Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

J. Petresco

Sur les groupes libres. II - Transformations des suites de générateurs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 23, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A11_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 23

SUR LES GROUPES LIBRES.

II- TRANSFORMATIONS DES SUITES DE GÉNÉRATEURS.

(Exposé de J. PETRESCO, le 2 mai 1955).

-:-:-:-

Nous avons construit dans l'exposé précédent deux ensembles $\mathcal{H}_L$ et $\mathcal{H}_M$, de bases libres du sous-groupe H, du groupe libre G ; nous montrons, en continuation, que $\mathcal{H}_L = \mathcal{H}_M$, et que cet ensemble de bases libres peut être caractérisé par certaines propriétés remarquables, en relation avec la notion de longueur.

Nous étudions également la méthode de Schreier, en obtenant un ensemble $\mathcal{H}_C$ de bases libres, plus général que celui classique, en ceci qu'il est libéré précisément de ce qu'on appelle la condition de Schreier, (Marshall Hall et T. Rado, Trans. Amer. Math. Soc. 64, 1948), mais qui ne dépasse pas la généralité de $\mathcal{H}_L$ et $\mathcal{H}_M$; on a en effet $\mathcal{H}_L = \mathcal{H}_M = \mathcal{H}_C$.

La méthode primitive de Nielsen présente cependant cette particularité remarquable : elle décrit un procédé fini pour construire à partir d'une suite de générateurs du sous-groupe H de rang fini une base libre de H. Nous généralisons les transformations de Nielsen, et le procédé de réduction que nous proposons, permet d'en apercevoir la finitude, comme conséquence directe du lemme 3.4.

Nous définissons finalement un groupe de transformations $\mathcal{N}_m(G)$, de l'ensemble des m-suites de générateurs du groupe libre G de rang fini, pour lequel, au cas où m est le rang de G, la notion de liberté est un invariant, et qui, de plus, est transitif, pour tout m. Ceci résume et généralise les différentes propriétés des groupes libres qui se rattachent à l'hypothèse de H. Hopf. Les transformations de $\mathcal{N}_m(G)$ permettent en fait d'obtenir, à partir d'une suite de générateurs de G, toute autre suite de générateurs, et en particulier toute base libre.

5. Bases libres progressives. On dira dans ce qui suit que X est un ensemble progressif de $G = [[A]]$, si

$$(P) \qquad [X](\lambda) \subseteq [X(\lambda)]$$

Si H est un sous-groupe de G, on dira d'autre part que $a \in H$ est <u>indécomposable</u> si $a \notin [H(\lambda-1)]$, où $\lambda(a) = \lambda$; notons H_I, l'ensemble des éléments indécomposables de H.

5-1. <u>H_I est un système progressif de générateurs de</u> H.

On peut décomposer de proche en proche, tout élément $a \in H$ de longueur λ, en un produit d'éléments indécomposables de longueur $\leq \lambda$, de sorte que $H(\lambda) \subseteq [H_I(\lambda)]$, d'où $H = [H_I]$ et $[H_I](\lambda) \subseteq [H_I(\lambda)]$.

5-2. <u>Si</u> X <u>est progressif</u>, $x \in X$ <u>tel que</u> $x \in [X-x]$, <u>et</u> $\lambda(x) = \lambda$, <u>la condition nécessaire et suffisante pour que</u> $X - x$ <u>soit progressif est</u> : $x \in [X(\lambda) - x]$.

Si la condition est remplie, on a $[X-x](\lambda) \subseteq [X](\lambda) \subseteq [X(\lambda)] \subseteq [X(\lambda)-x] = [(X-x)(\lambda)]$ et réciproquement, si $X - x$ est progressif,
$[X(\lambda)] \subseteq [[X](\lambda)] \subseteq [[X-x](\lambda)] \subseteq [[(X-x)(\lambda)]] = [(X-x)(\lambda)] = [X(\lambda) - x]$.

Nous dirons maintenant que X est un <u>ensemble de Nielsen fort</u> si $X \cap X^{-1} = 0$, et si

$(\bar{N})$. <u>Quel que soit le produit irréductible</u> $\prod a_i$ <u>avec</u> $a_i \in X \cup X^{-1}$, $\lambda(\prod a_i) \geq \lambda(a_i)$

Considérons les propositions :

(A). X est un ensemble de Nielsen fort engendrant H.

(B). X est une base libre progressive de H.

(C). X est un système progressif minimal de générateurs de H.

5-3. <u>On a les équivalences</u> $(A) \rightleftarrows (B) \rightleftarrows (C)$.

$(A) \longrightarrow (B)$. On a en effet $(\bar{N}) \longrightarrow (N)$, de sorte qu'un ensemble de Nielsen fort est un ensemble de Nielsen, donc d'après 4-1, un système libre. D'autre part si X satisfait à (A) et si $a \in [X]$, $\lambda(a) = \lambda$ et $a = \prod a_i$ est une représentation irréductible de a, on a d'après $(\bar{N})$, $\lambda(a_i) \leq \lambda$, donc $a \in [X(\lambda)]$, et en définitive (P).

$(B) \longrightarrow (C)$ est évidente

$(C) \longrightarrow (B)$. Supposons que X satisfait à (C). Soit $x \in X$ et posons $\lambda(x) = \lambda(x^{-1}) = \lambda$. Si $x^{-1} \in X$, $x^{-1} \in [X(\lambda) - x^{-1}]$, donc d'après 5-2, $X - x^{-1}$ est progressif, ce qui contredit (D) ; on conclut $X \cap X^{-1} = 0$.

Si maintenant X n'est pas libre, on obtient comme dans 4-3, à partir d'une relation irréductible $\bar{P} = 1$ avec $a_i \in X \cup X^{-1}$ et d'un certain $x \in X$, avec $a_i = x^{\varepsilon}$ et $\lambda(x) = \lambda = \ell(P)$, une égalité de la forme

$$b_1^{\varepsilon_1} \dots b_m^{\varepsilon_m}\, x\, b_{m+1}^{\varepsilon_{m+1}} \dots b_{m+n}^{\varepsilon_{m+n}} = \bar{S} \ ; \quad \varepsilon_i , \varepsilon = \pm 1$$

avec $x \neq b_i \in X$, $\lambda(b_i) \leq \lambda$, $\lambda(\bar{S}) = \lambda' < \lambda$. On déduit $b_i \in X(\lambda) - x$ et d'après (P), $\bar{S} \in [X(\lambda')] \subseteq [X(\lambda) - x]$, de sorte que

$$x \in [X(\lambda) - x] .$$

Mais alors, d'après 5-2 , $X - x$ est progressif et $[X - x] = [X] = H$, ce qui contredit (C) .

