Isidore Fleischer

Les homomorphismes dans les algèbres généralisées

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 19, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A9_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 19

LES HOMOMORPHISMES DANS LES ALGÈBRES GÉNÉRALISÉES.

(Exposé de Isidore FLEISCHER, le 21 mars 1955)

-:-:-:-

On peut dire que les faits les plus élémentaires qu'on connaît dans la théorie des groupes sont : la correspondance entre homomorphismes et sous-groupes invariants ; les deux théorèmes d'isomorphisme, et les extensions qui s'y rattachent, comme le théorème de Jordan - Hölder, le théorème de Schreier, etc. Ces résultats permettent, par exemple, de ramener l'étude d'un groupe quelconque satisfaisant aux deux conditions de chaîne, à une suite finie de groupes simples et à une suite d'extensions entre eux : étude que, dans le cas non-commutatif, on est encore loin de pouvoir compléter d'une manière satisfaisante.

De nombreuses tentatives ont été entreprises pour étendre ces théorèmes fondamentaux aux systèmes algébriques plus généraux. Il y a environ trente ans, Emmy Noether et Krull les ont démontrés pour les groupes aux opérateurs, et aussi, bien entendu, pour les anneaux. Vers 1933, la notion d'algèbre universelle (ou, comme je préfère l'appeler, algèbre généralisée) s'est dégagée, et on s'occupait à établir ces résultats pour de tels systèmes, qui contiennent comme cas spéciaux toutes les structures algébriques.

Je me propose ici d'exposer ce développement, sans tenir compte de tous les travaux qui ont été faits à son sujet, (ce qui dépasserait de beaucoup le cadre d'une telle conférence), mais, en me bornant à suivre une voie logique plutôt qu'historique. J'emprunterai aux divers auteurs les notions et idées qui me seront utiles. A la fin je donnerai une application aux groupes partiellement ordonnés qui comporte quelques nouveautés.

1.- Pour commencer, nous allons introduire un formalisme qui sera suffisamment général pour couvrir toutes les applications que nous avons en vue.

Nous nous plaçons dans un ensemble E où sont définies une ou plusieurs (ou même une infinité) d'opérations algébriques généralisées. Une telle opération (dite n-aire) associe à des suites de n éléments de E $x_1 , \dots , x_n$ des éléments y de E. Nous ne supposons ni que les opérations soient partout définies (i. e., pour <u>chaque</u> suite de n éléments) ni qu'elles soient univoques (i. e., que y soit unique). Une opération n-aire n'est donc autre chose qu'un sous-ensemble du produit de E (n+1)-fois : à savoir, l'ensemble des $(x_1 , \dots , x_n, y)$. Bien que déjà d'une grande généralité, ce système ne peut pourtant pas contenir comme cas particuliers les structures algébriques où opèrent des lois externes (c'est-à-dire qui font intervenir des ensembles supplémentaires) comme, par exemple, les espaces vectoriels. Nous allons remédier à ce défaut et en même temps simplifier la description afin de pouvoir la manier sans nous égarer dans une forêt de notations.

Rappelons, d'abord, que notre but est de traiter des homomorphismes. Or, une application d'une algèbre à plusieurs lois est un homomorphisme si et seulement s'il l'est pour chacune des lois séparément. Nous pouvons, alors, nous restreindre au cas d'une algèbre à une seule loi. Puis nous allons supposer que cette loi unique est <u>binaire</u>. Les particularités du cas n-aire se trouvent notamment déjà dans ce cas spécial, de sorte que la généralisation sera facile. Après, nous pouvons rendre notre opération univoque en supposant qu'elle prenne ces valeurs non dans E mais dans l'ensemble des parties de E : nous ferons correspondre à deux éléments composables de E le sous-ensemble de ces valeurs. On peut tenir compte, finalement, des lois externes en supposant que l'opération est définie sur des couples d'éléments venant d'ensembles différents.

