M. Jaffard

# Sur les groupes réticulés associés à un groupe ordonné

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 8 (1954-1955), exp. n° 27, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A13_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 27

# SUR LES GROUPES RÉTICULÉS ASSOCIÉS A UN GROUPE ORDONNÉ.

(Exposé de M. JAFFARD, le 23 mai 1955).

-:-:-:-

Par groupe ordonné, nous entendrons dans tout cet exposé un groupe abélien muni d'une structure d'ordre (en général partiel) compatible avec sa structure de groupe.

Etant donné un groupe ordonné $G$, un des problèmes essentiels de la théorie de la divisibilité est de déterminer quand et comment on peut le considérer comme un sous-groupe d'un produit direct ordonné $\prod_{\iota \in I} G_{\iota}$, tous les $G_{\iota}$ étant des groupes totalement ordonnés. Lorsque $G$ est plongé dans un tel produit direct ordonné, on dit que l'on a obtenu une réalisation de $G$.

Pour obtenir une telle réalisation, on a avantage à procéder en deux temps : 1) On plonge $G$ dans un groupe réticulé $\Gamma$.

2) On cherche une réalisation de $\Gamma$.

Le deuxième problème qui peut donc s'énoncer "quand et comment peut-on réaliser un groupe réticulé $G$ comme un sous-groupe d'un produit direct ordonné $\prod_{\iota \in I} G_{\iota}$ de groupes totalement ordonnés" a été étudié en détail : Lorenzen [7] a montré que tout groupe réticulé $\Gamma$ peut être considéré comme un sous-groupe propre d'un tel produit direct (rappelons qu'un sous-groupe réticulé $H$ d'un groupe réticulé $G$ est dit propre ou coréticulé, si les opérations inf et sup sont les mêmes dans $H$ et dans $G$). Nous avons montré [3] comment, dans certains cas, les groupes $G_{\iota}$ peuvent être déterminés de manière unique et [5] quels sont les groupes réticulés tels que l'on puisse prendre pour $I$ un ensemble fini d'indices.

Nous nous intéresserons ici au problème 1) en cherchant à déterminer le plus exactement possible tous les groupes réticulés dans lesquels on peut plonger $G$.

Lorenzen a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse plonger le groupe ordonné $G$ dans un groupe réticulé est que $G$ soit <u>semi-clos</u>, c'est-à-dire que pour tout $x \in G$ la relation $x^n \geq 1$ ($n$ étant un entier $> 0$) entraîne $x \geq 1$ .

Supposons que $G$ soit plongé dans un groupe réticulé $\Gamma$ . Comme toute intersection de sous-groupes propres de $\Gamma$ est encore un sous-groupe propre de $\Gamma$ , on voit qu'il existera un sous-groupe propre $\Lambda$ de $\Gamma$ contenant $G$ et tel que tout sous-groupe propre de $\Gamma$ contenant $G$ contienne $\Lambda$ . $\Lambda$ peut être caractérisé par la propriété intrinsèque suivante : <u>tout sous-groupe propre de $\Lambda$ contenant $G$ est confondu avec $\Lambda$</u> . Un tel groupe réticulé contenant $G$ sera dit <u>groupe de Lorenzen attaché à</u> $G$ . Ces groupes de Lorenzen sont les seuls qui vont nous intéresser par la suite.

<u>Théorème 1</u> : <u>Un groupe réticulé $\Lambda$ contenant $G$ est groupe de Lorenzen de $G$ si et si seulement tout élément de $\Lambda$ est de la forme</u> :

$$\frac{\inf(x_1 , \ldots , x_n)}{\inf(y_1 , \ldots , y_m)} \qquad \text{avec} \quad x_1 , \ldots , x_n , y_1 , \ldots , y_m \in G .$$

Supposons que $G$ soit contenu dans le groupe réticulé $\Gamma$. On voit que tout élément de cette forme appartient nécessairement au groupe de Lorenzen de $G$ défini par $\Gamma$ . Soit $\Lambda$ l'ensemble de ces éléments. $\Lambda$ est nécessairement un sous-groupe de $\Gamma$ car (les symboles $X$ et $Y$ désignant des sous-ensembles finis de $G$ ) on a :

$$\frac{\inf X_1}{\inf Y_1} \cdot \frac{\inf X_2}{\inf Y_2} = \frac{\inf (X_1X_2)}{\inf (Y_1Y_2)}$$

C'est un sous-groupe propre de $\Gamma$ car, en réduisant préalablement au même dénominateur) on voit que :

$$\inf \left( \frac{\inf X_1}{\inf Y} , \frac{\inf X_2}{\inf Y} \right) = \frac{\inf (X_1 \cup X_2)}{\inf Y}$$ . D'où le théorème.

