Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

CH. PISOT

Quelques résultats nouveaux dans l'étude d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. nº 15, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 15

QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX DANS L'ÉTUDE D'UN ENSEMBLE REMARQUABLE D'ENTIERS ALGÉBRIQUES.

(Résumé de la conférence faite par Ch. PISOT, le 21 février 1955).
[les démonstrations viennent de paraître [3] et [4].].

-:-:-:-

Soit θ un entier algébrique, zéro du polynome $P(z) \equiv p_0 + p_1 z + \dots + \varepsilon z^s$, $p_0 > 0$, $\varepsilon = \pm 1$, dont tous les conjugués θ_i , sauf θ , vérifient les inégalités strictes $|\theta_i| < 1$; posons $Q(z) \equiv \varepsilon z^s P(1/z)$. L'étude de l'ensemble S des nombres θ est intimement liée à celle des fractions rationnelles $A(z)/Q(z)$, où $|A(z)| \leqq |Q(z)|$ sur $|z| = 1$ et où $A(z)$ est un polynome à coefficients entiers. Ces fractions forment dans $|z| < 1$ une famille normale fermée [2] ; il en résulte que l'ensemble S est fermé [5] et que les nombres θ de S qui appartiennent à l'ensemble dérivé S' sont caractérisés par l'existence d'un polynome $A(z)$ pour lequel l'égalité $|A(z)| = |Q(z)|$ sur $|z| = 1$ n'a lieu qu'en un nombre fini de points au plus [1].

Les fractions rationnelles $A(z)/Q(z)$ ont un seul pôle $z = 1/\theta$ dans $|z| \leqq 1$; leur développement $u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$ a des coefficients u_n entiers rationnels. Une méthode d'étude [3] de l'ensemble S peut être déduite du "problème des coefficients" pour les fonctions $f(z)$ méromorphes dans $|z| \leqq 1$, réelles pour z réel, ayant un seul pôle $z = \alpha > 0$ dans $|z| \leqq 1$ et vérifiant $|f(z)| \leqq 1$ sur $|z| = 1$, avec $f(0) = u_0 \geqq 1$. Dans le cas où $u_0 > 1$, on considère la fonction $f_1(z) \equiv z \dfrac{u_0 f(z) - 1}{f(z) - u_0}$; si $u_0 = 1$, on considère

$$g_2(z) = \frac{(z^2 + u_1 z - 1)f(z) - (z^2 - 1)}{(z^2 - u_1 z - 1) - (z^2 - 1)f(z)}$$; les fonctions $f_1(z)$ ou $g_2(z)$

sont holomorphes dans $|z| \leqq 1$ et bornées supérieurement par 1 sur

$|z| = 1$; on peut alors, par un procédé classique, obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour le développement de $f(z)$, ne faisant intervenir que les coefficients u_n . En appliquant les résultats obtenus aux fonctions $f(z) \equiv A(z)/Q(z)$, on peut ainsi déterminer tous les nombres de S inférieurs à $\theta'_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; on en déduit que θ'_1 est le plus petit nombre de S' (cf.[6] et [1]). On peut de même montrer [4] , que les seuls nombres de S' inférieurs à 1,8 sont θ'_1 et $\theta'_2 = 1,75 \ldots$, zéro de $1 - z + 2z^2 - z^3$, carré du plus petit nombre de S .

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. t.70 (1953), p. 105-133.

[2] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, Bull. Sc. Math. t.77 (1953), p. 129-136.

[3] J.Dufresnoy et Ch. Pisot , Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. t.72 (1955), p. 69-92.

[4] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, Bull. Sc. Math. t.79 (1955), sous presse.

[5] R. Salem Duke Math. J. t.11 (1944), p. 103-108.

[6] C. Siegel Duke Math. J. t.11 (1944), p. 597-602.