Nous aboutissons alors à la définition suivante : Une <u>algèbre</u> (<u>généralisée</u>) A sera un triple d'ensembles (X , Y , Z) et une loi ou opération, qui fait correspondre à certains couples (x , y), $x \in X$, $y \in Y$ un élément unique $z = xy$ de Z. Cette loi peut, d'ailleurs, être soumise à des axiomes divers tels que l'associativité (si les trois ensembles se confondent : - on se trouve alors dans un groupoïde), la commutativité (si X et Y sont égaux), l'existence d'éléments remarquables, comme élément unité à gauche (Y et Z égaux) ou à droite (X et Z égaux), éléments inverses, etc... La seule restriction que nous exigeons est que l'<u>image homomorphe</u> (définition au prochain numéro) <u>d'une algèbre soit une algèbre</u>.

Cette définition isole, au moins dans une certaine mesure, l'essence de l'idée de structure algébrique (comme la définition de groupoïde isole celle de structure aux lois internes), sans entraîner des complications excessives.

2.- Soient A et A' deux algèbres. Une application φ de A dans A' sera par définition un triple d'applications de X dans X', de Y dans Y', et de Z dans Z'. On dira que φ est <u>biunivoque</u> si chacune des trois applications l'est ; on dira que φ applique A sur A' si chacune des trois applications est une application sur l'ensemble correspondant.

Une application biunivoque de A sur A' est un <u>isomorphisme</u> si $\varphi(x)\varphi(y)$ est défini si et seulement si xy est défini et si l'on a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. L'isomorphisme est une relation réflexive, symétrique, et transitive ; elle respecte toutes les propriétés algébriques.

Une <u>représentation</u> de A dans A' est une application telle que l'existence de xy implique celle de $\varphi(x)\varphi(y)$ et que l'on ait $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Une représentation est un isomorphisme si et seulement si elle a une inverse qui est aussi une représentation.

Par contre, un <u>homomorphisme</u> est une représentation telle que l'existence de $\varphi(x)\varphi(y)$ implique celle de xy pour au moins un $x\,y$. Ainsi, un homomorphisme biunivoque est un isomorphisme.

On voit tout de suite, en faisant les identifications évidentes de A avec une sous-algèbre de A', qu'une représentation biunivoque n'est autre chose qu'un <u>prolongement de l'opération</u>. Les représentations sont en grande partie ramenées aux homomorphismes grâce au

<u>THÉORÈME 1</u> : <u>Chaque représentation de</u> A <u>dans</u> A' <u>se décompose d'une seule façon en un homomorphisme suivi d'une représentation biunivoque</u>.

<u>DÉMONSTRATION</u> : On définira l'algèbre A'' au moyen des ensembles X', Y', Z' l'opération coïncidant avec celle de A', mais seulement définie pour les couples $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ pour lesquels xy existe. A'' est une algèbre (comme image homomorphe de A) et l'injection de A'' dans A' est une représentation biunivoque.

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Si l'opération de</u> A <u>est partout définie, chaque représentation est un homomorphisme</u>.

On sait qu'il existe des représentations biunivoques dans les groupes partiellement ordonnés qui ne sont pas des isomorphismes (des renforcements de l'ordre) ; donc la structure d'un groupe partiellement ordonné ne peut pas être définie par des opérations partout définies.

3.- Par une relation d'équivalence ϑ dans une algèbre, nous entendons un triple de relations ϑ_X , ϑ_Y , ϑ_Z , une dans chacun des ensembles X , Y , Z . Une telle relation est appelée <u>régulière</u> si lorsqu'on a $x \simeq x'$ (ϑ_X) , $y \simeq y'$ (ϑ_Y) et que xy , $x'y'$ sont définis en même temps, il en résulte $x\,y \simeq x'y'$ (ϑ_Z) . Sur les trois ensembles X/ϑ_X , Y/ϑ_Y , Z/ϑ_Z de classes suivant ϑ, on peut définir la loi de composition suivante : le composé $\bar{x}\,\bar{y}$ existera si xy existe pour une paire $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$; et il sera la classe commune de tous les xy . Ce système est visiblement image homomorphe de A , donc une algèbre, A/ϑ .

Inversement, un homomorphisme de A sur A' induit dans A une relation d'équivalence, qui, d'après les axiomes, est régulière. L'algèbre quotient par cette relation est isomorphe à A'.