$\Lambda$ étant un groupe de Lorenzen de $G$ , on peut définir une application $X \longrightarrow X_r$ de l'ensemble des parties finies de $G$ dans l'ensemble des parties de $G$ de la manière suivante :

$$x \in X_r \rightleftarrows \{ x \geq \inf X \ \ (\text{dans } \Lambda ) \}$$

On voit alors que $X$ et $Y$ étant deux sous-ensembles finis de $G$ on a les relations suivantes :

(1) $\quad X \subset X_r$

(2) $\quad X \subset Y_r$ entraîne $X_r \subset Y_r$

(3) $(a)_r = a\,G_+ = (a)$

(4) $a\,X_r = (a\,X)_r$

$G_+$ désignant l'ensemble des éléments de $G$ qui sont $\geq 1$ .
$X_r$ est dit le <u>r-idéal engendré par</u> $X$ .

Plus généralement on dit que l'on a défini sur le groupe ordonné $G$ un système d'idéaux finis si on s'est donné une application $X \longrightarrow X_r$ de l'ensemble des parties finies de $G$ dans l'ensemble des parties de $G$ vérifiant les relations 1) à 4) . On montre alors que sur l'ensemble des idéaux ainsi définis (r-idéaux) on peut définir un <u>produit</u> en posant :

$$X_r \,.\, Y_r = (X\,Y)_r$$

On dit que le groupe $G$ vérifie la propriété $r - \gamma$ si par rapport à ce produit les r-idéaux forment un semi-groupe, c'est-à-dire si :

(5) $X_r \times Y_r = X_r \times Y'_r \longrightarrow Y_r = Y'_r$

$\Lambda$ étant un groupe de Lorenzen de $G$ , définissant sur $G$ le système des r-idéaux, on voit que $G$ vérifie $r - \gamma$ . En outre on peut identifier $\Lambda$ au groupe des quotients associé au semi-groupe des r-idéaux en identifiant tout élément

$$\frac{\inf\,(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n)}{\inf\,(y_1\,,\,\dots\,,\,y_m)} \quad \text{de } \Lambda \text{ à l'élément } \quad \frac{(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n)_r}{(y_1\,,\,\dots\,,\,y_m)_r}$$

de ce groupe des quotients. En particulier, on identifie aussi l'élément $x$ de $G$ à l'idéal principal $(x) = x\,G_+$ . On voit alors que la relation d'ordre défini sur $\Gamma$ peut être encore définie par :

(6) $\dfrac{X_r}{Y_r} \geq 1 \Longleftrightarrow Y_r \supset X_r$ .

Réciproquement supposons que l'on se donne sur $G$ un système de r-idéaux finis formant un semi-groupe, c'est-à-dire tel que $G$ vérifie la propriété $r - \gamma$ . On peut considérer le groupe des quotients $\Lambda$ de ce semi-groupe comme un groupe réticulé en le munissant de la structure d'ordre définie par la relation (6). En identifiant chaque élément $x$ de $G$ à l'idéal principal $(x)$ , on voit que $G$ est un sous-groupe ordonné de $\Lambda$ et comme tout élément $\dfrac{X_r}{Y_r}$ de $\Lambda$ est alors de la forme $\dfrac{\inf X}{\inf Y}$ , $\Lambda$ est groupe de Lorenzen de $G$ en vertu du théorème 1 .

D'où :

<u>Théorème 2</u> : <u>Les groupes de Lorenzen de</u> $G$ <u>correspondent biunivoquement aux systèmes d'idéaux finis sur</u> $G$ <u>formant un semi-groupe</u>.

Etant donnés sur $G$ deux systèmes d'idéaux finis, le $r$-système et le $r'$-système, on dit que le $r$-système est plus fin que le $r'$-système si pour tout sous-ensemble fini $X$ de $G$ on a $X_r \subset X_{r'}$ .

Si le $r$-système est plus fin que le $r'$-système l'égalité $X_r = Y_r$ entraîne $X_{r'} = Y_{r'}$ .