(B) $\longrightarrow$ (A) . Soit X une base libre progressive de H et $\prod a_i$ avec $a_i \in X \cup X^{-1}$, irréductible. D'après (P) , si l'on pose $\lambda(\prod a_i) = \lambda$, $\prod(a_i) \in [X(\lambda)]$, c'est-à-dire

$$\prod a_i = \prod b_j \ , \quad b_j \in X \cup X^{-1} \ , \quad \lambda(b_j) \leq \lambda \ ;$$

d'après 3-1 on peut supposer $\prod b_j$ irréductible, et puisque X est libre, d'après 3-2, $a_i = b_i$. On en déduit $\lambda(a_i) \leq \lambda$, c'est-à-dire $(\bar{N})$.

Notons $\mathcal{H}$, l'ensemble des X satisfaisant à l'une des propositions (A) , (B) , (C) .

5-4. <u>On a</u> $X \in \mathcal{H} \longrightarrow X \subsetneq H_I$.

Soit $X \in \mathcal{H}$, $x \in X$, $\lambda(x) = \lambda$ et supposons $x \notin H_I$, donc $x \in H(\lambda-1)$; puisque X est progressif et $[X] = H$, $x \in [X(\lambda-1)] \subseteq [X(\lambda) - x]$, de sorte que $X - x$ est progressif et $[X - x] = H$, ce qui contredit (C) .

5-5. <u>On a</u> $\mathcal{H}_L = \mathcal{H}_M = \mathcal{H}$.

$\mathcal{H}_L \subseteq \mathcal{H}_M$. Considérons $H_L(\lambda_k)$; c'est évidemment un système libre tel que $H_L(\lambda_{k-1}) \subseteq H_L(\lambda_k) \subseteq H(\lambda_k)$. Mais de plus $H(\lambda_k) \subseteq [H_L(\lambda_k)]$ et par conséquent $H_L(\lambda_k)$ satisfait à (b) . Soit en effet $x \in H(\lambda_k)$, $x \notin H_L(\lambda_k)$ et notons $H_L(x)$, l'ensemble des éléments L-indécomposables précédant x ; $x \in H(\lambda_k)$ entraîne $\lambda(x) \leq \lambda_k$, donc d'après (6) , $H_L(x) \subseteq H_L(\lambda_k)$; d'autre part $x \notin H_L(\lambda_k)$ entraîne $x \in [L(x)] = [H_L(x)]$ et par conséquent $x \in [H_L(\lambda_k)]$. Par ailleurs $H_L(\lambda\ )$ satisfait évidemment à (a) et $H_L = \cup H_L(\lambda_k)$, c'est-à-dire qu'on a également (c) ; on conclut $H_L \in \mathcal{H}_M$.

$\mathcal{H}_M \subseteq \mathcal{H}$. H_M est une base libre progressive, car de $[H_M] = H$, $H\lambda_k = H_M(\lambda_k)$ et (7) , on déduit $[H_M](\lambda_k) \subseteq [H_M(\lambda_k)]$.

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_L$. Soit X une base libre progressive de H , L un bon ordre de H , satisfaisant à (6) et à

(8) $\quad \lambda(a) = \lambda(b)$, $a \in X$, $b \notin X \longrightarrow a < b$

et considérons H_L. Si $x \notin X$ et $\lambda(x) = \lambda$, $H = [X]$ entraîne $x \in [X](\lambda)$, donc d'après (P), $x \in [X(\lambda)]$; d'autre part $y \in X(\lambda)$ entraîne d'après (6) et (8), $y < x$, de sorte que $X(\lambda) \subseteq L(x)$. On déduit $x \in [L(x)]$, c'est-à-dire $x \in H_L$ et en définitive $H_L \subseteq X$. Mais puisque X et H_L sont des bases libres de H, on a nécessairement $X = H_L \in \mathcal{H}_L$.

6. <u>Bases libres de Schreier</u>. H étant un sous-groupe de $G = [[A]]$. considérons l'ensemble de classes à gauche mod. H, et dans chaque classe Hx, $x \in G$, l'ensemble $H'x$ des éléments de longueur minimum. Notons H^*, l'ensemble des produits de la forme $\xi a \eta^{-1}$, où $a \in A \cup A^{-1}$, tandis que ξ, η sont les représentations irréductibles de certains éléments de $\bigcup H'x$ (avec la convention de ne pas les écrire dans $\xi a \eta^{-1}$ si ces éléments sont égaux à 1), satisfaisant en outre aux deux conditions :

(9). $\xi a \eta^{-1} \in H$

(10). $\xi a \eta^{-1}$ est <u>irréductible</u>.

6-1. <u>Si</u> $\xi a \eta^{-1} \in H^*$, a <u>est centre de</u> $\xi a \eta^{-1}$.

(9) entraîne $\xi \in H'\eta a^{-1}$, $\eta \in H'\xi a$, de sorte que $\lambda(\xi) \leq \lambda(\eta a^{-1}) \leq \lambda(\eta) + 1$, $\lambda(\eta) \leq \lambda(\xi a) \leq \lambda(\xi) + 1$, c'est-à-dire $|\lambda(\xi) - \lambda(\eta)| \leq 1$, ce qui avec (10), permet de conclure que a est centre de $\xi a \eta^{-1}$.

Soit maintenant $\bar{P} = 1$ une relation avec $a_i \in H$ et supposons que pour un certain a_i avec $\lambda(a_i) = \ell(P) = \lambda$, $a_i = \xi a \eta^{-1} \in H^*$. $\bar{P}_A$ étant une identité, soit ρ la segmentation concordante et unitaire qu'admet P_A, et considérons le segment $S_\rho(a) = S(a\ a_{kh})$, par exemple.

