Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

J. Petresco

Sur les commutateurs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. n° 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A6_0>

SUR LES COMMUTATEURS

Conférence faite par J. PETRESCO, le 22 mars 1954

-:-:-:-

Il s'agit d'une reconsidération des différentes notions relatives aux commutateurs dans les groupes, d'un point de vue plus général, et qui, tout en restant à l'intérieur de la théorie classique, permet des développements systématiques.

1.- SOUS-GROUPE COMMUTATEUR.

Le sous-groupe commutateur K^2 d'un groupe G est la classe unité modulo $\mathcal{K}^2$, où $\mathcal{K}^2$ est l'équivalence régulière minimum qui jouit de la propriété $ab \equiv ba(\mathcal{K}^2)$; on en déduit que K^2 est le sous-groupe (caractéristique) engendré par les commutateurs $a \circ b = aba^{-1}b^{-1}$, avec $a, b \in G$. Si l'on se propose maintenant de déterminer la relation $a \backsim b$ (b est une substitution de a) : il existe un ensemble $[a_1 , a_2 , \dots , a_n]$ d'éléments non nécessairement différents de G et une substitution $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 , a_2 , \dots a_n \\ a_{i_1} , a_{i_2} , \dots a_{i_n} \end{pmatrix}$ opérant dans cet ensemble telle que $a = a_1 a_2 \dots a_n$, $b = \sigma(a_1 a_2 \dots a_n)$, où on a noté $\sigma(a_1 a_2 \dots a_n) = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$, on voit sans difficulté que $\backsim$ est une équivalence régulière. Pour montrer par exemple la transitivité, on déduit de $a = a_1 \dots a_n$, $b = \sigma(a_1 \dots a_n)$, $b = b_1 \dots b_m$, $c = \tau(b_1 \dots b_m)$, que $a = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m b^{-1}$, $c = \tau(b_1 \dots b_m).\sigma(a_1 \dots a_n).b^{-1} = \rho(a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m b^{-1})$. De plus, $a \backsim b \rightarrow a \equiv b(\mathcal{K}^2)$, car $\sigma(a_1 \dots a_n) \equiv a_1 \dots a_n(\mathcal{K}^2)$ – on utilise la décomposition d'une substitution en transposition opérant sur des éléments consécutifs et la régularité de $\mathcal{K}^2$ – et par conséquent si E est la classe unité modulo $\backsim$, on a $E \subseteq K^2$. Réciproquement, un commutateur $aba^{-1}b^{-1}$ appartient à E , donc, puisque E est sous-groupe, $K^2 \subseteq E$:

1.1 – K^2 est l'ensemble des substitutions de l'unité ; $a \backsim b \rightleftarrows a \equiv b(\mathcal{K}^2)$

2.- SOUS-GROUPE COMMUTATEUR D'UNE RÉUNION.

A et B étant sous-groupes de G , notons $A \cup B$ le sous-groupe qu'ils engendrent, $K^2(A)$ le sous-groupe commutateur de A . Un élément de

$A \cup B$ est de la forme $\prod_{i<n} a_i\, b_i$ avec $a_i \in A$, $b_i \in B$. Proposons-nous de distinguer parmi ces éléments ceux qui composent le sous-groupe commutateur de $A \cup B$, $K^2(A \cup B)$. Si l'on considère l'ensemble $E(A \cup B)$ des éléments $\prod_i a_i\, b_i$ avec $\prod_i a_i \in K^2(A)$, $\prod_i b_i \in K^2(B)$, on voit facilement qu'il s'agit d'un sous-groupe. D'autre part un commutateur de $A \cup B$ est de la forme $c = \prod_{i<n} a_i\, b_i \prod_{j<m} \alpha_j \beta_j \left(\prod_i a_i\, b_i\right)^{-1} \left(\prod_j \alpha_j \beta_j\right)^{-1}$ et on voit par exemple que

$$\prod_i a_i \prod_j \alpha_j \prod_i a^{-1}_{n-i} \prod_j \alpha^{-1}_{m-j} \backsim \prod_i a_i\, a_i^{-1} \prod_j \alpha_j \alpha_j^{-1} = e \, .$$

On déduit, d'après 1.1 , $c \in E(A \cup B)$, donc $K^2(A \cup B) \subseteq E(A \cup B)$. Réciproquement, de $c \in E(A \cup B)$, on déduit $c = \prod_i a_i\, b_i \backsim \prod_i a_i \prod_i b_i \in K^2(A)K^2(B) \subseteq K^2(A \cup B)$, donc d'après 1.1 , $c \in K^2(A \cup B)$ et $E(A \cup B) \subseteq K^2(A \cup B)$.

<u>2.1 - $K^2(A \cup B)$ est l'ensemble des éléments $\prod_i a_i\, b_i$, avec $\prod_i a_i \in K^2(A)$, $\prod_i b_i \in K^2(L)$.</u>

On peut faire l'extension par résurrence de cette propriété à $K^2(A_1 \cup A_2 \cdots$ $\cdots A_\nu)$.

3.- NORMALISANT.