En effet $X_r = Y_r$ entraîne $X \subset Y_{r'}$ donc $X_{r'} \subset Y_{r'}$ . De même $Y_{r'} \subset X_{r'}$ . Parmi tous les systèmes d'idéaux finis que l'on peut définir sur $G$ , il en existe un plus fin que tous les autres, c'est le s-système défini par :

$$X_s = \bigcup_{x \in X} (x)$$

et un moins fin que tous les autres, c'est le v-système défini par :

$$X_v = \bigcap_{(x) \supset X} (x)$$

Etant donné un système de $r$-idéaux finis sur le groups ordonné $G$ , on dit que $G$ est $r$-clos ou vérifie la propriété $r - \delta$ si la relation $x X_r \subset X_r$ entraîne toujours $1 \leq x$ .

On montre en particulier que $G$ est s-clos si et seulement si il est semi-clos : Supposons $G$ s-clos et soit $x^n \geq 1$ ($n$ entier $>0$). On a :

$$(1 , x , x^2 , \dots , x^{n-1})_s \, x = (x^n , x , \dots , x^{n-1})_s$$
$$\subset (1 , x , \dots , x^{n-1})_s$$ donc $x \geq 1$ . $G$ est semi-clos.

Réciproquement, supposons $G$ semi-clos. Soit $X = \{x_1 , \dots , x_n\}_s$ et $x$ tel que $x X_s \subset X_s$ . D'après la définition des s-idéaux, pour tout $i$ $(1 \leq i \leq n)$ $\exists \varphi(i)$ tel que $1 \leq \varphi(i) \leq n$ et $x x_i \geq x_{\varphi(i)}$ . En itérant on trouve: $x^m x_i \geq x_{\varphi^m(i)}$ . Considérons la suite $\varphi(1)$ , $\varphi^2(1)$ , ... et soit $p$ un nombre tel que $\varphi^p(1) = \varphi^{p+q}(1)$ . Posons $i = \varphi^p(1)$ . On a $\varphi^q(i) = i$ $x^q x_i \geq x_i$ donc $x^q \geq 1$ et, $G$ , étant semi-clos, $x \geq 1$ . $G$ est donc s-clos.

Si $G$ est le groupe de divisibilité d'un corps $K$ par rapport à un ordre $A$ de ce corps, les idéaux (fractionnaires) finis de Dedekind de $A$ définissent sur $G$ un système d'idéaux finis, le d-système. On montre que $G$ est d-clos si et seulement si $A$ est intégralement clos dans $K$ .

Si $G$ vérifie la propriété $r - \gamma$ il vérifie $r - \delta$ : Supposons en effet que $G$ vérifie $r - \gamma$ et soit $x X_r \subset X_r$ . On en déduit

$X_r = (x X \cup X)_r = (x , 1)_r \times X_r$ , d'où en simplifiant par $X_r$ : $(1) = (x , 1)_r$ ou $x \geq 1$. G vérifie bien $r - \delta$ . Le groupe G peut vérifier $r - \delta$ sans vérifier $r - \gamma$ . Toutefois s'il vérifie $r - \delta$ on montre que l'on peut définir un système d'idéaux finis moins fin que le r-système, le $r_a$-système, tel que G vérifie $r_a - \gamma$ . Le $r_a$-système est ainsi défini :

$$x \in X_{r_a} \rightleftarrows \exists Z_r \text{ avec } x Z_r \subset X_r \times Z_r$$

Le $r_a$-système est le plus fin parmi les systèmes moins fins que r et vérifiant la propriété $\gamma$ .

<u>Si le r-système est plus fin que le r'-système et si</u> G <u>vérifie</u> $r' - \delta$ , <u>il vérifie également</u> $r - \delta$ :
En effet l'égalité $x X_r \subset X_r$ entraîne $x X \subset X_{r'}$ ou $x X_{r'} \subset X_{r'}$ donc $x \geq 1$ .
On en déduit le théorème annoncé au début :
<u>Théorème 3</u> : <u>Le groupe ordonné</u> G <u>peut être plongé dans un groupe réticulé si et seulement si il est semi-clos</u>.

Le théorème 2 montre que G peut être plongé dans un groupe réticulé si et si seulement il existe sur G un système d'idéaux formant un semi-groupe, ce qui revient à dire en vertu de ce qui précède qu'il existe sur G un système de r-idéaux tel que G vérifie $r - \delta$ ou encore que G vérifie $s - \delta$ .