6-2. <u>On a</u> $\lambda(a_k) = \lambda$, $\lambda(\xi) = \lambda - h$, $\lambda(\eta) = h - 1$.

Puisque $\bar{S}(a\ a_{kh}) = 1$, $a\ a_{kh} = 1$; on a comme dans 3-4

$$(11) \qquad \xi .\ a_{k,h+1} \cdots a_{k,\lambda(a_k)} = S(a_i\ a_k) \in H, \quad \eta .\ a_{k,h-1}^{-1} \cdots a_{k1}^{-1}$$

$$= S(a_{i+1}\ a_{k-1}) \in H$$

donc, en tenant compte de $\xi, \eta \in \bigcup H'x$

$$\lambda(\xi) \leq \lambda(a_k) - h, \quad \lambda(\eta) \leq h - 1.$$

En additionnant ces deux relations, on a $\lambda = \lambda(a_i) = \lambda(\xi) + \lambda(\eta) + 1 \leq \lambda(a_k)$, donc $\lambda(a_k) = \lambda$, tandis que $\lambda(\xi) < \lambda - h$ ou $\lambda(\eta) < h - 1$, entraîne $\lambda < \lambda(a_k)$ contrairement aux hypothèses.

6-3. <u>On a</u> $H^* = H_I$.

Soit $\xi a \eta^{-1} \in H^*$; si $\xi a \eta^{-1} \notin H_I$ on a une relation de la forme

$\xi a \eta^{-1} = \bar{P}$ avec $\lambda(a_i) < \lambda(\xi a \eta^{-1})$, pour tout i , ce qui contredit 6-2.

Réciproquement, si $\alpha \in H_I$, notons $\alpha = \xi a \eta^{-1}$ où a est un centre de α , ξ le produit des éléments précédant a dans la représentation irréductible de α et η^{-1} le produit des éléments lui succédant. On a $\xi \in H'\xi$, $\eta \in H'\eta$; si, en effet, $\xi \notin H'\xi$ par exemple, il existe Z avec $\xi Z^{-1} \in H$ et $\lambda(Z) < \lambda(\xi)$; de sorte que $\xi a \eta^{-1} = \xi Z^{-1} . Z a \eta^{-1}$,où $\lambda(\xi Z^{-1}) \leq \lambda(\xi) + \lambda(Z) < 2\lambda(\xi) \leq \lambda(\xi a \eta^{-1})$ et $\lambda(Z a \eta^{-1}) \leq \lambda(Z) + \lambda(\eta) + 1 < \lambda(\xi) + \lambda(\eta) + 1 = \lambda(\xi a \eta^{-1})$, ce qui contredit $\alpha \in H_I$. En définitive $\alpha \in H^*$, car $\xi a \eta^{-1}$ satisfait évidemment à (9) et (10) .

Soit C un ensemble de choix de $\{H'x\}$ et notons $\bar{x}$ la représentation irréductible de l'élément de $H'x$ appartenant à C . Notons H_C , l'ensemble des produits de la forme $\bar{x}\, a\, \bar{y}^{-1}$ avec $a \in A \cup A^{-1}$ et $x , y \in G$ (en prenant, de plus, la précaution d'écrire $a\, \bar{y}^{-1}$ au lieu de $1\, a\, \bar{y}^{-1}$, dans le cas où $x \in H$, autrement dit $\bar{x} = 1$), satisfaisant en outre à :

(9') $\bar{x}\, a\, \bar{y}^{-1} \in H$ (ce qui équivaut à $\bar{y} = \bar{x}\, a$)

(10') $\bar{x}\, a\, \bar{y}^{-1}$ est <u>irréductible</u>.

6-4. <u>On a</u> $H = [H_C]$.

Soit $\alpha = \prod^n a_i$, $a_i \in A \cup A^{-1}$, la représentation irréductible de $\alpha \in H$; si l'on note $x_i = a_1\, a_2 \dots a_i$, $x_0 = 1$, on a

$$(12) \qquad \alpha = \prod^n \bar{x}_{i-1}\, a_i\, \overline{x_{i-1}\, a_i}^{-1}$$

Comme on l'a remarqué à (9'), $\bar{x}_{i-1}\, a_i\, \overline{x_{i-1}\, a_i}^{-1} \in H$, et d'autre part

$$\bar{x}_{i-1} \in H'a_1\, a_2 \dots a_{i-1} \quad , \quad \overline{x_{i-1}\, a_i} \in H'a_n\, a_{n-1} \dots a_{i+1}$$

de sorte que $\lambda(\bar{x}_{i-1}) \leq i-1$, $\lambda(\overline{x_{i-1}\, a_i}) \leq n-i$ et par conséquent $\lambda(\bar{x}_{i-1}\, a_i\, \overline{x_{i-1}\, a_i}^{-1}) \leq n$.

Si donc $\bar{x}_{i-1}\, a_i\, \overline{x_{i-1}\, a_i}^{-1}$ est <u>réductible</u>, on a nécessairement

$$(13) \qquad \lambda(\bar{x}_{i-1}\, a_i\, \overline{x_{i-1}\, a_i}^{-1}) < n \ ;$$

soit $\prod^m b_j$, $m < n$, sa représentation irréductible et notons $y_j = b_1\, b_2 \dots b_j$, $y_0 = 1$.

On a en appliquant (12) à $\prod b_j$

$$\bar{x}_{i-1}\, a_i\, \overline{x_{i-1}\, a_i}^{-1} = \prod \bar{y}_{j-1}\, b_j\, \overline{y_{j-1}\, b_j}^{-1}$$

et d'après (13) si $\bar{y}_{j-1}\, b_j\, \overline{y_{j-1}\, b_j}^{-1}$ est <u>réductible</u>

$$\lambda(\bar{y}_{j-1}\, b_j\, \overline{y_{j-1}\, b_j}^{-1}) < m < n \ .$$

En répétant ce procédé un nombre fini de fois, en vertu de (13), on obtient

$$\alpha \in [\{\bar{x}\ a\ \bar{y}^{-1}\}]$$

où $y = x\,a$, $x \in G$, $a \in A \cup A^{-1}$ et où de plus $\bar{x}\ a\ \bar{y}^{-1}$ sont irréductibles ; d'après (9') et (10'), $\alpha \in [H_C]$.