Si $A \subseteq B$, appelons <u>normalisant de A dans B</u> le sous-groupe normal dans B engendré par A , soit $N_B(A)$ et considérons l'ensemble des $\prod_i a_i\, b_i$ avec $\prod_i b_i = e$, soit $(A,\overline{B})$. Celui-ci est un sous-groupe normal dans $A \cup B$, car si $a \in A$, $b \in B$, on a évidemment $a . \prod_i a_i\, b_i . a^{-1} \in (A,\overline{B})$ et $b . \prod_i a_i\, b_i . b^{-1}$ est tel que $b . \prod_i b_i . b^{-1} = bb^{-1} = e$. D'autre part $\prod_i a_i\, b_i = \prod_i b_1\, b_2 \ldots b_{i-1}\, a_i\, (b_1\, b_2 \ldots b_{i-1})^{-1} . \prod_i b_i$ et si $\prod_i b_i = e$, on voit que $\prod_i a_i\, b_i \in N_{A \cup B}(A)$:

<u>3.1</u> - $N_{A \cup B}(A)$ <u>est l'ensemble des éléments $\prod_i a_i\, b_i$, avec $\prod_i b_i = e$</u> .

En particulier $N(A)$, le normalisant de A (dans G) est l'ensemble des $\prod_i a_i\, g_i$, avec $a_i \in A$, $g_i \in G$, $\prod_i g_i = e$.

4.- COMMUTATEUR DE DEUX SOUS-GROUPES.

Notons $A \circ B$ le sous-groupe engendré par les $a \circ b$, avec $a \in A$, $b \in B$. C'est un sous-groupe normal dans $A \cup B$, car si par exemple $\alpha \in A$, $\alpha . a\, b\, a^{-1}\, b^{-1} . \alpha^{-1} = \alpha a\, b\, (\alpha a)^{-1}\, b^{-1} . b \alpha\, b^{-1} \alpha^{-1} \in A \circ B$. En particulier $A \circ G$ est normal dans G . Si l'on considère maintenant l'ensemble $(\overline{A},\overline{B})$ des $\prod_i a_i\, b_i$ avec $\prod_i a_i = \prod_i b_i = e$, on voit qu'il s'agit d'un sous-groupe normal dans $A \cup B$, et puisque $a\, b\, a^{-1}\, b^{-1} \in (\overline{A},\overline{B})$, on a $A \circ B \subseteq (\overline{A},\overline{B})$. Réciproquement si $\prod_i a_i =$

$= \prod_i b_i = e$, on a $\prod_i a_i\, b_i = \prod_j a_1\, a_2 \dots a_{i-1}\, a_i\, (a_1\, a_2 \dots a_{i-1})^{-1} a_i^{-1}\, a_i =$
$= \prod_i c_i\, a_i$, où $c_i \in A \circ B$, et $\prod_i c_i\, a_i = \prod_i a_1\, a_2 \dots a_{i-1}\, a_i (a_1\, a_2 \dots a_{i-1})^{-1}$
$\in A \circ B$:

<u>4.1 - $A \circ B$ est l'ensemble des éléments</u> $\prod_i a_i\, b_i$ <u>avec</u> $\prod_i a_i = \prod_i b_i = e$.

Si $\prod_{i<n} a_i\, b_i$ est tel que $\prod_i b_i = e$, on a d'après 4.1 , $\prod_i a_{n-i}^{-1} \prod_i a_i\, b_i$ $\in A \circ B$, donc $\prod_i a_i\, b_i = \prod_i a_i \,.\, \prod_i a_{n-i}^{-1} \prod_i a_i\, b_i$ $A(A \circ B)$ et par conséquent, d'après 3.1 ; $N_{A \cup B}(A) \subsetneq A(A \circ B)$. Puisque d'autre part $a.ba^{-1}\, b^{-1}$ $N_{A \cup B}(A)$:

4.2 - <u>On a $N_{A \cup B}(A) = A(A \circ B)$.</u>

En particulier $N(A) = A(A \circ G)$. Z étant le centre de G , $A \subsetneq Z$ équivaut à $A \circ G = e$. On déduit, puisque $A \circ G \subsetneq G \circ G = K^2$:

<u>Un sous-groupe normal A est contenu dans Z , ou alors $A \cap K^2 \neq e$; tout sous-groupe normal minimal est contenu soit dans Z , soit dans K^2 .</u>

De $\prod_{i<n} a_i\, b_i = \prod_i a_i \,.\, \prod_i a_{n-i}^{-1} \prod_i a_i\, b_i \prod_i b_{n-i}^{-1} \prod_i b_i$, on déduit également :

<u>4.3 - On a $A \cup B = A(A \circ B)B$; l'ordre des facteurs est indifférent .</u>

5.- LE PRODUIT $A^*(A \circ B)B^*$.

On déduit comme dans 4.3 :

<u>5.1 - Si $A^* \subsetneq A$, $B^* \subsetneq B$, $A^*(A \circ B)B^*$ est l'ensemble des éléments</u> $\prod_i a_i\, b_i$, <u>avec</u> $\prod_i a_i \in A^*$, $\prod_i b_i \in B^*$.