Un homomorphisme f d'un groupe réticulé G dans un groupe réticulé G' est dit <u>propre</u> si pour tout couple $x , y \in G$ on a :

$$f(\inf(x , y)) = \inf(f(x) , f(y)) .$$

<u>Théorème 4</u> : <u>Etant donnés sur le groupe ordonné</u> G <u>deux systèmes d'idéaux finis, le r-système et le r'-système tels que</u> G <u>vérifie les propriétés</u> $r - \gamma$ <u>et</u> $r' - \gamma$ <u>et tels que le r-système soit plus fin que le r'-système, l'application identique de</u> G <u>sur lui-même peut se prolonger</u> d'une <u>et d'une seule manière en un homomorphisme propre du groupe de Lorenzen</u> $\Lambda_r$ <u>relatif au r-système sur le groupe de Lorenzen</u> $\Lambda_{r'}$ <u>relatif au r'-système</u>.

Cette application f si elle existe est nécessairement unique car on aura alors :

$$f\left(\frac{\inf(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\inf(y_1,y_2,\dots,y_m)}\right) = \frac{\inf(f(x_1),\dots,f(x_n))}{\inf(f(y_1),\dots,f(y_m))} = \frac{\inf(x_1,\dots,x_n)}{\inf(y_1,\dots,y_m)}$$

les opérations inf étant celles définies sur $\Lambda_r$ dans le premier membre de l'égalité et celles définies sur $\Lambda_{r'}$ dans les deux autres.

Montrons que $f$ existe :

Soit $f : \dfrac{X_r}{Y_r} \longrightarrow \dfrac{X_{r'}}{Y_{r'}}$ .

On définit bien ainsi une application de $\Lambda_r$ dans $\Lambda_{r'}$ car $\dfrac{X_r}{Y_r} = \dfrac{X'_r}{Y'_r}$ entraîne $X_r \times Y'_r = Y_r \times X'_r$ donc, puisque $r$ est plus fin que $r'$ :

$$X_{r'} \times Y'_{r'} = Y_{r'} \times X'_{r'} \quad \text{ou} \quad \frac{X_{r'}}{Y_{r'}} = \frac{X'_{r'}}{Y'_{r'}} .$$

On vérifie immédiatement que cette application est un homomorphisme de $\Lambda_r$ sur $\Lambda_{r'}$. Cet homomorphisme est propre car (une fois réduits au même dénominateurs) on a :

$$f(\inf(X_r/Y_r\ ,\ X'_r/Y_r)) = f((X \cup X')_r/Y_r) = \inf\ (f(X_r/Y_r)\ ,\ f(X'_r/Y_r)) .$$

D'où le théorème.

En particulier à tout groupe de Lorenzen $\Lambda_r$ de $G$ défini par un système des $r$-idéaux de $G$ ($G$ vérifiant $r - \gamma$) correspond un homomorphisme propre $f_r$ de $\Lambda_{s_a} = \Lambda$ sur $\Lambda_r$.

Le noyau $H_r = f_r^{-1}(1)$ de cet homomorphisme a les trois propriétés suivantes :

1) C'est un sous-groupe <u>isolé</u> de $\Lambda$ (c'est-à-dire tel que les relations $1 \leq x \leq y$ et $y \in H_r$ entraînent $x \in H_r$).

2) c'est un sous-groupe propre de $\Lambda$ .

3) Il est tel que $H_r \cap G = \{1\}$ .

Soit réciproquement un sous-groupe $H$ de $\Lambda$ isolé, propre et tel que $H \cap G = \{1\}$ . Soit $f$ l'application canonique de $\Lambda$ sur $\Lambda/H = \Gamma$ $H$ étant un sous-groupe isolé de $G$, on voit que l'on peut définir sur $\Gamma$ une structure d'ordre compatible avec sa structure de groupe en prenant pour éléments $\geq 1$ dans $\Gamma$ les images des éléments $\geq 1$ dans $\Lambda$ (structure d'ordre canonique). En tenant compte du fait que $H$ est propre, on voit que $\Gamma$ est alors réticulé et que l'application $f$ est propre.
Enfin $H_r \cap G = \{1\}$ montre que $G$ peut être identifié à son image par $f$. $\Lambda$ étant groupe de Lorenzen de $G$, il n'existe pas de sous-groupe propre de $\Lambda$ contenant $G$ et autre que $\Lambda$. On en déduit que la même propriété est vraie pour $\Gamma$ qui est donc un groupe de Lorenzen $\Lambda_r$ de $G$.

On a $H = H_r$ .

Il y a donc correspondance biunivoque entre les sous-groupes isolés propres de $\Lambda$ dont l'intersection avec $G$ est $\{1\}$ et les groupes de Lorenzen de $G$ .