6-5. Il n'existe pas de relation irréductible $\bar{P} = 1$, avec $a_i \in H$ et $\omega(P) \geq 3$, telle que pour tout a_i avec $\lambda(a_i) = \ell(P)$, $a_i \in H_C$.

Considérons l'identité $\bar{P}_A = 1$ et soit ρ la segmentation concordante et unitaire qu'admet P_A. Soit a_i avec $\lambda(a_i) = \ell(P) = \lambda$; sa représentation irréductible est de la forme $a_i = \bar{x}\ a\ \bar{y}^{-1} \in H_C$; posons $S_\rho(a) = S(a\ a_{kh})$, par exemple. D'après 6-2, $\lambda(a_k) = \lambda$, et par conséquent $a_k = \bar{x}_0\ a_0\ \bar{y}_0^{-1} \in H_C$; d'après 6-1, a et a_0 sont centres de a_i et a_k respectivement.

Si a est centre à gauche, d'après 6-2, a_{kh} est centre à droite de a_k, de sorte que a_0 coïncide avec a_{kh}, ou bien s'il ne coïncide pas avec celui-ci, il coïncide avec $a_{k,h-1}$. On a dans ce dernier cas $\bar{x}_0 = a_{k1} \ldots a_{k,h-2}$, $\bar{y}_0^{-1} = a_{kh} \ldots a_{k\lambda} = a^{-1}\ a_{k,h+1} \ldots a_{k\lambda}$ et d'autre part, d'après (11)

$$\bar{y} \in H\ a_{k1} \ldots a_{k,h-1} = H\ a_{k1} \ldots a_{k,h-2}\ a_0 = H\ \bar{x}_0\ a_0 = H\ \bar{y}_0$$

donc $\bar{y} = \bar{y}_0$. Mais alors

$$\bar{x}\ a\ \bar{y}^{-1} = \bar{x}\ a\ a^{-1}\ a_{k,h+1} \ldots a_{k\lambda}$$

ce qui contredit (10').

Si a est centre à droite on voit de façon symétrique que si a_0 ne coïncide pas avec a_{kh}, $\bar{x}_0 = a_{k1} \ldots a_{kh} = a_{k1} \ldots a_{k,h-1}\ a^{-1}$, $\bar{y}_0^{-1} = a_{k,h+2} \ldots a_{k\lambda}$, de sorte que, d'après (11)

$$\bar{x} \in H\ a_{k\lambda}^{-1} \ldots a_{k,h+1}^{-1} = H\ \bar{y}_0\ a_0^{-1} = H\ \bar{x}_0$$

donc $\bar{x} = \bar{x}_0$, et contrairement à (10'), $\bar{x}\ a\ \bar{y}^{-1} = a_{k1} \ldots a_{k,h-1}\ a^{-1}\ a\bar{y}^{-1}$.

En conclusion a_0 coïncide avec a_{kh}. Mais alors

$$\bar{x} \in Ha_{k\lambda}^{-1} \ldots a_{k,h+1} = H\ \bar{y}_0$$

$$\bar{y} \in Ha_{k1} \ldots a_{k,h-1} = H\ \bar{x}_0$$

de sorte que $\bar{x} = \bar{y}_0$, $\bar{y} = \bar{x}_0$ et par conséquent contrairement aux hypothèses, d'après (11)

$$\bar{S}(a_i\ a_k) = \bar{x}\ \bar{y}_0^{-1} = 1 \quad , \quad \bar{S}(a_{i+1}\ a_{k-1}) = \bar{y}\ \bar{x}_0^{-1} = 1 \ .$$

Notons $|H_C|$, un ensemble ~~de représentants des~~ classes ~~relatives~~ à ~~l'équivalence~~ $\sim$, dans H_C. Il est évident que $|H_C| \cap |H_C|^{-1} = 0$, et puisque $(\bar{x}\ a\ \bar{y}^{-1})^{-1} = \bar{y}\ a^{-1}\ \bar{x}^{-1}$, $|H_C| \cup |H_C|^{-1} = H_C$. Si l'on tient compte de 6-4 et $(L\gamma)$, 6-5 entraîne en particulier :

6-6. <u>On a</u> $H = [[\ |H_C|\ ]]$.

Notons $\mathcal{H}_C$ l'ensemble des $|H_C|$.

6-7. On a $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}$.

$\mathcal{H}_C \subseteq \mathcal{H}$. H_C satisfait en effet à la propriété $(\bar{N})$. Soit $\prod\limits_i^n a_i$, avec $a_i \in H_C$, irréductible et posons $\prod\limits_i^n a_i = a$, $a \in H$. $\lambda(\prod a_i) \geq_n \lambda(a_i)$ est triviale pour $n=1$; supposons donc $n \geq 2$. La relation $P = a^{-1} \prod\limits_i a_i$, est évidemment irréductible et $\omega(P) = n + 1 \geq 3$; d'après 6-5, si $\lambda(a) < \ell\{a_i\}$, elle est impossible. On a donc nécessairement, $\lambda(\prod a_i) = \lambda(a) \geq \ell\{a_i\}$ et en définitive $(\bar{N})$. Mais alors $|H_C|$ est un ensemble de Nielsen fort, donc $|H_C| \in \mathcal{H}$.

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_C$. Soit X une base libre progressive et $\alpha \in X$. Si a est un centre de α, on peut comme dans 6-3, puisque d'après 5-4, $\alpha \in H_I$, mettre α, sous la forme $\alpha = \xi a \eta^{-1}$, avec $\xi, \eta \in U\ H'x$. Considérons l'ensemble $\bar{H}$ des éléments $\xi, \eta \in U\ H'x$, obtenus pour chaque $\alpha \in X \cup X^{-1}$ et chaque centre a de α ; on vérifie que réciproquement tout élément $\xi a \eta^{-1}$ avec $a \in A \cup A^{-1}$ et $\xi, \eta \in \bar{H}$, satisfaisant à (9) et (10), appartient à $X \cup X^{-1}$. Soit enfin C, un ensemble de choix de $\{H'x\}$, dont les éléments ont des représentationsirréductibles $\bar{x}$ satisfaisant à :

(14) $\quad \bar{H} \cap H'x \neq 0 \longrightarrow \bar{x} \in \bar{H} \cap H'x$.