On déduit de 5.1 :

<u>5.2 - Si A^* est normal dans A et B^* dans B , $A^*(A \circ B)B^*$ est normal dans $A \cup B$.</u>

<u>5.3 - Si $A^* \subsetneq A$, $b \in B$, $b\, [A^*(A \circ B)]\, b^{-1} \subsetneq A^*(A \circ B)$.</u>

En particulier, on a pour $B = G$:

<u>5.4 - Si $A^* \subsetneq A$, $A^*(A \circ G)$ est un sous-groupe normal (dans G) .</u>

<u>5.5 - Si A est normal et $A \circ G \subsetneq A^* \subsetneq A$, A^* est normal (dans G).</u>

Si l'on considère une <u>chaîne centrale</u>, c'est-à-dire une chaîne $A \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_{i-1} \subsetneq A_i \subsetneq \dots \subsetneq G$, telle que $A_i \circ G \subsetneq A_{i-1}$, on déduit de 5.5 que <u>tout sous-groupe intervalaire d'une chaîne centrale est normal (dans G)</u> .

Soit maintenant $A^* \subsetneq A$, $\alpha \in A^*$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in A \circ B$. Puisque $A \cup B = A(A \circ B)B$, un élément de $A^* \circ (A \cup B)$ est un produit d'éléments de la forme $\alpha\, acb\, \alpha^{-1} b^{-1} c^{-1} a^{-1} = \alpha a \alpha^{-1} a^{-1} . a . \alpha c \alpha^{-1} . \alpha b \alpha^{-1} b^{-1} . c^{-1} . a^{-1} \in (A^* \circ A)(A \circ B)$, car $A \circ B$ est normal dans $A \cup B$, de sorte que :

5.6 - Si $A^* \subseteq A$, $A^* \circ (A \cup B) \subseteq (A^* \circ A)(A \circ B)$.

En particulier $A \circ (A \cup B) = (A \circ A)(A \circ B)$.

On sait que si B et C sont normaux $AB \circ C = (A \circ C)(B \circ C)$. On déduit en tenant compte de 5.2 et en appliquant 5.6 que si A^* est normal dans A et B^* dans B, $[A^*(A \circ B)B^*] \circ (A \cup B) = [A^* \circ (A \cup B)][(A \circ B)B^* \circ (A \cup B)] =$
$= [A^* \circ (A \cup B)][(A \circ B) \circ (A \cup B)][B^* \circ (A \cup B)] \subseteq (A^* \circ A)(A \circ B)(B^* \circ B)$:

5.7 - Si A^* est normal dans A et B^* dans B, $[A^*(A \circ B)B^*] \circ (A \cup B) \subseteq (A^* \circ A)(A \circ B)(B^* \circ B)$.

6.- SOUS-GROUPES RÉSOLUBLES.

De 2.1 et 4.3, résulte :

6.1 - On a $K^2(A \cup B) = K^2(A)(A \circ B)K^2(B)$.

6.2 - Si B est normal dans $A \cup B$, $K^2(AB) \subseteq K^2(A).B$.

Notons $K^i(A) = K^2[K^{i-1}(A)] = K^{i-1}(A) \circ K^{i-1}(A)$; si $j+k = i+1$, $K^i(A) = K^j[K^k(A)]$
De $K^{i-1}(AB) \subseteq K^{i-1}(A).B$ on déduit en tenant compte de 6.2, $K^i(AB) = K^2[K^{i-1}(AB)]$
$\subseteq K^2[K^{i-1}(A).B] \subseteq K^i(A).B$, de sorte que :

6.3 - Si B est normal dans $A \cup B$, $K^i(AB) \subseteq K^i(A).B$

$(A \circ B)B = N_{A \cup B}(B)$ est normal dans $A \cup B$; on a donc d'après 4.3 et 6.3, $K^j(A \cup B) = K^j[A.(A \circ B)B] \subseteq K^j(A)(A \circ B)B$; mais $K^j(A)$ est normal dans A, donc d'après 5.2, $K^j(A)(A \circ B)$ est normal dans $(A \cup B)$; si $j+k = i+1$, on a en appliquant de nouveau 6.3, $K^i(A \cup B) \subseteq K^k[K^j(A)(A \circ B).A] \subseteq K^j(A)(A \circ B)K^k(B)$.

6.4 - On a $K^i(A \cup B) \subseteq K^j(A)(A \circ B)K^k(A)$, si $j+k = i+1$.

Si la condition des chaînes descendantes est valables dans G, il existe un nombre n, le degré résoluble de A, tel que $K^{n-1}(A) \neq K^n(A) = K^{n+1}(A)$. Suivant que $K^n(A) = e$ ou $K^n(A) = A$ on dit que A est <u>résoluble</u> ou <u>anti-résoluble</u> (parfait). $K^n(A)$ est un sous-groupe anti-résoluble, réunion des sous-groupes anti-résolubles de A, que nous appelons <u>radical anti-résoluble</u> de A et notons $\overline{K}(A)$, si $A \subseteq B$, $\overline{K}(A) \subseteq \overline{K}(B)$. De 6.4 on déduit :

6.5 - $\overline{K}(A \cup B) \subseteq \overline{K}(A)(A \circ B)\overline{K}(B)$.

En particulier :

6.6 - Si A et B sont normaux dans $A \cup B$, $\overline{K}(AB) = \overline{K}(A)\overline{K}(B)$.