Soient sur $G$ deux systèmes d'idéaux, formant semi-groupe, le r-système et le r'-système. Le r-système est plus fin que le r'-système si et seulement si $H_r \subset H_{r'}$ : supposons le r-système plus fin que le r'-système et soit $X_{s_a} / Y_{s_a} \in H_r$ . On a par définition de $H_r$ : $X_r = Y_r$ , donc $X_{r'} = Y_{r'}$ et $X_{s_a} / Y_{s_a} \in H_{r'}$ . Par suite $H_r \subset H_{r'}$ .

Supposons réciproquement $H_r \subset H_{r'}$ . Soit $x \in X_r$ . On a dans $\Lambda_r$ : $X_r \leqslant (x)$ . Puisque $\Lambda_r$ est isomorphe à $\Lambda/H_r$ ordonné canoniquement, il existe $Y_{s_a}$ et $Z_{s_a}$ tel que l'on ait dans $\Lambda$ : $Y_{s_a}/Z_{s_a} \in H_r X_{s_a}$ et $Y_{s_a}/Z_{s_a} \leqslant x$ . D'où $Y_{s_a}/Z_{s_a} \in H_{r'} X_{s_a}$ et comme $\Lambda_{r'}$ est isomorphe à $\Lambda/H_{r'}$ ordonné canoniquement on a dans $\Lambda_{r'}$ : $X_{r'} \leqslant (x)$ ou $x \in X_{r'}$ . Donc $X_r \subset X_{r'}$ et le r-système est plus fin que le r'-système.
Par suite :

<u>Théorème 5</u> : $\Lambda$ <u>étant le groupe de Lorenzen de</u> $G$ <u>défini par le système des</u> $s_a$<u>-idéaux de</u> $G$ , <u>il existe une correspondance biunivoque entre les sous-groupes isolés propres de</u> $\Lambda$ <u>dont l'intersection avec</u> $G$ <u>est</u> $\{1\}$ <u>et les groupes de Lorenzen de</u> $G$ . <u>Si</u> $H_r$ <u>désigne le sous-groupe correspondant au r-système d'idéaux sur</u> $G$ <u>le r-système est plus fin que le r'-système si et seulement si</u> $H_r \subset H_{r'}$ .

On voit que les sous-groupes $H_r$ , ordonnés par inclusion, forment un ensemble inductif. Il en est donc de même des systèmes d'idéaux sur $G$ formant semi-groupes, si on les ordonne par la relation :

$$r \leqslant r' \iff \text{le } r\text{-système est plus fin que le } r'\text{-système.}$$

Le théorème de Zorn montre alors que parmi tous ces systèmes d'idéaux il en existe qui sont moins fins que tous les autres. On peut les appeler <u>systèmes d'idéaux caractéristiques</u> et les groupes de Lorenzen correspondants <u>groupes de Lorenzen caractéristiques</u>. Un problème qui reste ouvert est celui de savoir s'il existe plus d'un tel système.

A quelle condition un groupe ordonné $G$ est-il égal à l'un de ces groupes de Lorenzen $\Lambda_r$ ?

Il faut et il suffit pour cela qu'à tout r-idéal $X_r$ de G corresponde un élément x de G tel que $X_r = (x)$, c'est-à-dire que tout r-idéal soit principal. Lorsqu'il en est ainsi on dira que G vérifie la propriété $r - \alpha$. Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit réticulé étant qu'il vérifie la condition $v - \alpha$, il en résulte en particulier que tout groupe réticulé G est identique à son groupe de Lorenzen $\Lambda_v$. Ce que nous avons vu plus haut montre alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe réticulé G n'admette pas d'autre groupe de Lorenzen que lui-même est qu'il soit identique à son groupe $\Lambda_{s_a}$, donc que son $s_a$-système soit identique à son v-système. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que G soit totalement ordonné. En effet, si G est totalement ordonné le s-système est identique au v-système. Supposons que G ne soit pas totalement ordonné. Il existerait alors deux éléments a et b de G tels que $1 < a, b$ et $1 = \inf(a, b)$. Par suite $(a, b)_v = 1$. Or, on peut montrer que $s_a$-système est ainsi défini :

$$x \in X_{s_a} \rightleftarrows \exists\, n > 0 \text{ avec } x^n \in (X_s)^n$$

Quel que soit l'entier $n > 0$, $1 \notin [(a, b)_s]^n$, donc $(a, b)_v \neq (a,b)_{s_a}$ et $s_a$-système n'est pas identique au v-système. D'où

<u>Théorème 6</u> : <u>Pour que le groupe réticulé</u> G <u>n'admette pas d'autre groupe de Lorenzen que lui-même, il faut et il suffit qu'il soit totalement ordonné</u>.

