Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

J. GUÉRINDON

Anneaux avec condition minimale restreinte

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. nº 17, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A11_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/1956
-:-:-:-

12 mars 1956

Exposé n° 17

ANNEAUX AVEC CONDITION MINIMALE RESTREINTE

par J. GUÉRINDON.

-:-:-:-

Il s'agira dans la suite d'anneaux commutatifs, avec élément unité non nul. On va exposer les démonstrations très simplifiées dues à I. S. Cohen [Duke mathematical Journal, vol. 17, 1950 , p. 27-41, avec large bibliographie] de théorèmes donnés par Krull, Grell, Akizuki, Kubo, Matusita et Mori. Ces démonstrations nouvelles s'accompagnent de très sensibles améliorations dans les résultats.

On caractérise les anneaux avec condition minimale restreinte en 1 et on étudie les problèmes d'extension de tels anneaux en 2. Les domaines de Dedekind sont simplement caractérisés en 3 et une extension de ces anneaux est donnée en 4 selon L. Fuchs (Anneaux arithmétiques). La connexion entre les anneaux de rang fini et les anneaux à condition minimale restreinte est étudiée en 5.

1.- Condition minimale restreinte.

Un anneau A sera appelé un MR anneau s'il satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes :

a) toute chaîne descendante bornée d'idéaux de A est stationnaire ;

b) on a la condition minimale restreinte pour l'ensemble des idéaux ordonné par l'inclusion des idéaux ;

c) toute image homomorphe propre A/I (I idéal non nul) est un anneau d'Artin ;

d) A est noethérien et tout idéal premier non nul est maximal en A ;

e) toute intersection d'un ensemble non vide U_r $(r \in R)$ d'idéaux de A est égale à une sous-intersection finie.

On prouve immédiatement l'équivalence de ces conditions et que les MR anneaux ayant des diviseurs de zéro sont tous les anneaux d'Artin non réduits à des corps. On étudiera dans la suite uniquement les MR domaines d'intégrité et on fera usage du :

Lemme. - Un anneau A est noethérien si et seulement si tout idéal premier de A a une base finie.

Pour établir que la condition est suffisante, on raisonne par l'absurde : si l'ensemble E des idéaux sans base finie n'était pas vide, il serait inductif pour la relation d'inclusion, et le théorème de Zorn fournirait un élément maximal U de E.

L'idéal U n'ayant pas de base finie ne serait pas premier et il existerait deux diviseurs stricts de U, soit U_1 et U_2, tels que l'on ait $U_1 U_2 \subsetneq U$. Alors U_1 et U_2 ont des bases finies et A/U_1 est noethérien d'après la maximalité de U. Le A/U_1-module $U_2/U_1 U_2$ étant de type fini est noethérien et son sous-A/U_1-module $U/U_1 U_2$ est aussi de type fini. U_1 étant de type fini sur A, $U/U_1 U_2$ est de type fini sur A donc U est de type fini sur A : on a une contradiction.

Les MR anneaux seuls diviseurs de zéro sont alors donnés par le :

Théorème 1. - Un domaine d'intégrité A satisfait à la condition MR si et seulement si sont réalisées les conditions suivantes :

a) tout idéal propre a une factorisation unique en idéaux primaires

b) tout idéal primaire est fort

c) si $I \subsetneq J$, tout idéal premier d'un facteur de J est idéal premier d'un facteur de I

d) dans toute intersection non nulle d'une infinité d'idéaux de A il y a au moins un idéal superflu.

En effet si A est un MR anneau il est noethérien, tout idéal primaire non nul est uniforme et on en déduit a) b) et c). Si d) n'était pas réalisée on formerait aisément une suite strictement décroissante et bornée inférieurement d'idéaux.

Si on suppose inversement réalisées les conditions a) b) c) d), tout idéal premier non nul est maximal, et d'après a) et b) tout idéal non nul I contient un produit $p_1 \, p_2 \, \dots \, p_n$ d'idéaux premiers non nuls. Il suffit pour montrer que A/I est un anneau d'Artin, d'établir qu'il existe une suite de composition d'idéaux de $p_1 \, p_2 \, .. \, p_n$ à A.