<u>THÉORÈME 2</u> (<u>Théorème d'homomorphisme</u>) : <u>Il y a correspondance biunivoque entre les homomorphismes qui appliquent</u> A <u>sur d'autres algèbres et les équivalences régulières</u>.

<u>REMARQUE</u> : Nous n'avons pas besoin de parler des équivalences régulières d'un côté puisqu'elles sont déjà comprises dans notre formalisme. En effet, si l'algèbre est un groupoïde, auquel cas on peut identifier les trois ensembles, ce qu'on appelle d'habitude une équivalence régulière est précisément une de nos équivalences qui dans chacun des trois ensembles induit la même relation d'équivalence ; tandis qu'une équivalence régulière à droite, par exemple, est une équivalence d'algèbre qui dans Y induit l'égalité. (Remarquons que ϑ_X , ϑ_Y , ϑ_Z peuvent être distincts même si X , Y , Z sont identifiés).

Si on compose un homomorphisme de A sur A' et un homomorphisme de A' sur A" on obtient un homomorphisme de A sur A" . Ce fait et des raisonnements classiques utilisant le théorème 2 permettent de déduire le

<u>THÉORÈME 3</u> (<u>Premier théorème d'isomorphisme</u>): <u>Si</u> ϑ <u>est une équivalence régulière dans</u> A <u>correspondant à un homomorphisme sur</u> A' , <u>alors il y a correspondance biunivoque entre les équivalences régulières dans</u> A' <u>et les équivalences régulières dans</u> A <u>contenant</u> ϑ. <u>Les algèbres quotients par deux équivalences correspondantes sont isomorphes</u>.

4.- En ce qui concerne le second théorème d'isomorphisme, il y a deux versions possibles, toutes deux généralisant le cas des groupes, suivant qu'on le considère comme un théorème sur les sous-algèbre ou comme un théorème sur les équivalences régulières (D'après le théorème 2, il n'y a plus de connexion simple entre ces deux aspects dans les algèbres généralisées). Nous allons choisir la deuxième possibilité.

Afin de donner un énoncé du théorème adapté aux algèbres généralisées, précisons ce qui se passe dans le cas des groupes. On rappelle qu'on se donne un groupe G et deux sous-groupes H et K dont H est invariant. En restreignant l'homomorphisme de G sur G/H à K on obtient un homomorphisme de K sur KH/H dont le noyau est $H \cap K$; et c'est au moyen de cet homomorphisme qu'on affirme l'isomorphisme de $K/H \cap K$ avec KH/H. Or, notre point de vue est que K n'est autre chose qu'une classe suivant une équivalence régulière d'un côté : on voit d'ailleurs tout de suite que l'homomorphisme modulo H applique <u>chaque</u> classe suivant K sur une classe de KH/H dans G/H (il suffit déjà que ceci soit vrai pour les classes de $K/H \cap K$ dans $G/H \cap K$). Nous avons ainsi un énoncé du théorème qui ne fait pas intervenir les sous-groupes, donc qu'on peut généraliser aux équivalences régulières dans les algèbres généralisées.

Si A est une algèbre, l'intersection de chaque famille d'équivalences régulières est une équivalence régulière : autrement dit, les équivalences régulières sur A forment un <u>treillis complet</u> (qui est en plus sous-treillis du treillis de toutes les équivalences). On définit le produit de deux équivalences ϑ et ϑ' par $a\,\vartheta\vartheta'\,b$ si et seulement s'il existe c tel que $a\,\vartheta\,c$ et $c\,\vartheta'\,b$. Le produit n'est pas forcément une équivalence puisqu'il n'est pas nécessairement transitif ni même symétrique ; toutefois, s'il en est ainsi (auquel cas on dit que les équivalences sont <u>permutables</u>) le produit est une équivalence régulière et coïncide donc avec la borne supérieure $\vartheta \cup \vartheta'$ de ϑ et ϑ' (qui est par définition l'intersection de toutes les équivalences contenant ϑ et ϑ').