Soit alors G un groupe semi-clos non totalement ordonné. On peut définir une suite de groupe ordonné :

$$G = \Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_i \subset \dots$$

où $\Lambda_i$ est le $s_a$-groupe de Lorenzen de $\Lambda_{i-1}$. Aucun des $\Lambda_i$ n'est totalement ordonné et on a donc pour tout i : $\Lambda_i \neq \Lambda_{i+1}$.

<u>Théorème 7</u> : <u>Si on a sur</u> G <u>deux systèmes d'idéaux finis</u> r <u>et</u> r' <u>tels que</u> G <u>vérifie</u> $r - \gamma$, $r' - \alpha$ <u>et que</u> r <u>soit plus fin que</u> r', <u>le groupe</u> $\Lambda_{r'}$ <u>est facteur direct de</u> $\Lambda_r$.

On a $G = \Lambda_{r'}$ donc $\Lambda_{r'} \subset \Lambda_r$. Soit d'autre part H le noyau de l'application canonique $\Lambda_r \longrightarrow \Lambda_{r'}$ :

$$X_r/Y_r \in H \rightleftarrows X_{r'} = Y_{r'} .$$

Pour tout élément $X_r/Y_r$ de $\Lambda_r$ soit $\varphi(X_r/Y_r) \in \Lambda_r$ défini par l'égalité : $X_r/Y_r = (X_{r'}/Y_{r'}) \times \varphi(X_r/Y_r)$

Par hypothèse $\exists x , y \in G$ tels que $X_{r'} = (x)$ , $Y_{r'} = (y)$ , donc $\varphi(X_r/Y_r) = (Xy)_r/(Yx)_r$ .

Or $(Xy)_{r'} = X_{r'} \times (y)_{r'} = X_{r'} \times Y_{r'} = (Yx)_{r'}$ . Par suite $\varphi(X_r/Y_r) \in H$

Les égalités $\Lambda_{r'} \cap H = \{1\}$ et $\Lambda_r = \Lambda_{r'}$ H montrent alors le théorème.

Corollaire : Tout groupe réticulé est facteur direct de chacun de ses groupes de Lorenzen.

Si G est réticulé on a en effet $G = \Lambda_v$ .

Soit G semi-clos non totalement ordonné, $\Lambda$ son $s_a$-groupe de Lorenzen , $\Gamma$ le $s_a$-groupe de Lorenzen de $\Lambda$ . On a :

$$G \subset \Lambda \subset \Gamma \quad \text{et} \quad G \neq \Lambda \neq \Gamma \quad .$$

L'intersection de tous les sous-groupes propres de $\Gamma$ contenant G est un groupe de Lorenzen $\Lambda'$ de G . On a $\Lambda' \neq \Lambda$ car $\Lambda$ n'est pas un sous-groupe propre de $\Gamma$ .

On voit de même que $\Lambda' \cap \Lambda \neq \Lambda , \Lambda'$ .

Par suite le groupe G étant plongé dans le groupe réticulé $\Gamma$ , ce dernier peut contenir plusieurs groupes de Lorenzen de G , mais un seul en est un sous-groupe propre.

Ici, $\Lambda$ n'est pas un sous-groupe propre de $\Gamma$ , et cependant :

1) $\Lambda$ est facteur direct de $\Gamma$

2) la projection $\Gamma \longrightarrow \Lambda$ est prorpe.

On appelle valuation du groupe ordonné G tout homomorphisme croissant de G dans un groupe totalement ordonné. Si sur G est défini un système de r-idéaux finis, on dit qu'une valuation v de G est une r-valuation si elle vérifie la condition suivante pour tout sous-ensemble fini X de G :

$$x \in X_r \longrightarrow \exists\, a \in X \text{ avec } v(x) \geq v(a)$$

Exemples :

1) Toute valuation de G est une s-valuation

2) G étant groupe de divisibilité d'un corps K par rapport à un ordre A de ce corps, les $\mathfrak{z}$-valuations de G correspondent aux valuations de Krull de K dont l'anneau de valuation contient A .