6.7 - Si A et B sont résolubles, $\overline{K}(A \cup B) = \overline{K}(A \circ B)$.

Ces deux propositions généralisent : si A et B sont normaux et résolubles AB est résoluble, d'où on déduit l'existence du radical résoluble (Filling).

7.- SOUS-GROUPES NILPOTENTS.

On peut faire des considérations analogues en remplaçant l'opération K^i par l'opération O^i définie comme suit : $O^i(A) = O^{i-1}(A)\circ A$, $O^2(A) = A\circ A = K^2(A)$. En utilisant notamment 5.7 on déduit par récurrence

$$O^i(A\cup B) \subseteq O^i(A)(A\circ B)O^i(B)$$

et si l'on note $\overline{O}(A) = O^n(A)$ où n est défini par : $O^{n-1}(A) \neq O^n(A) = O^{n+1}(A)$ il en résulte :

$$\overline{O}(A\cup B) \subseteq \overline{O}(A)(A\circ B)\overline{O}(B) .$$

8.- FORMES COMMUTATRICES.

Soit $N = [1 , 2 , \dots , \nu]$ un ensemble fini d'indices et $E = [A_1 , A_2 , \dots , A_\nu]$ un ensemble de sous-groupes (non nécessairement différents) de G. Considérons un élément quelconque de $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu$, soit $a = \prod_i a_i^1 a_i^2 \dots a_i^\nu$, avec $a_i^\varkappa \in A_\varkappa$, $\varkappa \in N$. Si N^λ , $\lambda \leq \nu$ est un sous-ensemble de λ éléments de N , soit $N^\lambda = [\varkappa_1 , \varkappa_2 , \dots , \varkappa_\lambda]$, nous notons $N^\lambda(a)$, le produit obtenu en égalant à e tout élément $a_i^\varkappa$ de l'expression de a pour lequel $\varkappa \notin N^\lambda$, c'est-à-dire que

$$N^\lambda(a) = \prod_i a_i^{\varkappa_1} a_i^{\varkappa_2} \dots a_i^{\varkappa_\lambda}$$

Nous notons par ailleurs $E^\mu(A_1 , A_2 , \dots , A_\nu)$, ou encore E^μ , l'ensemble des éléments $a \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu$, avec $N^\lambda(a) = e$, quel que soit $\lambda < \mu$ et le sous-ensemble N^λ de N . Par définition $E^1(A_1 , A_2 , \dots , A_\nu) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu$. On a évidemment : $E^\nu \subseteq E^{\nu-1} \subseteq \dots \subseteq E^\mu \subseteq \dots \subseteq E^2 \subseteq E^1$. De plus :

8.1 - E^μ est un sous-groupe normal de E^1 , $1 \leq \mu \leq \nu$.

Si $\alpha = \prod_j \alpha_j^1 \alpha_j^2 \dots \alpha_j^\nu$, $\alpha^\varkappa \in A_\varkappa$, $\varkappa \in N$, ceci résulte des relations :

$$N^\lambda(a\alpha) = \prod_i a_i^{\varkappa_1} \dots a_i^{\varkappa_\lambda} \prod_j \alpha_j^{\varkappa_1} \dots \alpha_j^{\varkappa_\lambda} = N^\lambda(a).N^\lambda(\alpha)$$

$$N^\lambda(a^{-1}) = N^\lambda\left[\prod_i (a_i^\nu)^{-1} \dots (a_i^1)^{-1}\right] = \prod_i (a_i^{\varkappa_\lambda})^{-1} \dots (a_i^{\varkappa_1})^{-1} = \left(\prod_i a_i^{\varkappa_1} \dots a_i^{\varkappa_\lambda}\right)^{-1} = \left[N^\lambda(a)\right]^{-1}$$

$$N^\lambda\left[\alpha^\varkappa a(\alpha^\varkappa)^{-1}\right] = \alpha^\varkappa . \prod_i a_i^{\varkappa_1} \dots a_i^{\varkappa_\lambda} . (\alpha^\varkappa)^{-1} = \alpha^\varkappa \left[N^\lambda(a)\right](\alpha^\varkappa)^{-1} , \quad \varkappa \in N^\lambda$$

$$N^\lambda\left[\alpha^\varkappa a(\alpha^\varkappa)^{-1}\right] = \prod_i a_i^{\varkappa_1} \dots a_i^{\varkappa_\lambda} = N^\lambda(a) \quad , \varkappa \notin N^\lambda .$$

Soit maintenant $\Phi(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$ une forme commutatrice de poids ν

<u>8.2 - On a $\Phi(A_1, A_2, \ldots, A_\nu) \subseteq E^\nu(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$.</u>