<u>THÉORÈME 4</u> : (<u>Second théorème d'isomorphisme</u>) : <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que l'homomorphisme de</u> A <u>sur</u> A/ϑ' <u>applique chaque classe de</u> ϑ <u>sur une classe de</u> $\vartheta \cup \vartheta'$ <u>est que</u> ϑ <u>et</u> ϑ' <u>soient permutables</u>.

<u>DÉMONSTRATION</u> : Soit a un élément de A ; un élément b a même image par ϑ' qu'un élément c dans la classe de a suivant ϑ si et seulement si $a\,\vartheta\,c$ et $c\,\vartheta'\,b$, c'est-à-dire, $a\,\vartheta\vartheta'\,b$.

<u>REMARQUE</u> : Le théorème contient celui des groupes puisqu'un sous-groupe invariant est permutable avec tout autre sous-groupe. Il contient aussi un

théorème sur des sous-groupes non-invariants.

A vrai dire, le théorème 4 exprime plutôt une propriété des relatiohs d'équivalences ; la loi algébrique n'intervient ni dans l'énoncé, ni dans la démonstration.

Nous allons démontrer le théorème de Jordan-Hölder dans sa forme généralisée due à Schreier. Puisqu'un cas spécial du théorème est le second théorème d'isomorphisme il faut supposer au moins que les équivalences qui figurent soient deux à deux permutables.

Supposons alors que nous avons un sous-treillis du treillis des équivalences régulières de l'algèbre A composé d'équivalences <u>deux à deux permutables</u>. Un tel sous-treillis est toujours <u>modulaire</u>. En effet, soit $\vartheta \subseteq \vartheta'$, et soient a , $b \in A$ tel que $a \simeq b \; [(\vartheta \cup \vartheta'') \cap \vartheta']$. Nous avons donc un c tel que $a \, \vartheta \, c$, $c \, \vartheta'' \, b$, et $a \, \vartheta' \, b$. Or, la première congruence implique, par hypothèse, $a \, \vartheta' \, c$, et, tenant compte de la troisième, $c \, \vartheta' \, b$, donc $c (\vartheta'' \cap \vartheta') \, b$, d'où, $a [\vartheta \cup (\vartheta'' \cap \vartheta')] \, b$.

<u>REMARQUE</u> : Ceci est une généralisation du fait bien connu que les sous-groupes invariants d'un groupe forment un treillis modulaire.

Etant donné deux paires d'équivalences de notre treillis, $\vartheta_1 \subseteq \vartheta_2$ et $\vartheta'_1 \subseteq \vartheta'_2$ on dira qu'elles sont <u>correspondantes</u> si l'homomorphisme de A/ϑ'_1 sur A/ϑ'_2 d'une part, restreint à une classe de ϑ_1 , induit l'application identique, et d'autre part, applique une classe de ϑ_1 entière sur une classe de ϑ_2 (c'est-à-dire, exprimé en opérations latticielles, on doit avoir $\vartheta_1 \cap \vartheta'_2 = \vartheta_1 \cap \vartheta'_1$ et $\vartheta_1 \cup \vartheta'_2 = \vartheta_2 \cup \vartheta'_2$) et de meme pour l'homomorphisme de A/ϑ_1 sur A/ϑ_2 ($\vartheta'_1 \cap \vartheta_2 = \vartheta_1 \cap \vartheta'_1$ et $\vartheta'_1 \cup \vartheta_2 = \vartheta_2 \cup \vartheta'_2$) . On peut résumer ces quatre formules en deux : $\vartheta_1 \cap \vartheta'_2 = \vartheta'_1 \cap \vartheta_2$ et $\vartheta_1 \cup \vartheta'_2 = \vartheta'_1 \cup \vartheta_2$. On constate par des calculs faciles que les paires $\vartheta \subseteq \vartheta \cup \vartheta'$ et $\vartheta \cap \vartheta' \subseteq \vartheta'$ sont correspondantes (second théorème d'isomorphisme), et que la correspondance de deux paires $\vartheta_1 \subseteq \vartheta_2$ et $\vartheta'_1 \subseteq \vartheta'_2$ équivaut à la correspondance de chaque paire avec $\vartheta_1 \cap \vartheta'_1 \subseteq \vartheta_2 \cap \vartheta'_2$ ou encore avec $\vartheta_1 \cup \vartheta'_1 \subseteq \vartheta_2 \cup \vartheta'_2$.