On établit pour cela que, pour tout i, les espaces vectoriels E_i (sur le corps A/p_i) $p_1 \, p_2 \, \dots \, p_{i-1}/p_1 \, p_2 \, \dots \, p_i$ sont de dimension finie. Or d'après la condition d) le sous-espace nul de E_i n'est pas intersection sans élément superflu d'une infinité de sous-espaces non nuls : l'espace entier est alors nécessairement de dimension finie.

W. Krull a donné [Math. Z., Vol. 54, 1951, p. 354] la propriété suivante des MR domaines d'intégrité D non réduits à des corps. Il y a, pour tout D , équivalence entre les conditions :

a) D a une infinité d'idéaux premiers ;

b) tout idéal premier est intersection de ses diviseurs maximaux. On obtient ainsi tous les MR-domaines d'intégrité qui sont des anneaux de Jacobson (cf. P. Jaffard, Séminaire Bourbaki, février 1956).

2.- Problèmes d'extension.

Krull et Akizuki avaient donné des conditions suffisantes pour qu'une extension d'un MR domaine A soit un MR domaine. Cohen a établi simplement le cas très général suivant :

Théorème 2. - Si A est un MR domaine de corps des quotients K et si S est un domaine, contenant A , et entier sur A , dont le corps des quotients L est extension finie de K , alors S est un MR domaine dont toute image homomorphe propre est un A-module de longueur finie.

On cherche à se ramener au cas pour lequel on a $K = L$ au moyen de trois lemmes.

Lemme 1. - Si pour tout idéal propre I de S , S/I est un A-module de longueur finie, S est un MR domaine.

En effet $S' = S/I$ est un anneau d'Artin car une chaîne infinie de sous-S-modules de S' est une chaîne infinie de sous-A-modules.

Lemme 2. - Si pour un I , idéal propre de S , S/I est un A-module de type fini, alors S/I est un A-module de longueur finie.

Soit le sous-A-module $U = I \cap A$ de A ; alors S/I est un A/U module de type fini. Si on avait $U = (0)$, on aurait, pour tout $x \in I - (0)$, $\sum_{i=1}^{u} a_i x^i = 0$ pour un u minimum $\geqslant 1$. ($a_i \in A$) d'où $a_0 \in I \cap A = (0)$ et u ne serait pas minimum[1] . Donc A/U est un anneau d'Artin et S/I est de longueur finie sur A[2] .

---

[1] La démonstration du lemme 2 fait intervenir seulement l'hypothèse que S est algébrique sur A et pas nécessairement le fait qu'il est entier.

[2] Un module $\mathfrak{M}$ normal sur B est de longueur finie si et seulement s'il est de type fini et si $\overline{B}$ est anneau d'Artin. La proposition directe est fausse si on a $0 : \mathfrak{M} \neq (0)$.

<u>Lemme 3</u>. - <u>Si on a</u> $K = L$, <u>le</u> A-<u>module</u> S/I <u>est de longueur finie pour tout idéal</u> I <u>propre de</u> S .

Il suffit de montrer que pour un $a \in A - \{0\}$ tel que $Sa \subseteq I \subset S$, le A-module S/Sa est de type fini : ce dernier sera de longueur finie d'après le lemme 2 donc a fortiori S/I en tant que A-module.

On considère pour tout entier $i = 1, 2, \ldots$ les idéaux U_i de A donnés par $U_i = Sa^i \cap A$ pour un $a \in (I \cap A) - \{0\}$, cette dernière expression n'étant pas vide d'après la démonstration du lemme 2 . La condition minimale restreinte pour A donne pour un n minimum :

$$Aa + U_{n+1} = Aa + U_{n+2} = \ldots$$

Or A est noethérien (cf. 1) donc U_n est un A-module de type fini donc aussi le sous A-module $U_n a^{-n}$ de S . On va démontrer que l'homomorphisme naturel h de S <u>sur</u> S/Sa envoie $U_n a^{-n}$ sur S/Sa qui sera alors bien de type fini sur A .