3) Si G est réticulé, il y a identité entre les v-valuations et les valuations propres de G :

Supposons que $v$ soit une valuation propre de $G$ et soit $x \in X_v$. Posons $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et soit $y = \inf(x_1, \dots, x_n) \in G$. Soit $x_i$ tel que $v(x_i) = \inf(v(x_1), \dots, v(x_n))$. La valuation $v$ étant propre, on a $v(y) = v(x_i)$ et $x \geq y$ entraîne $v(x) \geq v(x_i)$. $v$ est bien une $v$-valuation. Réciproquement soit $v$ une $v$-valuation de $G$ et soit $y = \inf(x_1, \dots, x_n)$. Comme $y \in (x_1, \dots, x_n)_v$ il existe $x_i$ tel que $v(y) \geq v(x_i)$. Comme d'autre part $v(y) \leq v(x_1), \dots, v(x_n)$ on en déduit $v(y) = \inf(v(x_j))_{1 \leq j \leq n}$

$v$ est bien une valuation propre de $G$.

<u>Remarques</u> : Si sur le groupe ordonné $G$ le $r$-système est plus fin que le $r'$-système, toute $r'$-valuation de $G$ est une $r$-valuation.
<u>Si</u> $G$ <u>vérifie la propriété</u> $r - \delta$ <u>toute $r$-valuation de</u> $G$ <u>est une $r_a$-valuation</u> :

Soit $v$ une $r$-valuation de $G$ et $x \in X_{r_a}$. Par définition on peut trouver $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ tel que $(xZ)_r \subset (XZ)_r$. On peut supposer les $z_i$ numérotés de façon que $v(z_1) \leq v(z_2), \dots, v(z_n)$. La relation $xz_1 \in (XZ)_r$ entraîne, puisque $v$ est une $r$-valuation, l'existence de $a \in X$ et $z_i \in Z$ tels que $v(xz_1) \geq v(az_i)$. La relation $v(z_1) \leq v(z_i)$ entraîne alors $v(x) \geq v(a)$ et $v$ est une $r_a$-valuation de $G$.

Soit un système de $r$-idéaux finis sur le groupe ordonné $G$ tel que $G$ vérifie la propriété $r - \gamma$. Soit $\Lambda_r$ son groupe de Lorenzen correspondant. Toute valuation propre de $\Lambda_r$ induit une $r$-valuation de $G$ :
En effet $x \in \{x_1, \dots, x_n\}_r$ entraîne
$x \geq \inf(x_1, \dots, x_n)$ (dans $\Lambda_r$), donc $v(x) \geq \inf(v(x_1), \dots, v(x_n))$.
Soit réciproquement $v$ une $r$-valuation de $G$. On peut la prolonger d'une manière et d'une seule en une valuation propre de $\Lambda_r$ en posant :

$$v(X_r/Y_r) = \inf(v(x))_{x \in X} / \inf(v(y))_{y \in Y}$$

Comme on peut montrer que tout groupe réticulé peut être réalisé comme un sous-groupe propre d'un produit direct ordonné de groupes totalement ordonnés, il résulte de ce qui précède que si le groupe ordonne $G$ vérifie la propriété $r - \delta$, il existe une famille $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de $r$-valuations de $G$ qui définit une réalisation de $G$ dans le groupe $\prod_{\iota \in I} v_\iota(G)$. En particulier, dans le cas où $G$ est groupe de divisibilité d'un corps $K$ par rapport à ordre $A$ intégralement clos dans $K$, on obtient le théorème de Krull en prenant $r = d$ :

<u>Tout anneau d'intégrité intégralement clos dans son corps des quotients est intersection d'anneau de valuation</u>.

Soit $(v_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de valuations du groupe ordonné G définissant une réalisation de G (comme sous-groupe du produit direct ordonné $\prod_{\iota \in I} v_\iota(G)$) . On peut définir une famille de r-idéaux finis sur G en posant :

$$x \in X_r \iff \{ \forall \iota \in I \ , \ \exists a_\iota \in X \ \text{avec} \ v(a_i) \leq v(x) \} \ .$$

Le système des r-idéaux sera alors dit <u>défini par les conditions I-valuatives</u>. Lorenzen a montré que pour qu'un système de r-idéaux (finis) puisse être défini par des conditions valuatives (c'est-à-dire pour que l'on puisse trouver un ensemble $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de valuation de G tel que le r-système soit défini par les conditions I-valuatives), il faut et il suffit que G vérifie la condition $r - \gamma$ . On voit immédiatement que si le r-système est défini par les conditions I-valuatives, $v_\iota$ est une r-valuation pour tout $\iota \in I$ .