<u>REMARQUE</u> : Bien qu'impliquant l'isomorphisme des groupes quotients des noyaux associés aux équivalences dans le cas des groupes, la correspondance n'est pas une relation transitive.

THÉORÈME 5 (Schreier) : Etant donné deux suites d'équivalences $\vartheta_1 \subseteq \ldots \subseteq \vartheta_m$ et $\vartheta'_1 \subseteq \ldots \subseteq \vartheta'_n$ dans un treillis d'équivalences deux à deux permutables, on peut intercaler des termes dans les deux suites de telle façon que les nouvelles suites aient même longueur et que les paires formées des termes successifs soient correspondantes.

DÉMONSTRATION (Zassenhaus) : Les termes intercalés seront
$\vartheta_i \subseteq \ldots (\vartheta_i \cup \vartheta'_j) \cap \vartheta_{i+1} = \vartheta_i \cup (\vartheta'_j \cap \vartheta_{i+1})$ (modularité !) $\ldots \subseteq \vartheta_{i+1}$
et de même $\vartheta'_j \subseteq \ldots \subseteq (\vartheta'_j \cup \vartheta_i) \cap \vartheta'_{j+1} = \vartheta'_j \cup (\vartheta_i \cap \vartheta'_{j+1}) \ldots \subseteq \vartheta'_{j+1}$.
Les paires $(\vartheta_i \cup \vartheta'_j) \cap \vartheta_{i+1} \subseteq (\vartheta_i \cup \vartheta'_{j+1}) \cap \vartheta_{i+1}$ et $(\vartheta'_j \cup \vartheta_i) \cap \vartheta'_{j+1} \subseteq (\vartheta'_j \cup \vartheta_{i+1}) \cap \vartheta'_{j+1}$ sont correspondantes.

REMARQUES : Il existe aussi une traduction latticielle du théorème de Krull-Schmidt sur l'unicité d'une décomposition d'un groupe satisfaisant aux deux conditions de chaîne en somme directe de sous-groupes indécomposables, qui donne le théorème analogue pour nos algèbres.

Tout le développement esquissé ici pour les équivalences régulières s'étend aussi aux sous-algèbres d'une algèbre comme il a été mentioné plus haut. Il importe, dans ce cas, de prendre comme axiome que la restriction d'un homomorphisme à une sous-algèbre est encore un homomorphisme.

5.- Nous allons appliquer la théorie développée plus haut aux groupes partiellement ordonnés dans la mesure où la chose est possible. Commençons par les groupes préordonnés, pour lesquels tout marche bien.

Rappelons qu'on appelle préordre sur un ensemble E une relation binaire, réflexive et transitive, c'est-à-dire, satisfaisant à $x \leq x$ et $x \leq y$, $y \leq z \longrightarrow x \leq z$. Pour un groupe préordonné on suppose en plus que le préordre soit compatible avec la multiplication du sens précis suivant : la translation (à gauche ou à droite) par un élément du groupe respecte $\leq$: $x \leq y \longrightarrow ax \leq ay$ et $xa \leq ya$.

Il est possible de faire rentrer ce système dans notre formalisme. Prenons une algèbre A où les trois ensembles X , Y , Z sont tous égaux à un seul ensemble G , et supposons que dans G opère, à côté de l'opération algébrique (que nous noterons désormais avec $\circ$ $- x \circ y -$ pour éviter toute confusion), une deuxième opération écrite multiplicativement pour laquelle G est un groupe. Supposons encore que la loi de distributivité soit valable : si $x \circ y$ est défini il en est de même de $ax \circ ay$ et l'on a

$a(x \circ y) = ax \circ ay$ (et de même pour les multiplications à droite).

REMARQUES : La plupart des considérations ci-dessous sont valables pour le cas plus général où on suppose simplement qu'un groupe transitif d'automorphismes opère dans l'algèbre.