Si maintenant $\bar{x}\ a\ \bar{y} \in H_C$ et $\lambda(\bar{x}\ a\ \bar{y}) = \lambda$, on a, puisque X est progressif, $\bar{x}\ a\ \bar{y}^{-1} \in [X(\lambda)]$, de sorte qu'on peut écrire une relation irréductible $\bar{P} = 1$ avec $a_i \in X \cup X^{-1}$ et $\lambda(a_i) \leq \lambda$, sauf pour un certain a_i avec $a_i = \bar{x}\ a\ \bar{y}^{-1}$. Si l'on considère l'identité $P_A = 1$ et la segmentation concordante et unitaire ρ de P_A, $S_\rho(a) = S(a\ a_{kh})$ est d'après 6-2, telle que $\lambda(a_k) = \lambda$ et a_{kh} est un centre de a_k ; posons $a_k = \xi a_{kh} \eta^{-1}$ avec $\xi, \eta \in \bar{H}$. D'après (13), $\bar{x} \in H\eta$, $\bar{y} \in H\xi$, donc $\bar{H} \cap H'x \neq 0$, $\bar{H} \cap H'y \neq 0$ et par conséquent, d'après (14). $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{H}$ et en définitive $\bar{x}\ a\ \bar{y} \in X \cup X^{-1}$.

On a donc $H_C \subseteq X \cup X^{-1}$. Mais alors on peut choisir $|H_C|$ tel que $|H_C| \subseteq X$ et puisque $|H_C|$ et X sont des bases libres, $X = |H_C|$.

7. <u>Transformations simples</u>. Soit $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ une ~~m-suite~~ de variables $v_j \in G = [[A]]$ et considérons la m-suite $\varphi V = \{\varphi v_1, \varphi v_2, \dots, \varphi v_m\}$ définie par

$$(15) \qquad \begin{cases} \varphi v_j = v_j \quad ; \quad j \neq j_0 \\ \varphi v_{j0} = \bar{S}_1(v_j) \,.\, v_{j0}^{\varepsilon} \,.\, \bar{S}_2(v_j) \quad , \quad \varepsilon = \pm 1 \end{cases}$$

où $S_1(v_j)$ et $S_2(v_j)$ sont deux suites d'éléments de $(V - v_{j0}) \cup (V - v_{j0})^{-1}$. A chaque m-suite $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ avec $x_j \in G$, on peut faire correspondre la m-suite φX, qui s'obtient de φV en remplaçant v_j par x_j, pour tout j. La correspondance $X \longrightarrow \varphi X$, détermine une application φ de l'ensemble $\mathcal{X}_m$ des m-suites X avec $x_j \in G$, dans lui-même.

De (15) on déduit

$$(16) \qquad v_{j0} = [\bar{S}_1^{-1}(v_j) . \varphi v_{j0} . \bar{S}_2^{-1}(v_j)]^{\varepsilon} = \bar{R}_1(v_j).(\varphi v_{j0})^{\varepsilon} . \bar{R}_2(v_j)$$

où $R_1(v_j)$ et $R_2(v_j)$ sont deux suites d'éléments de $(V - v_{j0}) \cup (V - v_{j0})^{-1}$. Considérons l'application φ^{-1}, définie par le changement de variable

$$(15') \qquad \begin{cases} \varphi^{-1} v_j = v_j \quad ; \quad j \neq j_0 \\ \varphi^{-1} v_{j0} = \bar{R}_1(v_j) . v_{j0}^{\varepsilon} \,.\, \bar{R}_2(v_j) \,. \end{cases}$$

On a pour tout $X \in \mathcal{X}_m$:

$$(17) \qquad \varphi^{-1} \varphi X = X \quad ,$$

car d'après (15), (15') et (16), si $j \neq j_0$, $\varphi^{-1} \varphi x_j = \varphi x_j = x_j$, et

$$\varphi^{-1} \varphi x_{j0} = \bar{R}_1(\varphi x_j).(\varphi x_{j0})^{\varepsilon} . \bar{R}_2(\varphi x_j) = \bar{R}_1(x_j).(\varphi x_{j0})^{\varepsilon} . \bar{R}_2(x_j)$$

$$= [\bar{S}_1^{-1}(x_j) . \varphi x_{j0} . \bar{S}_2^{-1}(x_j)]^{\varepsilon} = [\bar{S}_1^{-1}(x_j)\, \bar{S}_1(x_j) . x_{j0}^{\varepsilon} . \bar{S}_2(x_j)\, \bar{S}_2^{-1}(x_j)]^{\varepsilon} = x_{j0}$$

On en déduit que φ^{-1} et φ sont des transformations (biunivoques) inverses de $\mathcal{X}_m$ (sur lui-même). Une transformation de $\mathcal{X}_m$ définie par un changement de variables (15) sera appelée <u>transformation simple</u>. D'après (15') et (17), <u>l'inverse d'une transformation simple est une transformation simple</u>.

7-1. <u>Si</u> φ <u>est une transformation simple et</u> $X \in \mathcal{X}_m$, $[X] = [\varphi X]$.

D'après (15), $[\varphi X] \subseteq [X]$ et $[X - x_{j0}] = [\varphi X - \varphi x_{j0}] \subseteq [\varphi X]$ et d'autre part, d'après (16)

$$x_{j0} = \bar{R}_1(x_j).(\varphi x_{j0})^{\varepsilon} . \bar{R}_2(x_j) \in [X - x_{j0}, \varphi x_{j0}] = [\varphi X] .$$

7-2. <u>Si</u> φ <u>est simple et</u> $X \in \mathcal{X}_m$ <u>est un système libre</u>, φX <u>est également un système libre</u>.