Or tout élément de S/Sa s'écrit sous la forme $\alpha + Sa$ avec $\alpha \in S$ et comme on a $K = L$ on peut prendre $\alpha = \frac{b}{c}$ avec $b \in A$, $c \in A - \{0\}$. Comme A est noethérien on a pour un $k \geq 0$ minimum :

(1) $$Ac : Aa^k = (Ac : Aa^k) : Aa \quad .$$

Alors a n'appartient à aucun des diviseurs premiers essentiels (maximaux et en nombre fini) de $Ac : Aa^k$. Donc Aa est premier à cet idéal et on a $1 = ra + \lambda$ $r \in A$, $\lambda \in A$ avec $\lambda a^k = tc$ pour un $t \in A$. Alors on a $\alpha a^k = \alpha r a^{k+1} + tb$ donc $\alpha \equiv \frac{tb}{a^k}$ (mod Sa) : on peut se borner à prendre $\alpha = \frac{e}{a^k}$ ($e \in A$) . Si $k \leq n$ on peut supposer que dans (1) on a $k = n$. Si $k \geq n$, on remarque que l'on a

$$e \in Sa^k \cap A = Uk \subseteq Aa + Uk + 1 \quad ,$$

on a donc $e \equiv fa \mod (Sa^{k+1})$ pour un $f \in A$ et donc $\alpha = \frac{e}{a^k} \equiv \frac{S}{a^{k-1}}$ (mod Sa) on se ramène en un nombre fini d'opérations à un élément α de la forme g/a^n avec $g \in A$. Comme on a $U_n a^{-n} = S \cap Aa^{-n}$ on a dans tous les cas $g/a^n \in U_n a^{-n}$.

<u>Démonstration du théorème</u> 1 :

On a $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ pour des $\alpha_i \in S$. On applique le lemme 2 en remplaçant S par $A' = A[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ qui est de type fini sur A : A'/I' est alors un A-module de longueur finie pour tout idéal propre I' de A', donc A' est un MR domaine d'après le lemme 1.

Comme le corps des quotients de A' est L, le lemme 3 appliqué à A' et S montre que pour tout idéal propre I de S, S/I est un A' module de type fini donc un A-module de type fini. Alors, d'après le lemme 2, S/I est de longueur finie comme A-module, donc, est un anneau d'Artin d'après le lemme 1 : S est bien un MR domaine d'après la première partie.

Théorème 3. - Tout anneau B compris entre un anneau de Dedekind A et le corps K des quotients de A est un anneau de Dedekind.

B est d'après le théorème précédent un MR anneau : reste à prouver qu'il est intégralement clos en K. Comme B est noethérien tout idéal entier propre I de B s'écrit sous la forme : $I = Bb_1 + \dots + Bb_h$ ($b_j \in I$, $j = 1, 2, \dots, h$) et on a, en posant : $J = Ab_1 + \dots + Ab_n$ et $J^{-1} = A : J$

$$I = BJ \ , \quad IBJ^{-1} = B \quad (\text{car } JJ^{-1} = A)$$

ce qui montre que I est inversible en B. Si alors $\alpha \in K$ est entier sur B on a, en posant $U = B[\alpha]$, $uU = I$ entier en B pour un $u \in B$. Comme I est inversible d'après ce qui précède, il en est de même de $U = U^2$ et donc on a $U = B$ c'est-à-dire $\alpha \in B$ et B est intégralement clos en K.

3.- Caractérisation des domaines de Dedekind.

Les propriétés rappelées en 1 montrent que les domaines de Dedekind sont les MR domaines intégralement clos dans leur corps des quotients. Le théorème classique de E. Noether sur la caractérisation d'un tel anneau par la factorisation unique en produit d'idéaux maximaux a été amélioré par Kubo, Matusita, Mori et Cohen. On dira qu'un idéal fractionnaire I de A est inversible, si on a $I.I^{-1} = A$ avec $I^{-1} = A : I = \{x \in K, xI \subseteq A\}$. On a le :

Théorème 4. - Si tout idéal propre du domaine A est produit d'idéaux premiers, A est un domaine de Dedekind[3].

---

(3) Le problème de la décomposition (d'un type voisin de la décomposition dans un anneau de Dedekind) d'un idéal fixé d'un anneau A a été étudié par Fuchs (Acta Math., V, 1954, p. 95-99).

On ne suppose pas a priori l'unicité de la factorisation. Un idéal non nul de A est inversible si et seulement si pour une décomposition particulière (donc pour toutes) les facteurs sont tous inversibles. En effet, I est inversible si et seulement s'il existe I' tel que $I.I' = A$ (car on a $A \supseteq I.(A : I) \supseteq I.I' = A$). Alors on voit par récurrence que la factorisation en idéaux premiers inversibles est unique car si $p_1 \dots p_r = p'_1 \dots p'_s$ on considère un idéal premier minimal p_1 par exemple dans l'ensemble $\{p_1, \dots, p'_s\}$ et on multiplie les deux membres de l'égalité précédente par $p_1^{-1} = A : p_1$.