D'après 4.1 ceci est vrai pour $\nu = 2$. Supposons que la relation soit vraie pour tout $\nu' < \nu$. D'après la définition des formes commutatrices

$$\Phi(A_1, A_2, \ldots, A_\nu) = \Phi_1(A_{\iota_1}, \ldots A_{\iota_{\nu_1}}) \circ \Phi_2(A_{\iota'_1}, \ldots, A_{\iota'_{\nu_2}})$$

où $\nu_1, \nu_2 < \nu$, $\nu_1 + \nu_2 = \nu$, les indices $\iota_1, \ldots, \iota_{\nu_1}, \iota'_1, \ldots, \iota'_{\nu_2}$, différents, appartiennent à N. Notons $I = [\iota_1, \ldots, \iota_{\nu_1}]$, $I' = [\iota'_1, \ldots, \iota'_{\nu_2}]$; on a $I \cup I' = N$. Il s'en suit que tout élément $\varphi \in \Phi(A_1, \ldots, A_\nu)$ est de la forme

$$\varphi = \prod_k \varphi_k^1 \varphi_k^2$$

ou d'après 4.1, $\prod_k \varphi_k^1 = \prod_k \varphi_k^2 = e$ et d'après l'hypothèse, $\varphi_k^1 = \prod_i a_i^{\iota_1} \ldots a_i^{\iota_{\nu_1}}$ avec $I^{\lambda_1}(\varphi_k^1) = e$, pour tout $\lambda_1 < \nu_1$, $\varphi_k^2 = \prod_i a_i^{\iota'_1} \ldots a_i^{\iota'_{\nu_2}}$ avec $I^{\lambda_2}(\varphi_k^2) = e$, pour tout $\lambda_2 < \nu_2$. Soit maintenant $\lambda < \nu$; on a

$$N^\lambda(\varphi) = \prod_k N^\lambda(\varphi_k^1) . N^\lambda(\varphi_k^2) = \prod_k [I \cap N^\lambda](\varphi_k^1) . [I' \cap N^\lambda](\varphi_k^2)$$

Quatre cas sont à distinguer :

(1) $I \cap N^\lambda \subset I$, $I' \cap N^\lambda \subset I'$; dans ce cas $[I \cap N^\lambda](\varphi_k^1) = e$, $[I' \cap N^\lambda](\varphi_k^2) =$ $= e$, et par conséquent $N^\lambda(\varphi) = e$.

(2) $I \cap N^\lambda = I$, $I' \cap N^\lambda \subset I'$; dans ce cas $[I \cap N^\lambda](\varphi_k^1) = I(\varphi_k^1) = \varphi_k^1$, $[I' \cap N^\lambda](\varphi_k^2) = e$, et par conséquent $N^\lambda(\varphi) = \prod_k \varphi_k^1 = e$

(3) $I \cap N^\lambda \subset I$, $I' \cap N^\lambda = I'$; en procédant de façon symétrique à (2) on obtient $N^\lambda(\varphi) = \prod_k \varphi_k^2 = e$

(4) $I \cap N^\lambda = I$, $I' \cap N^\lambda = I'$; on déduit $I \subseteq N^\lambda$, $I' \subseteq N^\lambda$ donc $N = I \cup I' \subseteq N^\lambda$, ce qui est contradictoire, puisque $\lambda < \nu$

On a donc de toute façon $N^\lambda(\varphi) = e$, c'est-à-dire $\varphi \in E^\nu$ et en définitive $\Phi \subseteq E^\nu$, pour tout ν.

Soit maintenant $\Phi(A_{\iota_1}, A_{\iota_2}, \ldots, A_{\iota_w})$ une forme commutatrice de poids w, ou les indices ι_v, $1 \leq v \leq w$, non nécessairement différents, sont tels que $\iota_v \in N$; nous dirons que le nombre ι des indices ι_v, différents, est l'<u>indice</u> de Φ par rapport à E ; on a $\iota \leq w$. Notons $\Phi^\iota(A_{\iota_1}, A_{\iota_2}, \ldots, A_{\iota_w})$ une forme commutatrice de poids w et d'indice ν.

8.3 - On a $\Phi^{\iota}(A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_w}) \subseteq E^{\iota}(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$.

D'après 8.2, $\Phi^{\iota}(A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_w}) \subseteq E^{w}(A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_w})$. Soit $a \in E^w$; d'après la définition de E^w il est de la forme $a = \prod_i a_i^{\iota_1} \ldots a_i^{\iota_w}$, où si l'on note $I = [\iota_1, \ldots, \iota_w]$, on a $a_i^{\iota_v} \in A_{\iota_v}$ pour tout $\iota_v \in I$ et $I^v(a) = e$, pour tout $v < w$. Notons également $I \wedge N^{\lambda}$, l'ensemble des éléments de I qui sont égaux à un quelconque des éléments de N^{λ}. Si $\lambda < \iota$, $I \wedge N^{\lambda} \subset I$, de sorte que

$$N^{\lambda}(a) = [I \wedge N^{\lambda}](a) = e .$$

On en déduit $E^w(A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_w}) \subseteq E^{\iota}(A_1, \ldots, A_\nu)$ et en définitive 8.3.

9.- AGRÉGATS COMMUTATEURS.

Nous allons appeler agrégats commutateurs d'indice ι, la réunion des formes commutatrices $\Phi^{\lambda}(A_{\iota_1}, A_{\iota_2}, \ldots, A_{\iota_w})$ d'indice $\lambda \geqslant \iota$ par rapport à $E = [A_1, A_2, \ldots, A_\nu]$ et nous les noterons $0^{\iota}(A_1, A, \ldots, A_\nu)$; $0^1 = (A_1, \ldots, A_\nu) = A_1 \cup \ldots \cup A_\nu$.