Si X est un système libre, φx_{j0} est d'après (13), x_{j0}-simple. Soit $\bar{P} = 1$ une relation irréductible avec $a_i \in \varphi X \cup (\varphi X)^{-1}$. Posons $a_i = (\varphi x_{j(i)})^{\varepsilon_i}$; $(\varphi x_{j(i)})^{\varepsilon_i}$ étant un produit d'éléments de $X \cup X^{-1}$, (1) la relation

$$\bar{P}_X = \prod_i (\varphi x_{j(i)})^{\varepsilon_i} = 1$$

est une identité ; soit ρ la segmentation concordante et unitaire qu'admet P_X.

Puisque $\varphi X - \varphi x_{j0} = X - x_{j0}$ est un système libre, il existe $a_i \in P$. avec $j(i) = j_0$, de sorte que $a_i = (\varphi x_{j0})^{\varepsilon_i} = [\bar{S}_1(x_j).x_{j0}^{\varepsilon}.\ \bar{S}_2(x_j)]^{\varepsilon_i}$ $= \bar{y}_1\ x_{j0}^{\varepsilon\varepsilon_i}\ \bar{y}_2$, où y_1 et y_2 sont des suites d'éléments de $(X - x_{j0}) \cup (X - x_{j0})^{-1}$. Considérons $S_\rho(x_{j0}^{\varepsilon\varepsilon_i})$; puisqu'il est unitaire, son autre extrémité est égale à $x_{j0}^{-\varepsilon\varepsilon_i}$, de sorte que si elle est un élément du produit $a_k = (\varphi x_{j(k)})^{\varepsilon_k}$, par exemple, on a nécessairement $j(k) = j_0$. Ceci entraîne d'abord que les relations de la forme $\varphi x_{j0}.\ \varphi x_j = 1$ avec $j \neq j_0$, sont impossibles et par conséquent, $\varphi X \cap (\varphi X)^{-1} = 0$. De plus, $(\varphi x_{j0})^{\varepsilon_k}$ étant x_{j0}-simple, on a $\varepsilon\varepsilon_k = -\varepsilon\varepsilon_i$, d'où $\varepsilon_k = -\varepsilon_i$, de sorte que $a_k = (\varphi x_{j0})^{-\varepsilon_i} = \bar{y}_2^{-1}\ x_{j0}^{-\varepsilon\varepsilon_i}\ \bar{y}_1^{-1}$ et $S_\rho(x_{j0}^{\varepsilon\varepsilon_i}) = S(x_{j0}^{\varepsilon\varepsilon_i}\ x_{j0}^{-\varepsilon\varepsilon_i})$. Si l'on tient compte de $\bar{S}_\rho(x_{j0}^{\varepsilon\varepsilon_i}) = 1$, on a finalement

$$S(a_i\ a_k) = \bar{y}_1\ \bar{S}_\rho(x_{j0}^{\varepsilon\varepsilon_i})\bar{y}_1^{-1} = \bar{y}_1\ \bar{y}_1^{-1} = 1$$

$$S(a_{i+1}\ a_{k-1}) = \bar{y}_2^{-1}x_{j0}^{-\varepsilon\varepsilon_i}\ x_{j0}^{\varepsilon\varepsilon_i}\ \bar{y}_2 = 1,$$

donc $\omega(P) < 3$; d'après $(L\gamma)$, φX est un système libre.

Si le groupe G admet un système fini de générateurs, considérons les ensembles finis A d'éléments de G, avec $[A] = G$; parmi les A, il en existe qui contiennent un nombre d'éléments <u>minimum</u>. On appelle ce nombre, <u>rang</u> $r(G)$ de G, et on dit que G est de <u>rang fini</u>.

H étant un sous-groupe de rang fini de G, notons $\mathcal{X}_m(H)$, $m \geq r(H)$, le sous-ensemble de $\mathcal{X}_m$ formé par les m-suites X, avec $[X] = H$. Si φ est une transformation simple de $\mathcal{X}_m$, la trace de φ dans $\mathcal{X}_m(H)$ est d'après 7-1, une transformation de $\mathcal{X}_m(H)$, que nous appelons <u>transformation</u>

(1) X^{-1} est l'<u>ensemble</u> des inverses des éléments de la suite X, et dans $X \cup X^{-1}$, X est l'ensemble des éléments de G, qui figurent dans X.

simple de $\mathcal{X}_m(H)$. Considérons l'ensemble $\mathcal{N}_m(H)$ des produits finis de transformations simples de $\mathcal{X}_m(H)$; c'est d'après la remarque faite sur φ^{-1} , un sous-groupe du groupe des transformations de $\mathcal{X}_m(H)$, que nous appelons groupe de Nielsen d'ordre m attaché à H . D'après 7-2 :

7-2'. La propriété : X est une base libre de H , est un invariant de $N_m(H)$.

Notons maintenant $\lambda(X) = \sum_j \lambda(x_j)$. Notons également $|X|$, un ensemble de représentants (moins 1, éventuellement), des classes relatives à l'équivalence $x_j \sim x_k$, dans X . On a $|X| \cap |X|^{-1} = 0$ et $|X| \cup |X|^{-1} = X \cup X^{-1}$, de sorte que : si un ensemble de représentants $|X|$ est un système libre, il en est de même pour tout autre ensemble de représentants

7-3. Si $X \in \mathcal{X}_m(H)$ et $|X|$ n'est pas libre il existe une transformation simple φ de $\mathcal{X}_m(H)$, avec $\lambda(\varphi X) < \lambda(X)$.

Soit $\overline{P} = 1$ une relation irréductible avec $a_i \in |X| \cup |X|^{-1} = X \cup X^{-1}$ et $\omega(P) \geq 3$. D'après 3-4 , il existe, pour un certain a_i , un segment S de P , a_i-simple, avec $\lambda(\overline{S}) < \lambda(a_i)$. Posons $a_i = x_{j0}^{\varepsilon_i}$, $\overline{S} = \overline{S}_1(x_j).x_{j0}^{\varepsilon}.\overline{S}_2(x_j)$, où puisque S est x_{j0}-simple, $S_1(x_j)$ et $S_2(x_j)$ sont nécessairement des suites d'éléments de $(X-x_{j0}) \cup (X-x_{j0})^{-1}$. La transformation simple φ définie par

$$\begin{cases} \varphi v_j = v_j & ; \quad j \neq j_0 \\ \varphi v_{j0} = \overline{S}_1(v_j).v_{j0}^{\varepsilon}.S_2(v_j) \end{cases}$$

est telle que pour $j \neq j_0$, $\varphi x_j = x_j$, et $\varphi x_{j0} = \overline{S}$, de sorte que $\lambda(\varphi x_{j0}) = \lambda(\overline{S}) < \lambda(a_i) = \lambda(x_{j0})$, et par conséquent

$$\lambda(\varphi X) = \sum_j \lambda(\varphi x_j) = \lambda(x_1) + \dots + \lambda(\varphi x_{j0}) + \dots + \lambda(x_m) < \sum_j \lambda(x_j) = \lambda(X)$$

7-4. Quel que soit $X \in \mathcal{X}_m(H)$, il existe $\psi \in \mathcal{N}_m(H)$, telle que $|\psi X|$ soit une base libre de H .