Soit alors p un idéal premier propre et $a \in p - \{0\}$. On a $Aa = p^{*k}, \dots, \subseteq p$ donc $p \supseteq p^*$ par exemple et Aa étant inversible p^* l'est. On va prouver que p^* est maximal donc que $p(=p^*)$ est maximal et inversible. Si p^* n'était pas maximal on aurait pour un $c \in A - p^*$, $Ac + p^* \neq A$ et

$$Ac + p^* = p_1 p_2 \dots p_r \ , \quad Ac^2 + p^* = q_1 \dots q_t$$

Alors posant pour tout $U \supseteq p^*$, $U' = U/p^*$ on a $q'_1, \dots, q'_t = (p'_1, \dots, p'_r)^2 = (A'c')^2$ et la factorisation étant valable en $A' = A/p^*$ et $A'c'^2$ étant principal on a $q'_1 = q'_2 = p'_1$, $q'_3 = q'_4 = p'_2$, etc., donc en revenant à A on a $Ac^2 + p^* = (Ac + p^*)^2$ d'où $p^* \subseteq Ac + p^{*2}$. Alors $b \in p^*$ entraine $b \equiv dc(p^{*2})$, $dc \in p^*$ d'où $d \in p^*$ et finalement $b \in cp^* + p^{*2}$ et $p^* = p^*(Ac + p^*)$. Comme p^* est inversible on a la contradiction $A = Ac + p^*$.

Alors $I = p_1^{h_1}, \dots, p_r^{h_r} \subseteq J = p_1^{h_1}, \dots, p_r^{h_r}$ entraine d'après la maximalité et l'inversibilité des p_i (tous distincts) que $k_i \geqslant h_i$ pour tout i. Donc A satisfait à la condition MR. Si $\alpha \in K$ est intégralement dépendant sur A, $U = A[\alpha]$ est un idéal fractionnaire tel que $U^2 = U$. U étant fractionnaire, il existe un $c \in A - \{0\}$ tel que $cU \subseteq A$. Or cU est inversible d'après ce qui précède donc U l'est et on a $U = A$ donc $\alpha \in A$ qui est intégralement clos(4) et est donc domaine de Dedekind.

Théorème 5. - Si tout idéal entier premier, propre, du domaine A est inversible, A est un domaine de Dedekind.

---

(4) En fait on peut démontrer directement que A est complètement intégralement clos : $A[\alpha]$ est fractionnaire si et seulement si les α^n ont un dénominateur commun.

On voit facilement que cet énoncé équivaut à celui ci : A est domaine de Dedekind si et seulement si les idéaux fractionnaires non nuls forment un groupe pour la multiplication (Cf. Commutative algebra de P. Samuel).

On établit que chaque idéal entier premier non trivial p' est maximal car $A \supset p \supset p' \supset (0)$ entraine $(p'p^{-1})p = p'$, $p'p^{-1} \subseteq pp^{-1} = A$ $p'p^{-1} = p'$, $p'p = p'$ et enfin $p = R$. Alors A est noethérien (1, lemme) car tout idéal premier p a une base finie : on écrit que $1 \in pp^{-1}$. Alors pour chaque idéal entier $I \neq A$ et (0) il existe des idéaux premiers $p_1 , \dots , p_r$ tels que $p_i \supseteq I$ pour $i = 1 , 2 , \dots , r$ et $I \supseteq p_1 , \dots , p_r$. On a alors $A \supseteq p_r^{-1} I \supseteq p_1 , \dots , p_{r-1}$ et, par récurrence sur r , I est produit d'idéaux premiers inversibles maximaux. On en déduit comme au théorème précédent (ou d'après ce théorème) que A est anneau de Dedekind.