G vérifiant la propriété $r - \gamma$ (par rapport à un système de r-idéaux), on appelle <u>r-réalisation</u> de G toute réalisation de G telle que le système d'idéaux qu'elle définit sur G (par l'intermédiaire des conditions valuatives correspondantes) soit le r-système.

Supposons que G vérifie $r-\gamma$ et soit $(v_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de r-valuations de G définissant une réalisation de G dans $\Gamma = \prod_{\iota \in I} v_\iota(G)$ . Chaque $v_\iota$ pouvant être considéré comme un homomorphisme propre du groupe de Lorenzen $\Lambda_r$ sur $v_\iota(G)$ , on en déduit un homomorphisme propre $f = \prod_{\iota \in I} v_\iota$ de $\Lambda_r$ dans $\Gamma$ . C'est l'homomorphisme canonique de $\Lambda_r$ sur le groupe de Lorenzen de G défini par $\Gamma$ . Par suite, pour que f définisse une réalisation de $\Lambda_r$ il faut et il suffit que le noyau $f^{-1}(1)$ se réduise à $\{1\}$ .

Le r'-système défini sur G par les conditions I-valuatives est moins fin que le r-système.

Si on a $r = r'$ , l'inégalité $X_r \neq Y_r$ entraîne l'existence de $\alpha \in I$ tel que $v_\alpha(X_r) \neq v_\alpha(Y_r)$ et par suite $f(X_r/Y_r) \neq 1$ . Donc ce cas $f^{-1}(1) = \{1\}$ . Supposons $r \neq r'$ . Alors r est strictement plus fin que r' et il existe un r-idéal $X_r$ tel que $X_{r'} \neq X_r$ . Soit $x \in X_{r'}$ , $x \notin X_r$ et posons $Y = X \cup \{x\}$ . La relation $Y \subset X_{r'}$ entraîne $Y_r \subset X_{r'}$ .

D'autre part $X_{r'} = Y_{r'}$ implique que pour tout $\iota \in I$ on a $v_\iota(X_r) = v_\iota(Y_r)$ donc $f(X_r/Y_r) = 1$ . Donc $X_r/Y_r$ est contenu dans le noyau de $f$ sans être égal à 1 . On peut donc énoncer :

Théorème 8 : Etant donnés un système de r-idéaux finis sur G tel que G vérifie la propriété $r - \gamma$ , une famille $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de r-valuations de G définissant une réalisation de G définit encore une réalisation (propre) de $\Lambda_r$ si et si seulement les r-idéaux sont ceux définis par les conditions I-valuations, c'est-à-dire si la famille $(v_\iota)_{\iota \in I}$ définit une r-réalisation de G .

Le groupe G vérifiant la propriété $r - \gamma$ et la famille $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de r-valuation de G définissant une réalisation de $\Lambda_r$ , on dit [3] que cette réalisation est irréductible si pour tout $\alpha \in I$ la famille $(v_\iota)_{\iota \neq \alpha}$ ne définit plus une réalisation de $\Lambda_r$ . On voit alors que le système des r-idéaux est défini par les conditions I-valuatives, mais n'est plus défini par les conditions $C\{\alpha\}$ -valuatives ( $\forall \alpha \in I$) . Nous dirons qu'un tel ensemble est un ensemble irréductible de r-valuations. Les ensembles irréductibles de r-valuations correspondent donc biunivoquement aux réalisations irréductibles de $\Lambda_r$ . Or il y a au plus une telle réalisation irréductible. Donc :

Théorème 9 : S'il existe un ensemble irréductible de r-valuations de G , il est unique.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] P. JAFFARD. La théorie des Idéaux d'Artin-Prüfer-Lorenzen

[2] P. JAFFARD. Structure des groupes préordonnés.
Exposés faits au séminaire d'Algèbre de la faculté des Sciences de Paris, Année 1951-1952.

[3] P. JAFFARD. Contribution à la théorie des groupes ordonnés.
J. Math. pures et appl. Vol. 32 (1953) pp. 203-280.

[4] P. JAFFARD. La notion de Valuations. L'enseignement mathématique t.40 (1951-1954) pp. 5-26.

[5] P. JAFFARD. Extensions des groupes réticulés.
Publications scientifiques de l'Université d'Alger. t.1 (1954) pp. 197-222.

[6] P. JAFFARD. Sur les groupes réticulés associés à un groupe ordonné.
à paraître aux Publications scientifiques de l'Université d'Alger.

[7] J. LORENZEN. Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie
Math. Zeit., Vol. 45 (1939). pp. 533-553 .