9.1 - $0^{\iota}(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$ est sous-groupe normal dans $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$.

Soit Φ^{λ} une forme commutatrice d'indice $\lambda \geqslant \iota$, $c \in \Phi^{\lambda}$, $a \in A_{\varkappa}$, $\varkappa \in N$. On a

$$aca^{-1} = (a \circ c)c \in (A_{\varkappa} \circ \Phi^{\lambda})\Phi^{\lambda} \subseteq 0^{\iota}(A_1, \ldots, A_\nu)$$

car $A_{\varkappa} \circ \Phi^{\lambda}$ est une forme commutatrice d'indice $\geqslant \lambda$. Mais alors on déduit que pour tout $\alpha = \prod_i a_i^1 \ldots a_i^{\nu} \in A_1 \cup \ldots \cup A_\nu$, $\alpha c \alpha^{-1} \in 0^{\iota}$ et par conséquent 9.1.

9.2 - On a $E^2(A_1, A_2, \ldots, A_\nu) = 0^2(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$.

D'après 8.3, $0^2 \subseteq E^2$. Soit, réciproquement, $a = \prod_i a_i^1 \ldots a_i^{\nu} \in E^2$, c'est-à-dire tel que $\prod_i a_i^{\varkappa} = e$. Il existe une substitution opérant dans l'ensemble des $a_i^{\varkappa}$ telle que $\sigma(a) = \prod_i a_i^1 \prod_i a_i^2 \ldots \prod_i a_i^{\nu}$. D'autre part σ peut être décomposée en un produit de transpositions $\sigma = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_m$ portant sur des éléments consécutifs et de la forme $\tau_k = (a_i^{\varkappa} a_j^{\varkappa})$, avec $\varkappa \neq \lambda$. On a $a_i^{\varkappa} a_j^{\lambda} \equiv a_j^{\lambda} a^{\varkappa} (0^2)$ et puisque 0^2 est normal dans E^1, donc l'équivalence attachée régulière, $\tau_k \tau_{k+1} \ldots \tau_m(a) \equiv \tau_{k+1} \ldots \tau_m(a)(0^2)$. On en déduit

$$e = \prod_i a_i^1 \ldots \prod_i a_i^{\nu} = \sigma(a) = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_m(a) \equiv a(0^2)$$

c'est-à-dire que $a \in 0^2$, et en définitive $E^2 \subseteq 0^2$.

<u>9.3 - On a $E^{\iota}(A_1, A_2, \ldots, A_\nu) = O^{\iota}(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$, $1 \leq \iota \leq \nu$.</u>

D'après 8.3, $O^\iota \subseteq E^\iota$. Supposons que $E^{\iota-1} \subseteq O^{\iota-1}$. Un élément $a \in E^{\iota-1}$ est donc de la forme $a = \prod_i \varphi_i^1 \varphi_i^2 \ldots \varphi_i^\lambda \alpha_i$, où $\varphi_i^\varkappa \in \phi_\varkappa^{\iota-1}(A_{\varkappa_1}, \ldots, A_{\varkappa_{\iota-1}})$, $\phi_\varkappa^{\iota-1}$ étant des formes commutatrices d'indice $\iota-1$ et différentes au moins d'une variable et $\alpha_i \in O^\iota$. Si de plus $a \in E^\iota$ on a $N^{\iota-1}(a) = e$, ce qui entraîne, puisque $O^\iota \subseteq E^\iota$, donc $\alpha_i \in E^\iota$

$$N^{\iota-1}(\alpha_i) = e.$$

Notons d'autre part $K_\varkappa = [\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\iota-1}]$; on a d'après 8.3

$$N^{\iota-1}(\varphi_i^\varkappa) = [K_\varkappa \cap N^{\iota-1}](\varphi_i^\varkappa) = \begin{cases} e, & \text{si } K_\varkappa \cap N^{\iota-1} \subset K_\varkappa \\ \varphi_i^\varkappa, & \text{si } K_\varkappa \cap N^{\iota-1} = K_\varkappa, \text{ donc } N^{\iota-1} = K_\varkappa. \end{cases}$$

Si donc on prend $N^{\iota-1} = K_\varkappa$, on a

$$e = N^{\iota-1}(a)\ \prod_i N^{\iota-1}(\varphi_i^1) \ldots N^{\iota-1}(\varphi_i^\varkappa) \ldots N^{\iota-1}(\varphi_i^\varkappa)\, N^{\iota-1}(\alpha_i) = \prod_i \varphi_i^\varkappa$$

car $N^{\iota-1} \neq K_{\varkappa'}$, pour tout $\varkappa' \neq \varkappa$. On déduit que

$$a = \prod_i \alpha_i \ \prod_i \varphi_i^1 \varphi_i^2 \ldots \varphi_i^\lambda \alpha_i'$$

avec $\prod_i \varphi_i^\varkappa = e$, $1 \leq \varkappa \leq \lambda$, $\prod_i \alpha_i' = e$. Mais on a $\alpha = \prod_i \alpha_i \in O^\iota$ et d'autre part $\varphi = \prod_i \varphi_i^1 \varphi_i^2 \ldots \varphi_i^\lambda \alpha_i' \in E^2(\phi_1^{\iota-1}, \phi_2^{\iota-1}, \ldots, \phi_\lambda^{\iota-1}, O^\iota)$, donc d'après 9.2 :

$$\varphi \in O^2(\phi_1^{\iota-1}, \phi_2^{\iota-1}, \ldots, \phi_\lambda^{\iota-1}, O^\iota) \subseteq O^\iota$$

par conséquent $a = \alpha\varphi \in O^\iota$ et en définitive $E^\iota \subseteq O^\iota$. De 9.2 on déduit maintenant que 9.3 est valable pour tout $\iota \leq \nu$.