S'il s'agit d'un groupe préordonné on définira la loi algébrique que voici : $x \circ y$ sera défini si et seulement si $x \leq y$ et sera par définition y. Les axiomes du préordre se traduisent en outre par : $x \circ x$ est toujours défini et de l'existence de $x \circ y$ et de $y \circ z$ résulte celle de $x \circ z$. Inversement, si on se donne une loi satisfaisant à ces conditions et si on pose $x \leq y$ si et seulement si $x \circ y$ existe, on a bien un préordre.

Les homomorphismes qu'on considérera devront être, bien entendu, des homomorphismes par rapport à la structure de préordre et par rapport à la structure de groupe. Remarquons que notre axiome fondamental d'après lequel l'image homomorphe d'une algèbre doit être une algèbre, est satisfait pour les groupes préordonnés. Le seul point à vérifier est la transitivité. Soit alors G' image homomorphe de G et supposons que $x' \leq y'$ et $y' \leq z'$ dans G'. D'après la définition de l'homomorphisme, il existe x_1, y_1 dans G tel que $x_1 \leq y_1$ et $x_1 \longrightarrow x'$, $y_1 \longrightarrow y'$ et de même pour une paire $y_2 \leq z_2$. Or, cette dernière inégalité implique $y_1 = (y_1 y_2^{-1})\, y_2$ $\leq y_1 y_2^{-1} z_2$ donc $x_1 \leq y_1 y_2^{-1} z_2$ et par passage à G',
$x' \leq y' y'^{-1} z' = z'$.

REMARQUE : L'image homomorphe d'un ensemble préordonné n'est pas forcément un ensemble préordonné.

Nous pouvons donc appliquer aux groupes préordonnés toute la théorie développée dans les numéros précédents. Cette remarque est pourtant moins profonde qu'on ne croit à première vue. Pour le constater, retournons un moment au cas général d'une loi algébrique compatible avec une structure de groupe et faisons une petite étude des homomorphismes.

Nous avons convenu qu'un homomorphisme doit respecter la structure de groupe : il est donc déterminé par son noyau qui est un sous-groupe H. Quelles conditions doit satisfaire H pour que l'homomorphisme qu'il définit respecte aussi l'autre loi ? Nous voulons définir cette loi dans G/H par transfert : donc il faut et il suffit que chaque fois que xoy, $xhoy$, $xoyh$ sont définis, ils aient même valeur, modulo H. Compte tenu du fait qu'il s'agit d'un groupe, il suffit de vérifier la condition pour les éléments de la forme $e \circ z$, $h \circ z$, $e \circ z h$. Or, si la loi est déduite d'un préordre, cette condition est automatiquement satisfaite : en d'autres termes, les homomorphismes d'un groupe préordonné se confondent avec les homomorphismes au sens de la théorie de groupes : notre théorie dans ce cas est déjà contenue dans la théorie classique.

Les faits sont tout autres pour les groupes réticulés. D'après Stone, un groupe réticulé est un groupe dans lequel est défini une deuxième opération binaire v qui est idempotente, commutative, associative, et satisfait aux deux lois de distributivité. Il est immédiat que ces propriétés sont conservées par homomorphisme (d'autre part, puisque v est partout défini, les homomorphismes et les représentations se confondent). Donc, notre théorie est valable pour les groupes réticulés. Mais, il n'est plus vrai que chaque sous-groupe d'un groupe réticulé est le noyau d'un homomorphisme de sa structure. En effet, puisque e est un idempotent pour v on déduit, en posant $z = e$ plus haut, que H doit être stable pour v ; en outre, H doit être convexe puisque de $e \leq z \leq h$ on tire $z \in H$.

Si la théorie s'applique commodément aux groupes réticulés, et trivialement aux groupes préordonnés, pour les groupes proprement ordonnés, elle se trouve en défaut. Un groupe ordonné est par définition un groupe préordonné dans lequel $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$. Or cet axiome n'est pas conservé par homomorphisme, comme nous allons voir, de sorte que l'image homomorphe d'un groupe ordonné n'est pas forcément un groupe ordonné mais seulement un groupe préordonné. On sait, en effet, que l'image sera un groupe ordonné si et seulement si le noyau est un sous-groupe convexe. Pour ces noyaux on peut développer la théorie jusqu'au premier théorème d'isomorphisme (théorème 3). L'exemple suivant montre qu'on ne peut pas aller plus loin.