Considérons les suites $X_k \in \mathcal{X}_m(H)$, définies par

$$X_k = \varphi_k X_{k-1} , X_0 = X$$

où, si $|X_{k-1}|$ n'est pas un système libre, φ_k est la transformation simple avec $\lambda(\varphi_k X_{k-1}) < \lambda(X_{k-1})$, dont l'existence est assurée par 7-3. On a

$$\lambda(X) > \lambda(X_1) > \dots > \lambda(X_k) > \dots$$

de sorte que pour un certain k , $|X_k|$ est un système libre, et

$$X_k = \varphi_k \varphi_{k-1} \dots \varphi_1 X = \psi X , \quad \psi \in \mathcal{N}_m(H) .$$

On déduit de 7-3 , <u>sans utiliser l'axiome du choix</u>, que <u>tout sous-groupe de rang fini d'un groupe libre est un groupe libre</u>. En fait 7-4 décrit un procédé fini pour obtenir une base libre de H (de rang fini) à partir de toute suite finie de générateurs de H .

8. <u>Transitivité du groupe de Nielsen</u>. Soit $G = [[A]]$ et P une suite irréductible avec $a_i \in G$ et $\omega(P) \geq 2$

8-1. <u>Si</u> $\overline{P} = \alpha$, <u>avec</u> $\alpha \in A \cup A^{-1}$, <u>pour tout</u> a_i <u>avec</u> $\lambda(a_i) = \ell(P)$, <u>il existe un segment</u> S de P , a_i-simple, <u>avec</u> $\lambda(\overline{S}) < \lambda(a_i)$.

Considérons la relation $\alpha^{-1}\overline{P} = 1$. Puisque $\overline{P} \neq 1$ est irréductible, un segment S de $\alpha^{-1}\,\overline{P}$, avec $\overline{S} = 1$, est nécessairement de la forme $S = S(\alpha^{-1}\ a_i)$, de sorte que $\overline{S}(a_1\ a_{i-1}) = 1$, $\overline{S}(a_{i+1}\ a_n) = 1$; ceci contredit $\omega(P) \geq 2$. $\alpha^{-1}\,\overline{P} = 1$ est par conséquent une relation irréductible.

D'autre part si, pour tout i , $a_i \in A \cup A^{-1}$, la condition que P soit irréductible entraîne $\omega(P) = 1$. On déduit $\ell(P) \geq 2$.

Soit $a_i = \prod_j a_{ij}$ la représentation irréductible de a_i et considérons l'identité

$$\alpha^{-1}\,\overline{P}_A = \alpha^{-1} \prod_i \prod_j a_{ij} = 1 \quad ;$$

soit ρ , sa segmentation concordante de unitaire qu'admet $\{\alpha^{-1}\ ,\ P_A\}$.

Considérons comme dans 3-4, l'ensemble ρ^* des couvertures centrales des éléments $a \in \{\alpha^{-1}\ ,\ P_A\}$, avec $a \sim a_i$, et soit $C_\rho(a_\varkappa)$ un segment minimal de ρ^* .

Si $C_\rho(a_\varkappa) = S(a_{i,j+1}\ a_{kh})$, on peut prendre S parmi les quatre <u>segments de</u> P

$$S(a_{i+1}\ a_{k-1})\ ,\ S(a_i\ a_{k-1})\ ,\ S(a_{i+1}\ a_k)\ ,\ S(a_i\ a_k)\ .$$

Il reste donc à étudier le cas $C_\rho(a_\varkappa) = S(\alpha^{-1}\ a_{kh})$. Considérons le segment $S(a_1\ a_{k-1})$ de P ; d'après la remarque a) , de 3-4, il est a_i-simple. D'autre part, puisque $\overline{S}(\alpha^{-1}\ a_{kh}) = 1$, $\alpha^{-1}\ a_{kh} = 1$, on a

$$\begin{aligned}\lambda[\overline{S}(a_1 a_{k-1})] &= \lambda[\alpha\,\overline{S}(\alpha^{-1} a_{kh})\ a_{kh}^{-1} \ldots a_{k1}^{-1}] = \lambda(a_{k,h-1}^{-1} \ldots a_{k1}^{-1}) \\ &= h - 1 < \lambda(a_k) \leq \lambda(a_i)\end{aligned}$$

On peut donc prendre dans ce cas $S = S(a_1\ a_{k-1})$.

8-1. est une extension de 3-4 , des relations de la forme $\overline{P} = 1$, aux relations de la forme $\overline{P} = \alpha$, $\alpha \in A \cup A^{-1}$; 3-4 n'est cependant pas un cas particulier de 8-1.

Supposons maintenant que A est fini, c'est-à-dire que G est de rang fini.

8-2. <u>Si</u> $X \in \mathcal{X}_m(G)$ <u>et</u> $A \cup A^{-1} \notin X \cup X^{-1}$, <u>il existe une transformation simple</u> φ , <u>de</u> $\mathcal{X}_m(G)$, <u>avec</u> $\lambda(\varphi X) < \lambda(X)$.