9.4 - <u>On a</u>

$$\bigcup_{1 \leq \varkappa \leq \nu} A_\varkappa = \prod_{\varkappa_1} A_{\varkappa_1} \cdot \prod_{\varkappa_1, \varkappa_2} O^2(A_{\varkappa_1}, A_{\varkappa_2}) \ldots \prod_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} O^\lambda(A_{\varkappa_1}, \ldots, A_{\varkappa_\lambda})$$

$\ldots O^\nu(A_1, A_2, \ldots A_\nu)$ <u>l'ordre des facteurs dans les produits</u> $\prod_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}$ <u>étant indifférent.</u>

Choisissons d'abord un ordre fixe, mais autrement arbitraire pour les produits $\prod_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}$ et soit $a = \prod_i a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu \in \bigcup_{1 \leq \varkappa \leq \nu} A_\varkappa$. Notons $N^\lambda_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} = [\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda]$ et posons $c(\varkappa_1) = N^1_{\varkappa_1}(a)$, $p_1 = \prod_{\varkappa_1} c(\varkappa_1)$. Les relations $c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda) = N^\lambda_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}(p^{-1}_{\lambda-1}\, a)$

$$p_\lambda = p_{\lambda-1} \prod_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_\lambda} c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)$$

définissent $c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)$ et p_λ, pour tout $\lambda < \nu$. Nous avons évidemment

$$(1') \qquad c(\varkappa_1) \in A_{\varkappa_1}$$

et d'autre part

$$(2') \qquad a \equiv p_1 \ (E^2)$$

car $N^1_\varkappa(p_1^{-1}a) = \prod_{\varkappa_1}\{N^1_\varkappa[c(\varkappa_1)]\}^{-1}.N^1_\varkappa(a) = \prod'_{\varkappa_1}\{N^1_\varkappa[N^1_{\varkappa_1}(a)]\}^{-1}.N^1_\varkappa(a)$; mais

$$N^1_\varkappa[N^1_{\varkappa_1}(a)] = \begin{cases} e \ ; & \varkappa_1 \neq \varkappa \\ N^1_\varkappa(a) \ ; & \varkappa_1 = \varkappa \end{cases}$$

de sorte que $N^1_\varkappa(p_1^{-1}a) = [N^1_\varkappa(a)]^{-1}.N^1_\varkappa(a) = e$, pour tout $\varkappa$, donc $p_1^{-1}a \in E^2$ et en définitive (2') .

Supposons maintenant que

$$(1'') \qquad c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_{\lambda-1}) \in E^{\lambda-1}(A_{\varkappa_1}, \dots, A_{\varkappa_{\lambda-1}})$$

$$(2'') \qquad a \equiv p_{\lambda-1} \ (E^\lambda)$$

Si N' est un sous-ensemble propre de $N^\lambda_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_\lambda}$, nous obtenons à partir de (2")

$$N'[c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)] = N'[N^\lambda_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_\lambda}(p_{\lambda-1}^{-1}a)] = N'(p_{\lambda-1}^{-1}a) = e$$

c'est-à-dire que

$$(1) \qquad c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda) \in E^\lambda(A_{\varkappa_1}, \dots, A_{\varkappa_\lambda}) .$$

D'autre part

$$p_\lambda^{-1}a = \Big[\prod'_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_\lambda} c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)\Big]^{-1}.p_{\lambda-1}^{-1}a$$

Si $\mu < \lambda$, $N^\mu[c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)] = e$, d'après (1) et $N^\mu(p_{\lambda-1}^{-1}a = e)$ d'après (2") , tandis que

$$N^\lambda[c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)] = \begin{cases} e \ ; & N^\lambda_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_\lambda} \neq N^\lambda \\ c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda) \ ; & N^\lambda_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_\lambda} = N^\lambda \end{cases}$$

toujours d'après (1) . On en déduit

$$N^\mu(p_\lambda^{-1}a) = e \quad , \quad \mu < \lambda$$

$$N^\lambda(p_\lambda^{-1}a) = [c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)]^{-1}.N^\lambda(p_{\lambda-1}^{-1}a) = [N^\lambda(p_{\lambda-1}^{-1}a)]^{-1}.N^\lambda(p_{\lambda-1}^{-1}a) = e$$

donc $p_\lambda^{-1} a \in O^{\lambda+1}$, c'est-à-dire

(2) $$a \geq p_\lambda (E^{\lambda+1}) \ .$$

On en conclut que (1) et (2) sont valables pour tout $\lambda < \nu$, c'est-à-dire que

$$a = p_{\nu-1} \cdot c(1, 2, \ldots, \nu) = \prod_{\varkappa_1} c(\varkappa_1) \cdot \prod_{\varkappa_1, \varkappa_2} c(\varkappa_1, \varkappa_2) \ldots c(1, 2, \ldots \nu)$$

où $c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda) \in E^\lambda (A_{\varkappa_1}, \ldots, A_{\varkappa_\lambda})$, $1 \leq \lambda < \nu$, $c(1, 2, \ldots, \nu) \in E^\nu (A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$.