Soit G l'ensemble de tous les points du plan qui ont des coordonnées qui sont ou bien toutes deux des entiers pairs ou bien toutes deux des entiers impairs. On ordonne G comme sous-groupe de la somme directe des groupes ordonnés des entiers : c'est-à-dire, on pose $(a , b) \geqslant (a' , b')$ si et seulement si $a \geqslant a'$ et $b \geqslant b'$. Or, les sous-groupes de $\{(a , 0)\}$ et de $\{(0 , b)\}$ sont tous deux convexes ; mais leur réunion n'est plus un sous-groupe convexe. Il ne peut donc être question du second théorème d'isomorphisme, ni, à fortiori, du théorème de Jordan-Hölder-Schreier. Remarquons aussi que l'image homomorphe d'un de ces sous-groupes par l'homomorphisme induit par l'autre, n'est pas un sous-groupe convexe. Le groupe G n'est pas réticulé ; (1,1) v (2,0) n'existe pas, par exemple.

Pour arriver à des énoncés valables il faut donc mettre expressément dans l'hypothèse que le résultat de chaque opération dont on aura besoin dans la démonstration, conduira à des sous-groupes convexes.

6.- Remarques Bibliographiques · Des systèmes avec opérations non partout définies sont traités à fond par K. Shoda, Allgemeine Algebra, Osaka Math J 1 (1949) 182 - 225 qui démontre le théorème 1 ci-dessus. Pour les équivalences régulières, je me suis basé sur la discussion analogue pour les groupoïdes dans P. Dubreil, Algèbre et sur N. Bourbaki Algèbre chapître 1 (celui-ci contient une "version sous-algèbre" du second théorème d'isomorphisme).

La première généralisation du théorème de Jordan-Hölder remonte à R. Dedekind : Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, Math. Ann. 53 (1900) 371 - 403. Dans ce beau travail, Dedekind introduit pour la première fois les treillis modulaires et montre que la modularité est nécessaire et suffisante pour que deux chaînes maximales entre deux éléments aient même longueur. La traduction latticielle du théorème de Schreier se trouve chez O. Ore : On the foundations of abstract algebra I Ann. of Math. 36 (1935) 406 - 437. On trouvera un chapître sur les applications des treillis à l'algèbre (et une version "mixte" du théorème de Jordan-Hölder) dans le livre de G. Birkhoff : Lattice Theory.

Une version en termes d'équivalences a été donnée pour la première fois dans M.L. Dubreil-Jacotin et P. Dubreil : Théorie algébrique des relations d'équivalence, J. de Math. 104 (1939) 63 - 96 où sont introduit les équivalences permutables. Toutes les idées de mon développement ont été empruntées à ce mémoire ; toutefois il contient un assez gros inconvénient : c'est que la définition d'isomorphisme qui y est donnée (d'après Ore) est si faible que les résultats ne contiennent pas ceux de la théorie de groupes : en termes de la notation de cet exposé, ils ne sont valables que pour les algèbres aux opérations définies nulle part. Cet inconvénient a été en grande partie éliminé dans A. Châtelet Les théorèmes de Jordan-Hölder et Schreier Revue Sci. Ill. 85 (1947) 579 - 596 où les mêmes résultats sont démontrés à l'aide de la théorie des treillis, avec une définition plus stricte d'isomorphisme. J'ai suivi les notations de M. Châtelet, mais en insistant davantage sur l'interprétation "ensembliste".

Enfin, E.P. Shimbrieva : Sur la théorie des groupes partiellement ordonnés (En russe) mat. Shornik $\underline{62}$ (NS 20)(1947) 145 - 175 a démontré les théorèmes du début de cet exposé pour les groupes partiellement ordonnés, et a donné un contre-exemple pour la version sous-algèbre du second théorème (qui implique, dans ce cas, la version algèbre quotient).