M. Krasner

La non-existence de certaines extensions des corps

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. nº 3, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 3

LA NON-EXISTENCE DE CERTAINES EXTENSIONS DES CORPS

(Exposé de M. KRASNER, le 22 novembre 1954)

-:-:-:-

A la suite d'une question posée en 1942 par A. Herstein, j'avais prouvé le théorème suivant :

Théorème 1 : k étant un corps autre qu'une extension algébrique d'un champ de Galois, si K/k est une extension telle que tout $\alpha \in K$ annule un polynôme de la forme $f_\alpha(x) = x^{n(\alpha)} + x + a(\alpha)$, où $n(\alpha)$ est un entier positif et $a(\alpha)$ est $\in k$, $n(\alpha)$ et $a(\alpha)$ pouvant dépendre de α , on a $K = k$.

Idée de démonstration : Supposons $K \neq k$. Soit $\alpha \notin k$ un élément fixe de K et soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q, \dots$ une suite infinie d'éléments distincts non-nuls de k . On a $n(\lambda_q\alpha) \rightarrow +\infty$, car autrement on obtiendrait par élimination un polynôme $\in k[x]$ de 1er degré annulé par α . Soit $|\dots|$ une valuation non-triviale de K , et soient $\bar{k}$, $\bar{K}$ les complétés de k,K par rapport à cette valuation. On prendra α tel que $|\alpha| < 1$ et les λ_q tels que $\lambda_q \rightarrow 1$ au sens de $|\dots|$. Alors α annule $f_{\lambda_q\alpha}(\lambda_q x) = (\lambda_q x)^{n(\lambda_q\alpha)} + \lambda_q x + a(\lambda_q\alpha)$ et $(\lambda_q\alpha)^{n(\lambda_q\alpha)} \rightarrow 0$ dans K . Par suite, $a(\lambda_q\alpha) \rightarrow -\lambda_q\alpha \rightarrow -\alpha$ et $\alpha \in \bar{k}$. Ainsi, pour toute $|\dots|$, on a $\bar{K} = \bar{k}$. On réduit, d'autre part, le problème au cas où k est une extension simple (algébrique ou transcendante) d'un corps premier et on montre que si k n'est pas une extension algébrique d'un champ de Galois, $K \neq k$ implique, dans ce cas, l'existence d'une valuation non-triviale $|\dots|$ telle que $\bar{K} \neq \bar{k}$.

Pour les détails voir [1].

En 1943, j'ai généralisé comme suit ce résultat en simplifiant sa démonstration :

Théorème 2 : k étant un corps autre qu'une extension algébrique d'un champ de Galois, soit K/k une extension algébrique séparable telle que tout $\alpha \in K$ annule un polynôme de la forme $f_\alpha(x) = x^{n(\alpha)} + c(x) + \varphi(x;\alpha)$, où $c(x)$ est un polynôme fixe $\in k[x]$ se divisant exactement par x^m , $n(\alpha)$ est un entier $\neq m$ et $\varphi(x;\alpha)$ est un polynôme $\in k[x]$ de degré $< m$, $n(\alpha)$ et

$\varphi(x;\alpha)$ pouvant dépendre de α . Alors, $(K:k) \leq m$.

Idée de démonstration. On peut supposer, si le théorème est faux, que $K = k(\alpha)$, où α est de degré $>$ m par rapport à k . Soient $|\ldots|$ une valuation non-triviale de k et $|\ldots|_1$, $\ldots|_2$, $|\ldots$, $|\ldots|_s$ toutes les valuations de K qui la prolongent. Organisons K en un corps ultranormé, en prenant comme norme $\|\xi\| = \operatorname{Max} |\xi|_i$ $(\xi \in K)$. Le complété $\tilde{K}$ de K par rapport à cette ultranorme est métriquement isomorphe à la somme directe $\oplus \bar{K}_i$ des complétés $\bar{K}_i$ de K par rapport à $|\ldots|_i$, organisé par la norme $\|(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s\ldots)\| = \operatorname{Max} |\xi_i|_i$ $(\xi_i \in K_i)$, un $\xi \in K$ étant identifié avec $(\xi,\xi,\ldots,\xi)$. Or, $\bar{k}$ étant le complété de k par rapport à $|\ldots|$, K est aussi égal à l'extension $K_{\bar{k}}$ de l'algèbre K/k par $\bar{k}$ à condition d'identifier tout $\lambda \in \bar{k}$ avec $(\lambda,\lambda,\ldots,\lambda)$. On a $(K_{\bar{k}}:\bar{k}) = (K:k)$. Ainsi, K est un espace vectoriel de rang fini sur le corps valué complet $\bar{k}$, et on montre que sa norme $\|\ldots\|$ est compatible avec sa structure d'espace vectoriel : $\|\lambda\xi\| = |\lambda| \, \|\xi\|$. $(\lambda \in \bar{k}, \xi \in K)$. Donc, cette norme y définit la topologie produit et si $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(j)}$ sont linéairement indépendants sur $\bar{k}$, $\sum \lambda_q^{(i)} \xi^{(i)}$ tend vers une limite dans K si, et seulement si tout $\lambda^{(i)}_q \in \bar{k}$ tend vers une limite $\lambda^{(i)} \in k$ et on a alors $\sum \lambda_q^{(i)} \xi^{(i)} \longrightarrow \sum \lambda^{(i)} \xi^{(i)}$. Les éléments de K linéairement indépendants sur k restent linéairement indépendants sur $\bar{k}$ dans $\tilde{K}$, et ceci a lieu en particulier, pour $1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^m$ (et, plus généralement, pour $1,\lambda\alpha,(\lambda\alpha)^2,\ldots,(\lambda\alpha)^m$, où $\lambda \neq 0$ est $\in k$) . Par suite, α ne peut annuler aucun polynôme $\in k[x]$ de degré $\leq m$.

