{S}_A(r_1\ r_{k-1}) = \bar{S}_A^*$$

et puisque s_{kh} est un B-élément

$$\lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda_B(r_k) \leqslant \lambda_B(r_\alpha)\ ,$$

de sorte qu'on peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1}.\bar{S}(r_1\ r_{k-1})$.

Si $\beta = k$, on voit comme dans le cas a.3) de 4.1 que $S(r_1\ r_k)$ est r_α-simple, et

$$\bar{S}(r_1\ r_k) = b\ \bar{S}(b^{-1}s_{kh})\ a_{k,h+1} \dots a_{k,\ell_k} = ba_{k,h+1} \dots a_{k,\ell_k} = \bar{S}^*$$

$$\bar{S}_A(r_1\ r_k) = \bar{S}_A^*\ ;$$

d'autre part $\lambda(r_k) \geqslant 2$ et le fait que $\bar{S}(b^{-1}s_{kh})$ contient les B-centres de r_k entrainent

$$\lambda_B(\bar{S}^*) < \lambda_B(r_k) \leqslant \lambda(r_\alpha)\ ,$$

de sorte qu'on peut prendre $\bar{S} = (\bar{S}_A^*)^{-1}.\bar{S}(r_1\ r_k)$.

5.- <u>Groupe de Nielson d'un</u> A-<u>groupe libre</u>.

Si $V = \{v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_m\}$ est une m-suite de variables $v_j \in N = N_A[[B]]$, considérons la m-suite $\varphi V = \{\varphi v_1\ ,\ \dots\ ,\ \varphi v_m$ définie par :

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi v_j = v_j\ ;\ j \neq j_0 \\ \varphi v_{j_0} = \bar{S}(v_{j_0}\ ;\ v_j\ ,\ a) \end{cases}$$

où $S(v_{j_0}\ ;\ v_j\ ,\ a)$ est un A-produit v_{j_0}-simple d'éléments de la forme $v_j^{\pm 1}$. On voit que

(4)
$$v_{j_0} = P(\varphi v_{j_0}\ ;\ \varphi v_j\ ,\ a)$$

où P est un A-produit φv_{j_0}-simple d'éléments de la forme $(\varphi v_j)^{\pm 1}$ et par conséquent

(5)
$$N_A[V] = N_A[\varphi V].$$

Supposons maintenant que N admette un système de A-générateurs <u>fini</u> et soit $\mathfrak{X}_m(N)$ l'ensemble des m-suites X de A-générateurs de N . Le changement de variable (3) détermine une application $X \longrightarrow \varphi X$ de $\mathcal{X}_m(N)$ sur <u>lui-même</u>, d'après (4) et (5), que nous appelons <u>transformation</u> A-<u>simple</u>. D'après (4), l'ensemble $\mathcal{N}_m(N)$ des produits ψ de transformations A-simples φ <u>est un groupe</u>, que nous appelons le <u>groupe de Nielsen</u> (d'ordre m) du A-groupe libre N.

On voit facilement que $\mathcal{N}_m(N)$ peut-être également défini comme l'ensemble des produits de transformations φ de l'une des formes

$$(3') \qquad \begin{cases} \varphi v_j = v_j \ ; \ j \neq j_0 \\ \varphi v_{j_0} = \begin{cases} v_{j_0}^{\pm 1} \\ (v_{j_0}^{\pm 1} v_j^{\pm 1})^{\pm 1} \\ a v_{j_0}^{\pm 1} a^{-1} \ , \ a \in A \cup A^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

Notons X_0 l'ensemble des éléments de N qui figurent dans la suite X et d'autre part soit :

$$\lambda(X) = \{ \lambda(x_1) \ , \ \dots \ , \ \lambda(x_m) \} \ .$$

Considérons la relation $<$ entre m-suites définie par :

$$\lambda(X) < \lambda(Y) \Longleftrightarrow \lambda(x_j) \leqslant \lambda(y_j) \text{ et pour un certain } j_0 \ , \ \lambda(x_{j_0}) < \lambda(y_{j_0}) .$$

On déduit de 4.2.

5.1.- <u>Si</u> $X \in \mathcal{X}_m(N)$ <u>et</u> $B \cup B^{-1} \not\subseteq X_0 \cup X_0^{-1}$, <u>il existe une transformation</u> A-<u>simple</u> φ <u>de</u> $\mathcal{X}_m(N)$ <u>telle que</u> $\lambda(\varphi X) < \lambda(X)$.

Puisque toute chaine descendante $\lambda(X_1) > \lambda(X_2) > \dots$ est finie on déduit de 5.1 :

5.2.- <u>Pour toute m-suite</u> $X \in \mathcal{X}_m(N)$, <u>il existe une transformation</u> $\psi \in \mathcal{N}_m(N)$ <u>telle que</u> $B \cup B^{-1} \subseteq (\psi X)_0 \cup (\psi X)_0^{-1}$.