Mais ceci signifie, en tenant compte de 9.3 que

$$\bigcup_{1 \leq \varkappa \leq \nu} A_\varkappa \subseteq \prod_{\varkappa_1} A_{\varkappa_1} \cdot \prod_{\varkappa_1, \varkappa_2} O^2(\varkappa_1, \varkappa_2) \ldots O^\nu (A_1, \ldots, A_\nu)$$

et d'autre part l'inclusion réciproque est évidente.

<u>9.5 - La suite définie par</u>

$$c_\lambda = c_{\lambda-1}^{-\binom{\lambda}{\lambda-1}} \ldots c_2^{-\binom{\lambda}{2}} b^{-\lambda} a^{-\lambda} (ab)^\lambda \quad , \quad c_2 = b^{-\lambda} a^{-\lambda} (ab)^\lambda \quad , \; c_1 = e$$

<u>est telle que $c_\lambda \in O^\lambda \{a, b\}$.</u>

Nous allons montrer que si nous prenons, dans la démonstration de 9.4 , $A_\varkappa = \{a, b\}$, $a_1^\varkappa = b^{-1}$, $a_2^\varkappa = a^{-1}$, $a_3^\varkappa = ab$, $1 \leq \varkappa \leq \nu$, nous obtenons en considérant l'élément de $\bigcup_{1 \leq \varkappa \leq \nu} A_\nu = \{a, b\}$

$$\alpha = \prod_i a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu = b^{-\nu} a^{-\nu} (ab)^\nu \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

l'égalité suivante

(1) $$c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda) = c_\lambda$$

quel que soit le sous-ensemble $[\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda]$ de λ éléments de N .

Supposons en effet que l'égalité ait lieu pour tout $\lambda' < \lambda$. D'après l'hypothèse et la relation (2) de 9.4

$$N^\lambda_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} [c(\varkappa'_1, \ldots, \varkappa'_{\lambda'})] = \begin{cases} e & ; N^{\lambda'}_{\varkappa'_1, \ldots, \varkappa'_{\lambda'}} \cap N^\lambda_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} \subset N^{\lambda'}_{\varkappa'_1, \ldots, \varkappa'_{\lambda'}} \\ c_{\lambda'} & ; N^{\lambda'}_{\varkappa'_1, \ldots, \varkappa'_{\lambda'}} \subset N^\lambda_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} \end{cases}$$

La seconde alternative se vérifie pour $\binom{\lambda}{\lambda'}$ sous ensemble $N^{\lambda'}_{\varkappa'_1, \ldots, \varkappa'_{\lambda'}}$ de λ éléments de N , de sorte que

$$N^\lambda_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} (p_{\lambda-1}) = N^\lambda_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} \Big[\prod_{\varkappa_1} c(\varkappa_1) \prod_{\varkappa_1, \varkappa_2} c(\varkappa_1, \varkappa_2) \ldots \prod_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}} c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}) \Big] = c_2^{\binom{\lambda}{2}} c_3^{\binom{\lambda}{3}} \ldots c_{\lambda-1}^{\binom{\lambda}{\lambda-1}}$$

et en définitive, puisque $N^{\lambda}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_\lambda}(\alpha) = b^{-\lambda}a^{-\lambda}(ab)^{\lambda}$

$$c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda) = N^{\lambda}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_\lambda}(p^{-1}_{\lambda-1}\alpha) = c_{\lambda-1}^{-\binom{\lambda}{\lambda-1}} \dots c_2^{-\binom{\lambda}{2}} b^{-\lambda}a^{-\lambda}(ab)^{\lambda} = c_\lambda$$

On déduit que (1) est valable pour tout $\lambda < \nu$. Mais d'après 9.3

$$c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda) \in 0^{\lambda}(\Lambda_{\varkappa_1}, \dots, \Lambda_{\varkappa_\lambda}) = 0^{\lambda}\{a,b\}$$

On a donc

$$c_\lambda \in 0^{\lambda}\{a,b\}$$

pour tout $\lambda < \nu$, et puisque la relation a lieu pour tout ν elle est valable pour tout λ . On en déduit l'identité de P. Hall

$$(ab)^{\lambda} = a^{\lambda} b^{\lambda} c_2^{\binom{\lambda}{2}} \dots c_{\lambda-1}^{\binom{\lambda}{\lambda-1}} c_\lambda$$

avec $c_\varkappa \in 0^{\varkappa}\{a,b\}$, $2 \leqslant \varkappa \leqslant \lambda$, sous la forme donnée par A. Magnus et généralisée par M. Lazard.