Lorsque A est un domaine noethérien on a les caractérisations suivantes :

<u>Théorème 6</u>. - <u>Si</u> A <u>est un domaine noethérien les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) A <u>est un domaine de Dedekind</u>.

b) <u>pour tout idéal maximal</u> M <u>de</u> A , $A_{(M)}$ <u>est anneau de valuation discrète</u>.

c) <u>on a</u> $M > M^2$ <u>pour tout idéal maximal de</u> A .

d) <u>tout idéal</u> M-<u>uniforme est une puissance de</u> M (M <u>idéal maximal</u>).

e) <u>les idéaux</u> M-<u>uniformes (pour</u> M <u>fixé) sont en chaine</u>.

f) <u>le treillis des idéaux entiers de</u> A <u>est distributif</u>.

g) A <u>est un anneau de multiplication</u>.

h) $I : (J \cap L) = (I : J) + (I : L)$ (I , J , L <u>idéaux entiers quelconques</u>).

<u>Démonstration</u> : Si on a a) pour tout idéal maximal M l'anneau des quotients $A_{(M)}$ est noethérien. Ses idéaux correspondent biunivoquement aux idéaux de A qui sont primaires pour l'idéal M , ils sont donc en chaîne et $A_{(M)}$ est donc un anneau de valuation, d'où b) . Les conditions c) jusqu'à h) résultent de la factorisation unique en idéaux premiers.

Inversement si on a b) on a $A = \bigcap_M A_{(M)}$ donc A est complètement intégralement clos ; tout $MA_{(M)}$ est premier minimal en M donc M est premier minimal en A : en A tout idéal premier minimal est maximal et on a a).

Alors c) entraine b) . Car pour tout idéal maximal M on a dans l'anneau $A' = A_{(M)}$ d'idéal maximum $M' = MA_{(M)}$, $M' > M'^2$ donc $M' = A'a' + M'^2$

pour tout $a' \in M' - M'^2$. La méthode du déterminant de Krull s'applique : M' a une base finie en A', soit $M' = A'm'_1 + \dots + A'm'_p$. Alors on a pour tout i : $m'_i = \alpha'_i a' + \sum_{j=1}^{p} c'_{ij} m'_j$ avec $c'_{ij} \in M'$ soit $dm'_j \in A'a'$ pour tout j avec $d = \det(\delta_{ij} - c'_{ij})$ d'où $M' \subseteq A'a'$ et $M' = A'a'$. Comme on a $\bigcap_k M'^k = (0)$, d'après le théorème d'intersection, A' est un anneau de valuation discrète et on a b) donc a).

Si d) est vérifiée. Soit q un idéal p-primaire avec p maximal, on a $q = p_1^{h_1}, \dots, p_r^{h_r}$, $q \supseteq p^\alpha$ donc $p_i \supseteq p$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ donc $p = p_i$ pour tout i et on a donc c). Si e) est vérifiée soit p un idéal maximal p/p^2 est un espace vectoriel sur le corps A/p dont les sous-espaces sont en chaîne : il est de dimension un et on a $p > p^2$ donc on a c). Si on a f) g) ou h) (les anneaux correspondants sont étudiés à la section suivante) on a la propriété c). Car f) entraine que l'espace p/p^2 a un treillis distributif et est donc de dimension un, on a encore c). Alors g) entraine c) en appelant anneau de multiplication un anneau tel que $I \supseteq J$ entraine que $J = II'$ pour un idéal I' : on applique ceci à une chaine $M \supset U \supseteq M^2$ en considérant le radical de U.

Si on suppose h), si on n'avait pas e), soient J et L deux idéaux M-uniformes non comparables. Alors $U = J \cap I$ est tel que $U : J$ et $U : L$ sont contenus en M tandis que $U : (J \cap L) = A \subseteq M$ ce qui est impossible : on a e) donc a). Remarquons enfin que les conditions e) f) g) h) sont satisfaites par des anneaux de valuation arbitraires. Un exposé ultérieur montrera comment les notions d'irréductibilité conduisent à d'autres caractérisations des domaines de Dedekind.

Enfin on voit facilement que les domaines de Dedekind sont les domaines noethériens pour lesquels $I \supseteq J \Longrightarrow (J : I)I = J$ (anneaux de multiplication[5]) : on applique le critère c). Donc g) entraine a).

4.- Anneaux arithmétiques.

Le théorème 6 montre qu'un domaine d'intégrité noethérien est un anneau de Dedekind si et seulement si le treillis de ses idéaux entiers est distributif (condition f)). Ladislaus Fuchs (Über die Ideale arithmetischer Ringe, Comm. Math. Helvetici, vol. 23, 1949, p. 334-341) a donné l'étude suivante :

---

(5) S. Mori : Struktur der Multiplikation Ringe (J. of Sc. Hiroshima Univ., ser. A, vol. 16, 1952-53, p. 1). Il y a donc identité entre les anneaux arithmétiques et les anneaux de multiplication dans le cas noethérien.