On peut choisir α de manière que $\|\alpha\| < 1$. U étant le groupe multiplicatif des $\lambda \in k$ tels que $|\lambda| = 1$, il est dense en soi. Si $\lambda \in U$, il existe une suite des $\lambda_q \in U$ distincts telle que $\lambda_q \longrightarrow \lambda$. Si l'on n'a pas $n(\lambda_q\alpha) \longrightarrow +\infty$, on peut trouver une infinité des q tels que $n(\lambda_q\alpha)$ ait une valeur fixe n . Donc α annule tous les polynômes $\lambda_q^n x^n + c(\lambda_q x) + \varphi(\lambda_q x;\lambda_q\alpha)$, λ_q prenant une infinité de valeurs distincts, ce qui permet d'obtenir, par élimination, un polynôme $\in k[x]$ de degré m annulé par α, contre l'hypothèse. Si $n(\lambda_q\alpha) \longrightarrow +\infty$, on a, dans $\tilde{K}$, $(\lambda_q\alpha)^{n(\lambda_q\alpha)} \longrightarrow 0$, $c(\lambda_q\alpha) \longrightarrow c(\lambda\alpha)$, d'où $\varphi(\lambda_q\alpha;\lambda_q\alpha) \longrightarrow -c(\lambda\alpha)$. Or, si $\varphi_q^*(x) = \varphi(\lambda_q\lambda^{-1}x;\lambda_q\alpha)$, $\varphi_q^*(x)$ est $\in k[x] \subseteq \bar{k}[x]$ et $\varphi_q^*(\lambda\alpha)$, qui est une combinaison linéaire des $1,\lambda\alpha,(\lambda\alpha)^2,\ldots,(\lambda\alpha)^{m-1}$ à coefficients dans $k \subseteq \bar{k}$, tend vers $-c(\lambda\alpha)$. Ainsi, les coefficients correspondants de ces combinaisons, autrement dit les coefficients correspondants des $\varphi_q^*(x)$, tendent vers quelques limites dans $\bar{k}$ et les $\varphi_q^*(x)$ tendent vers un polynôme $\varphi^*(x;\lambda\alpha) \in \bar{k}[x]$. Le degré de $\varphi^*(x;\lambda\alpha)$ est $< m$ et on a $-c(\lambda\alpha) = \varphi^*(\lambda\alpha;\lambda\alpha)$. Ainsi, $\lambda\alpha$ annule $c(x) + \varphi^*(x;\lambda\alpha)$. En donnant à λ une infinité de valeurs distincts, on voit, par élimination que $\alpha \in K$ annule un polynôme $\in \bar{k}[x]$ de degré m, contre l'hypothèse.

Une légère généralisation de ce théorème est le

Théorème 3 : La conclusion du théorème 2 est encore exacte si $f_\alpha(x)$ a la forme $\sum_{i=0}^{p(\alpha)} a_i(\alpha)x^{n_i(\alpha)} + \varphi(x;\alpha)$, où $p(\alpha)$ ne dépasse pas une constante p, où $m = n_0(\alpha) < n_1(\alpha) < \dots < n_{p(\alpha)}(\alpha)$, et où les $a_i(\alpha)$ appartiennent à un ensemble fini fixé d'éléments non-nuls de k.

Idée de démonstration. On applique aux $f_{\lambda_q\alpha}(x)$ le même raisonnement que précédemment, en remarquant que seule l'hypothèse $f_{\lambda_q\alpha}(x) \in \bar{k}[x]$ (et non $f_{\lambda_q\alpha}(x) \in k[x]$) suffit pour qu'il soit valable. On écarte, comme précédemment l'hypothèse que $n_{p(\lambda_q\alpha)}(\lambda_q\alpha)$ ne tend pas vers $+\infty$. Si $n_{p(\lambda_q\alpha)}(\lambda_q\alpha) \to +\infty$ le raisonnement considéré montre que tout $\lambda\alpha$, $\lambda \in U$, annule un polynôme $f^*_{\lambda\alpha}(x) = \sum_{i=0}^{p^*(\alpha)} a_i^*(\lambda\alpha)\, x^{n_i^*(\lambda\alpha)} + \varphi^*(x;\lambda\alpha) \in \bar{k}[x]$ qui est de la même forme que précédemment, mais avec p diminué d'une unité. En appliquant de nouveau le même raisonnement aux $f^*_{\lambda_q\alpha}(x)$, etc, on obtient, après p pas d'induction au plus, un polynôme $\in \bar{k}[x]$ de la même forme, mais avec $p = 0$, autrement dit un polynôme de degré m, annulé par α.

Pour les détails de démonstrations des théorèmes 2 et 3 voir [2] et [3].

Il est assez curieux que ces résultats, qui ne concernent que la structure abstraite des corps, se démontrent par l'emploi de certaines valuations. Ces démonstrations perdent leur validité quand k est algébrique par rapport à un champ de Galois (quand les théorèmes sont, également, faux), car un tel k ne possède aucune valuation non-triviale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. KRASNER, The non-existence of certain extensions, Amer. Journ. of Math., 75 (I), 1953, p. II2-II6.

[2] M. KRASNER, La non-existence des extensions d'une certaine forme. C.R. Acad. Sc. Paris, 1953, p. 370-372.

[3] M. KRASNER, Complèments à ma Note précédente. C.R. Acad. Sc. Paris, 1953, p. 685-687.