On déduit 8-2 de 8-1 , comme 7-3 de 3-4. Supposons en effet que $\alpha \in A \cup A^{-1}$ et $\alpha \notin X \cup X^{-1}$. Puisque $[X] = G$, il existe d'après 3-1, une suite P irréductible avec $a_i \in X \cup X^{-1}$, telle que $\bar{P} = \alpha$. D'après 8-1 , on peut trouver, dans ce cas, un élément $a_i \in P$ et un segment S de P , a_i-simple, avec $\lambda(\bar{S}) < \lambda(a_i)$. Si l'on pose $a_i = x_{j0}^{\varepsilon_i}$, $\bar{S} = \bar{S}_1(x_j).x_{j0}^{\varepsilon}.\bar{S}_2(x_j)$, où $S_1(x_j)$ et $S_2(x_j)$ sont nécessairement des suites d'éléments de $(X - x_{j0}) \cup (X - x_{j0})^{-1}$, la transformation simple φ , définie par

$$\begin{cases} \varphi v_j = v_j \quad ; \quad j = j_0 \\ \varphi v_{j0} = \bar{S}_1(v_j).v_{j0}^{\varepsilon}.\bar{S}_2(v_j) \end{cases}$$

est telle que $\lambda(\varphi X) < \lambda(X)$.

8-3. <u>Quel que soit</u> $X \in \mathcal{X}_m(G)$, <u>il existe</u> $\psi \in \mathcal{H}_m(G)$ <u>telle que</u> $A \cup A^{-1} \subseteq \psi X \cup (\psi X)^{-1}$.

On déduit 8-3 de 8-2, comme 7-4 de 7-3. Notons $c(A)$,le nombre des éléments du sous-ensemble fini A de G .

<u>Corollaire</u>. <u>Quelle que soit la base libre</u> A <u>du groupe libre de rang fini</u> G , $c(A) = r(G)$.

Si en effet $X \in \mathcal{X}_{r(G)}(G)$, il existe d'après 8-3, $\psi X \in \mathcal{X}_{r(G)}(G)$ avec $A \cup A^{-1} \subseteq \psi X \cup (\psi X)^{-1}$, de sorte que puisque $A \cap A^{-1} = 0$, $c(A) \leqslant \omega(\psi X) = r(G)$.

Si $A = \{\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_{c(A)}\}$, notons

$$A_m = \{\underbrace{\alpha_1 , \dots , \alpha_{c(A)} , 1 , 1 , \dots , 1}_{m}\} \quad ; \quad c(A) = r(G) \leq m .$$

8-4. <u>Si</u> $X \in \mathcal{X}_m(G)$ <u>est telle que</u> $A \cup A^{-1} \subseteq X \cup X^{-1}$, <u>il existe</u> $\psi \in \mathcal{H}_m(G)$, <u>avec</u> $\psi X = A_m$.

Il est clair que le remplacement de x_{j0} par x_{j0}^{ε} est une transformation simple, tandis qu'une transposition de X , s'obtient par une succession de trois transformations simples, de sorte qu'une permutation de X , s'obtient par une transformation de $\mathcal{H}_m(G)$. On en conclut qu'il existe $\psi' \in \mathcal{H}_m(G)$ telle que

$$\psi' X = \left\{\alpha_1 , \ldots , \alpha_{c(A)} , y_{c(A)+1} , \ldots , y_k , \ldots , y_m\right\}$$

où $y_k \in X \subseteq G$; puisque $G = [[A]]$, soit $y_k = f(\alpha_i)$, la représentation irréductible de y_k . La transformation simple φ définie par

$$\begin{cases} \varphi v_j = v_j & ; \quad j \neq k \\ \varphi v_k = f(v_i) . v_k^{-1} \end{cases}$$

est telle que

$$\varphi \psi' X = \left\{\alpha_1 , \ldots , \alpha_{c(A)} , y_{c(A)+1} , \ldots , y_{k-1} , 1 , y_{k+1} , \ldots , y_m\right\}$$

de sorte que finalement il existe $\psi^* \in \mathcal{H}_m(G)$, avec

$$\psi^* \psi' X = A_m$$

et alors $\psi = \psi^* \psi' \in \mathcal{H}_m(G)$ est la transformation annoncée dans 8-4.

8-5. $\mathcal{H}_m(G)$ <u>est un groupe transitif de transformations de</u> $\mathcal{X}_m(G)$.

Soit $X , Y \in \mathcal{X}_m(G)$; d'après 8-3 et 8-4, il existe $\psi_x , \psi_y \in \mathcal{H}_m(G)$ avec

$$\psi_x X = A_m \qquad , \qquad \psi_y Y = A_m$$

de sorte que $\psi_y^{-1} \in \mathcal{H}_m(G)$ est telle que $\psi_y^{-1} A_m = Y$ et $\psi = \psi_y^{-1} \psi_x \in \mathcal{H}_m(G)$ telle que

$$\psi X = \psi_y^{-1} \psi_x X = \psi_y^{-1} A_m = Y .$$

<u>Corollaire</u>. <u>Tout sous-ensemble</u> X <u>de générateurs d'un groupe libre</u> G <u>de rang fini avec</u> $c(X) = r(G)$, <u>est une base libre de</u> G .

Si $G = [[A]]$, d'après le corollaire de 8-3 , $c(A) = r(G)$. D'autre part si $[X] = G$ et $c(X) = r(G) = c(A)$, il existe d'après 8-5 , $\psi \in \mathcal{H}_{c(A)}(G)$ avec $\psi A = X$ et par conséquent, d'après 7-2', X est un système libre.

En fait 8-5 , donne le moyen de construire à partir d'une base libre $A = \left\{\alpha_1 , \ldots , \alpha_{r(G)}\right\}$, toute autre suite de générateurs de G ; il n'est en effet que de considérer toutes les suites

$$\{\underbrace{\alpha_1 , \ldots , \alpha_{r(G)} , 1 , 1 , \ldots , 1}_{m}\} \qquad ; \qquad r(G) \leq m$$

et d'effectuer sur chacune les transformations de $\mathcal{H}_m(G)$. Comme d'autre part, d'après 7-4, on peut obtenir une base libre de G à partir de toute suite X de générateurs de G , par des transformations de $\mathcal{H}_{\omega(X)}(G)$, on peut conclure :

On peut construire à partir d'une suite de générateurs d'un groupe libre de rang fini, toute autre suite de générateurs, à l'aide de transformations de $\bigcup_{m \geq r(G)} \mathcal{H}_m(G)$.