Définition 1. - On appelle anneau arithmétique un anneau A dont le treillis des idéaux est distributif.

Définition 2. - Un idéal I d'un anneau est dit primitif (ou $\cap$-premier) si $I \supseteq L \cap M$ entraine soit $I \supseteq L$ soit $I \supseteq M$ (ou les deux) et totalement primitif si la propriété précédente s'étend aux intersections infinies.

On voit immédiatement qu'un idéal premier est primitif, qu'un idéal primitif est irréductible, et qu'un idéal totalement primitif est super-irréductible. On a alors le :

Théorème 7. - Un anneau arithmétique si et seulement si tout idéal irréductible est primitif.

La loi de distributivité s'écrit indiféremment, suivant une propriété générale des treillis :

$$I + (J \cap L) = (I + J) \cap (I + L) \quad \text{ou} \quad I \cap (J + L) = (I \cap J) + (I \cap L)$$

ou encore :

$$I + (J \cap L) \supseteq (I + J) \cap (I + L) \quad \text{ou} \quad I \cap (J + L) \subseteq (I \cap J) + (I \cap L).$$

Si on suppose l'anneau A arithmétique et un idéal donné I de A irréductible, alors $I \supseteq J \cap L$ entraine : $I = I + (J \cap L) \supseteq (I + J) \cap (I + L)$ donc $I \supseteq I + J$ par exemple soit $I \supseteq J$. Si inversement dans l'anneau A tout idéal irréductible est primitif on utilise le lemme : Dans le treillis T des idéaux entiers de A tout élément est intersection d'éléments inter-irréductibles. Ce résultat est valable en tout anneau A, et s'obtient en appliquant le théorème de Zorn à l'ensemble (inductif) des éléments de T qui contiennent l'élément donné U de T et ne contiennent pas un élément arbitrairement fixé x de $A - U$. Notons en passant que si A est en plus un MR anneau l'intersection considérée dans l'énoncé du lemme en question peut être ramenée à une sous-intersection finie (Cf. 1).

On applique alors le lemme à $\Delta = I + (J \cap L)$; on a $\Delta = \bigcap_\alpha U_\alpha$ chaque U_α étant alors primitif. On a pour tout α : $U_\alpha \supseteq J \cap L$ donc soit $U_\alpha \supseteq J$ (donc $U_\alpha \supseteq I + J$), soit $U_\alpha \supseteq L$ (donc $U_\alpha \supseteq I + L$). Finalement on a $\Delta = \bigcap U_\alpha \supseteq (I + J) \cap (I + L)$ et A est un anneau arithmétique.

Théorème 8. - Un anneau arithmétique A est un MR anneau si et seulement si tout idéal non nul est intersection finie d'idéaux totalement primitifs.

Si A est un MR anneau arithmétique tout idéal primitif est totalement primitif d'où la proposition. Inversement si pour l'anneau arithmétique A tout idéal non nul est intersection finie d'idéaux totalement primitifs soit $I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \dots \supsetneq I_n \supsetneq \dots \supsetneq I \supset (0)$ une chaîne descendante bornée par $I = \bigcap_n I_n$ non nul. On a par hypothèse $I = P_1 \cap \dots \cap P_k$, les idéaux P_j étant des idéaux totalement primitifs. On en déduit que pour un n_0 fini on a $I \supseteq I_{n_0}$ donc $I = I_{n_0}$, et A est un MR anneau.

5.- Anneaux de rang fini.

Un anneau A est de rang fini n si tout idéal a une base de n éléments. Il peut être de rang inférieur à u et est alors de rang $n+p$ pour tout $p \geqslant 1$. Il est alors noethérien mais la réciproque est fausse (par exemple $K[X, Y]$).