Par conséquent :

Si $c(B)$ est le nombre des éléments d'une A-base libre B de N ,

$$c(B) \leqslant m \ .$$

Si nous notons :

$$B_m = \{ \underbrace{b_1 \ , \ \dots \ , \ b_{c(B)} \ , \ 1 \ , \ \dots \ , \ 1}_{m} \} \ ,$$

on voit, comme dans 8.4 de [2] que

5.3.- <u>Pour toute m-suite</u> $X \in \mathcal{X}_m(N)$ <u>avec</u> $B \cup B^{-1} \subseteq X_0 \cup X_0^{-1}$, <u>il existe une transformation</u> $\psi \in \mathcal{H}_m(N)$ <u>telle que</u> $\psi X = B_m$.

Finalement, d'après 5.2 et 5.3 :

5.4.- $\mathcal{H}_m(N)$ <u>est un groupe transitif de transformation de</u> $\mathcal{X}_m(N)$.

6.- <u>Construction des relations fondamentales.</u>

Considérons maintenant un groupe G engendré par une suite $A = \{a_1 , \dots , a_i , \dots , a_n\}$ de générateurs et défini par une suite de relations fondamentales :

$$(H) \qquad h_1(a_i) = 1 , \dots , h_k(a_i) = 1 , \dots , h_r(a_i) = 1 ,$$

autrement dit le groupe quotient du groupe libre $[[A]]$ par le sous-groupe normal $N_A[H]$, où $H = \{h_1(a_i) , \dots , h_r(a_i)\}$. Si l'on considère la suite d'éléments $B = \{b_1 , \dots , b_r\}$ et le A-groupe libre $N_A[[B]]$, l'application de $N_A[[B]]$ sur $N_A[H]$, définie par

$$a_i \longrightarrow a_i \ , \ b_k \longrightarrow h_k(a_i)$$

est un homomorphisme, dont le noyau est l'ensemble U des A-produits $\bar{R}(b_k)$ d'éléments de $B \cup B^{-1}$ tels que $\bar{R}[h_k(a_i)] = 1$, et $N_A[H]$ est isomorphe à $N_A[[B]]/U$, d'où :

6.1.- <u>Un sous-groupe normal d'un groupe libre</u> $[[A]]$ <u>est isomorphe au groupe quotient d'un A-groupe libre par un de ses sous-A-groupes normaux.</u>

Identifions : $N_A[H] = N_A[[B]]/U$ et considérons une m-suite quelconque

$$(F) \qquad f_1(a_i) = 1 , \dots , f_j(a_i) = 1 , \dots , f_m(a_i) = 1$$

de relations fondamentales concernant la suite de générateurs A du groupe G , autrement dit, soit $F = \{f_1(a_i) , \dots , f_m(a_i)\}$ une m-suite de A-générateurs de $N_A[H] = N_A[[B]]/U$.

Si $F^* = \{f_1^* , \dots , f_m^*\}$ est une m-suite de représentants (appartenant à $N_A[[B]]$) pris dans chaque classe $f_j(a_i)$, on déduit de $N_A[F] = N_A[H]$ et du fait que U est sous-A-groupe normal dans $N_A[[B]]$

$$b_k U = h_k(a_i) = \bar{R}_k[f_j(a_i),a_i] = \bar{R}_k[f_j^* U , a_i] = \bar{R}_k(f_j^* ,a_i).U$$

où $\bar{R}_k[f_j(a_i),a_i]$ est un A-produit d'éléments de $F \cup F^{-1}$, donc

$$b_k = \bar{R}_k(f_j^* , a_i).u_k \ ; \ u_k \in U$$

et en définitive

$$N_A[[B]] = N_A[f_1^* , \ldots , f_m^* , u_1 , \ldots , u_n] .$$

En utilisant maintenant 5.4, on montre comme dans 1.2 de [3] que le groupe de Nielsen d'ordre $m+r$ relatif à $N_A[F]$ est transitif sur l'ensemble des $m+r$- suites de A-générateurs de la forme

$$\underbrace{\{ x_1 , \ldots , x_m , 1 , \ldots , 1 \}}_{m+r} ,$$

autrement dit :

6.2.- <u>Toute m-suite de relations fondamentales concernant la n-suite A de générateurs de G , s'obtient de :</u>

$$(F_{m+r}) \quad f_1(a_i) = 1 , \ldots , f_m(a_i) = 1 , \quad \underbrace{1 = 1 , \ldots , 1 = 1}_{r}$$

<u>par une succession de transformations</u> (3) <u>effectuées sur les premiers membres des relations</u> (F_{m+r}).

BIBLIOGRAPHIE

J. PETRESCO : [1] - Sur les commutateurs, Séminaire Châtelet-Dubreil, 1953/54, et Math. Z., 61, 1954, p. 348-356.

[2] - Sur les groupes libres, Séminaire P. Dubreil, 1954/55, exposé n° 21 et 23.

[3] - Systèmes minimaux de relations fondamentales dans les groupes de rang fini, Séminaire Dubreil-Pisot, 1955/56, exposé n° 1.