Les anneaux de rang 1 sont les anneaux à idéaux principaux, les anneaux de Dedekind sont de rang 2 (théorème 10), les anneaux d'entiers algébriques sont de rang fini (théorème 10). Un anneau d'Artin a un rang égal à sa longueur (le rang minimum pouvant être plus petit). On a pour les domaines locaux le :

Théorème 9. - Un domaine noethérien local A est de rang fini si et seulement si c'est un MR domaine.

a) Si A ne satisfait pas à la condition minimale restreinte son idéal maximal M n'est pas le seul idéal premier propre. On va voir que A n'est pas de rang fini en trouvant pour tout n un idéal n'ayant pas une base de n éléments. Soit r le plus petit entier tel qu'il existe r éléments $u_1, \dots, u_r$ en A qui engendrent un idéal q uniforme de radical M (6). Si on avait $r = 1$ le théorème de Krull sur l'élément principal entrainerait que M serait minimal parmi les idéaux premiers non nuls donc que A serait un MR anneau : on a $r \geqslant 2$. On va montrer que q^n n'a pas de base de moins de $n+1$ éléments et même de moins de $N = N(n, r)$ nombre des monômes de degré n à r variables.

Si on avait pour q^n une base de $N-1$ éléments, l'espace vectoriel $E = q^n/Mq^n$ sur le corps $K = A/M$ serait de dimension au plus $N-1$. Les éléments de E correspondant aux N monômes de degré n en $u_1, \dots, u_r$ seraient linéairement dépendants sur K : il existerait alors une forme ϕ de

---

(6) C'est-à-dire soit r la dimension de l'anneau local A, les $u_1, \dots, u_r$ étant un système de paramètres uniformisants.

degré n à r variables, à coefficients en A, mais pas tous en M telle que l'on ait $\Phi(u_1, \dots, u_r) \in Mq^n$. On montre que l'on est alors conduit à une contradiction.

b) Si A est un MR anneau, les théorèmes de structure pour sa complétion A' vont montrer que R est de rang fini. On sait (I. S. Cohen : Trans. Amer. math. Soc., vol. 59, 1946, th. 16, p. 90) que A' est un module $A_0 x_1 + \dots + A_0 x_k$ sur un sous-anneau A_0 de valuation discrète, en particulier principal, donc tout idéal de A', qui est un A_0-module, est aussi engendré par k éléments : A' est de rang k.

Soit I un idéal non nul de A on a :

$$A'I = A'a'_1 + \dots + A'a'_k \qquad (a'_i \in A', \ i = 1, 2, \dots, k)$$

Comme MI est primaire pour M on a $MI \supseteq M^h$ pour un h donc $A'M^h \subseteq A'MI$ et A' étant complet il existe des $a_i \in A$ tels que l'on ait $a_i \equiv a'_i \mod A'M^h$ (donc mod $A'MI$) donc $a_i \in A'I$ et comme l'on a d'après les propriétés de complétion : $A'I \cap A = I$ on a $a_i \in I$ pour tout i et donc $I' = Aa_1 + \dots + Aa_k \subseteq I$. Le théorème d'intersection de Krull permet de conclure : on a $A'I \subseteq A'I' + A'MI$ donc $I \subseteq (A'I' + A'MI) \cap A = I' + MI$ et plus généralement $I \subseteq I' + M^{\ell} I$ pour tout $\ell \geq 1$, donc $I \subseteq I'$ et finalement $I = I' = Aa_1 + \dots + Aa_k$: A est de rang k.

L'application de ce théorème conduit aussi au :

Théorème 10. - Un domaine A est de rang fini si et seulement s'il est noethérien et si les anneaux des quotients de A relativement à ses idéaux premiers p ont des rangs finis pouvant être pris égaux à un nombre k. Alors A a un rang égal à $k + 1$ dès qu'il est noethérich. Si A a pour rang m, tous les anneaux quotients ont le rang m.

On voit aussi qu'avec A non noethérien il peut arriver que chacun des anneaux quotients $A_{(p)}$ soit anneau de valuation discrète donc de rang 1 : il suffit d'adjoindre au corps P des rationnels les racines p-ièmes de l'unité pour tout p et de prendre pour A l'anneau des entiers de ce corps.

On en déduit aussi qu'un domaine de rang fini est un MR domaine, la réciproque étant fausse (Zariski), et qu'un MR domaine A, dont la cloture intégrale est de type fini sur A, est de rang fini, la réciproque étant également fausse : il existe des domaines (locaux, avec un seul idéal premier non nul) dont la clôture intégrale n'est pas de type fini et sont par ailleurs de rang fini puisqu'il satisfont à la condition MR.